



MATHEMATICS—A “QUASI-NATURAL SCIENCE” AT SCHOOL?

MAJID AFSHARI ^{1*} AND HAMIDREZA KASHEFI ²

¹Department of Physics Education, Farhangian University, P.O. Box 14665-889, Tehran, Iran
m.afshari@cfu.ac.ir

²Department of Mathematic Education, Farhangian University, P.O. Box 14665-889, Tehran, Iran
hkashefi@cfu.ac.ir

Abstract. The most distinctive characteristic which differentiates mathematics from the various branches of empirical science, and which accounts for its fame as the queen of the sciences, is no doubt the peculiar certainty and necessity of its results. In this way, Hempel described a specific feature of modern mathematics. Hempel traced this certainty and this necessity back to the consideration that after Hilbert mathematics has developed towards a formal-abstract science, which does not need ontological bounding to reality (physical space) anymore but is based solely on logical consistency. However, at school mathematics still is not and cannot be taught in this abstract form for various reasons, here the usage of illustrative material, diagrams and real-world application is essential. From a constructivist point of view, students in this environment construct a so-called “empirical-concrete” mathematical worldview on the basis of real objects than a “formal-abstract” worldview as it is described by Hempel. This “empiricalconcrete” mathematical worldview, on an epistemologically level, is quite close to the natural sciences; one could speak of mathematics in modern school as something like a “quasi-natural science”. Questions regarding core beliefs, terms and processes of natural sciences (education) in general and physics (education) in particular are of eminent importance to mathematics teachers from this point of view and open a whole range of possibilities for further discussions and cooperation at the crossroads.

2020 Mathematics Subject Classification. 45D05

Keywords. Interdisciplinary, Relation between mathematics and physics, Epistemology

Date: Received 30-05-2025 Accepted 15-11-2025 Available Online 20-12-2025

©Ferdowsi University of Mashhad.



ریاضیات - یک «علم شبه طبیعی» در آموزش مدرسه‌ای ترجمه

مجید افشاری^{۱*} و حمیدرضا کاشفی^۲

^۱گروه آموزش فیزیک، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۱۴۶۶۵-۸۸۹، تهران، ایران

m.afshari@cfu.ac.ir

^۲گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۱۴۶۶۵-۸۸۹، تهران، ایران

hkashefi@cfu.ac.ir

چکیده. ریاضیات به واسطه قطعیت و ضرورت نتایج خود از علوم تجربی متمایز می‌شود؛ ویژگی‌ای که همپل را بر آن داشت تا آن را «ملکه علوم» بنامد. او این قطعیت را به تحول ریاضیات پس از هیلبرت نسبت می‌دهد، جایی که ریاضیات به دانشی صوری و انتزاعی بدل شد که نه بر پیوندهای هستی‌شناختی با واقعیت فیزیکی، بلکه صرفاً بر سازگاری منطقی استوار است. با این حال، در آموزش مدرسه‌ای، ریاضیات نمی‌تواند به این شکل کاملاً انتزاعی تدریس شود و استفاده از نمودارها، مواد تصویری و کاربردهای دنیای واقعی ضروری است. از دیدگاه سازه‌گرایانه، دانش‌آموزان در این فضا به جای جهان‌بینی «صوری-انتزاعی» توصیف‌شده توسط همپل، یک جهان‌بینی ریاضی «تجربی-عینی» مبتنی بر اشیای واقعی می‌سازند. از منظر معرفت‌شناختی، این نوع ریاضیات مدرسه‌ای به علوم طبیعی نزدیک است و می‌توان آن را نوعی «علم شبه طبیعی» دانست؛ امری که پرسش‌های بنیادین علوم طبیعی و به‌ویژه آموزش فیزیک را برای معلمان ریاضی بسیار مهم می‌سازد و زمینه‌ای برای گفت‌وگوی میان‌رشته‌ای فراهم می‌کند.

2010 Mathematics Subject Classification. 45D05.

واژگان کلیدی. میان‌رشته‌ای، رابطه بین ریاضیات و فیزیک، معرفت‌شناسی

E. Krause, Mathematics—A “Quasi-natural Science” at School?, Concepts, Strategies and Models to Enhance Physics Teaching and Learning, 2019.

تاریخ: دریافت ۱۴۰۴/۰۳/۰۹ پذیرش ۱۴۰۴/۰۸/۲۴ انتشار برخط ۱۴۰۴/۰۹/۲۹
نحوه ارجاع به این مقاله: م. افشاری و ح. کاشفی، ریاضیات - یک «علم شبه طبیعی» در آموزش مدرسه‌ای، به سوی علوم ریاضی، ۵ (۱۴۰۴)، شماره ۱، ۶۷-۵۸.

©دانشگاه فردوسی مشهد.

* نویسنده مسئول

۱. چرا باید آموزشگران فیزیک و ریاضی با هم همکاری کنند؟

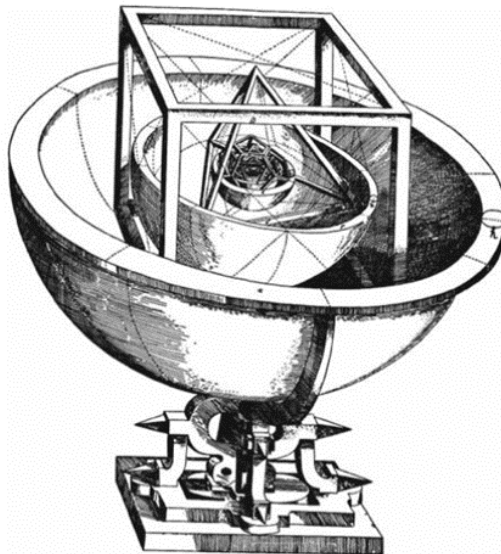
۱.۱. نمونه‌ای از یک بخش فرعی. «خدا جهان را با استفاده از هندسه آفرید!» [۱۶] - باورهای متافیزیکی مانند این باعث شده‌اند که دانشمندانی چون یوهانس کپلر تلاش کنند تا دنیای واقعی را از طریق ارتباط بین علوم طبیعی و ریاضیات توضیح دهند. به همین دلیل، او در تجربه‌ای شگفت‌انگیز توانست فاصله‌های ظاهراً نامنظم سیارات را از طریق مدل چندوجهی خود، که بر اساس اجسام افلاطونی بود، توضیح دهد (شکل ۱). حتی بدون این ملزومات متافیزیکی، ارتباط بین ریاضیات و فیزیک را می‌توان نه تنها از طریق بررسی تاریخ پیدایش این دو موضوع بازسازی کرد، بلکه این ارتباط امکانات بی‌شماری را برای آموزش و یادگیری این دو رشته فراهم می‌کند. به‌ویژه در آموزش عالی، تدریس اغلب از مرزهای بین رشته‌ها عبور می‌کند. از آغاز دهه ۲۰۰۰، میان‌رشته‌ای بودن نه تنها در دانشگاه‌ها به‌عنوان یک شیوه جدید پژوهش [۵] و آموزش [۲۹] مورد توجه قرار گرفته است، بلکه به‌عنوان یک اصل آموزشی در طراحی فرآیندهای یادگیری-آموزشی مثلاً در قالب پروژه‌های مسئله‌محور در مدارس متوسطه، جایگاه ویژه‌ای پیدا کرده است [۲۰، ۲۶].

در این راستا گرانزر [۱۰]، با این امید که دانش‌آموزان بتوانند شایستگی‌های کلیدی را توسعه دهند، از «شایستگی‌های میان‌رشته‌ای» سخن می‌گوید و برای تحقق این مفهوم پیچیده و چالش‌برانگیز، به طور عملی از روش‌های مختلف تدریس استفاده کرده است (به‌عنوان مثال، [۳، ۲۱]). با این حال، تمرکز همواره بر روی توانایی ترکیب، کاربرد و تحلیل نظام‌مند دانش از رشته‌های مختلف است. پتانسیل آموزشی تدریس و یادگیری میان‌رشته‌ای به‌ویژه در میان رشته‌های علوم، فناوری، مهندسی و ریاضیات مدتی است که مورد بحث قرار گرفته است [۱۵، ۲۳].

ریاضیات و فیزیک به‌طور خاص برای این هدف مناسب هستند [۹]. نگاهی به برنامه درسی اصلی ریاضیات نشان می‌دهد که یکی از وظایف مهم آموزش ریاضی این است که دانش‌آموزان بتوانند ریاضیات را در موقعیت‌های کاربردی با زمینه‌های واقعی و ملموس تجربه کنند [۲، ۳۸]. اگرچه روش‌های مختلفی برای گنجاندن زمینه‌های کاربردی غیر ریاضی در تدریس ریاضی وجود دارد، متأسفانه برخی از آن‌ها هنوز هم به‌صورت تکنیک‌های استاندارد محاسباتی ارائه می‌شوند [۱، ۱۴] که فقط موقعیت‌های خاص ریاضی را پوشش داده و یا مجموعه‌ای از مسائل کاربردی مختلف را مطرح می‌کنند که اجرای آن‌ها ممکن است دشوار یا گیج‌کننده باشد [۳۶]. فیزیک زمینه‌های بسیاری را برای به‌کارگیری ریاضیات به‌صورت معتبر ارائه می‌دهد، اما استفاده از این کاربردها در فرآیند تدریس و یادگیری ریاضی به آن سادگی که به نظر می‌رسد، نیست. از سوی دیگر، ریاضیات نقش مهمی در یادگیری فیزیک ایفا می‌کند [۱۸، ۲۸]. پرداختن به فیزیک به‌صورت کمی، بدون ریاضیات غیرممکن است. ریاضیات نه تنها به‌عنوان ابزاری برای محاسبات، بلکه به‌عنوان زبانی برای بیان مختصر و دقیق مفاهیم پیچیده استفاده می‌شود. یکی از چالش‌های بزرگ معلمان فیزیک این است که توضیح دهند چرا و چگونه ریاضیات برای فیزیک ضروری است. اما این روابط میان ریاضیات و فیزیک در سطح محتوایی قرار دارند. این مقاله به بررسی ارتباط ریاضی و فیزیک در فرا-سطح می‌پردازد تا مشابهت‌های معرفت‌شناختی بین ریاضیات مدرسه‌ای و فیزیک را نشان دهد و پیامدهای آن‌ها را برای تدریس و یادگیری ریاضیات و فیزیک بررسی کند. این شباهت‌ها در سطح معرفت‌شناختی، همراه با ارتباطات در سطح محتوایی، یک پایه محکم برای آموزش میان‌رشته‌ای ریاضیات و فیزیک در مدرسه، در دوره‌های تربیت معلم و در طراحی پروژه‌های پژوهشی فراهم می‌کند.

۲. باورها درباره ریاضیات مدرن و ریاضیات مدرسه‌ای

نخست، باید در نظر بگیریم که ریاضیات به‌طور کلی چیست. اگر از مردم بپرسید که ریاضیات چیست، پاسخ‌های بسیار متفاوتی دریافت خواهید کرد. کسی که ریاضیات مدرن را در سطح دانشگاهی آموخته باشد، احتمالاً با اینشتین [۶، ۲۲] موافق خواهد بود که (به نقل از [۷، ۱۱]) می‌گوید: «تا جایی که قوانین ریاضیات به واقعیت اشاره دارند، قطعی نیستند؛ و تا جایی که قطعی‌اند، به واقعیت اشاره ندارند». قطعیت در ریاضیات، که به معنای سازگاری درونی آن است، برای ریاضیات بسیار مهم است. اما هنگامی



شکل ۱: مدل چندوجهی کپلر [۱۶] به عنوان مثالی از نمایش ارتباط ریاضیات و فیزیک

که ریاضیات به واقعیت ارجاع داده می‌شود، این قطعیت از بین می‌رود. این مفهوم انتزاعی-صوری از ریاضیات که حدود ۱۰۰ سال پیش توسط دیوید هیلبرت [۱۲] توسعه یافت، منجر به افزایش چشمگیر بهره‌وری در ریاضیات شد. زیرا حوزه موضوعی ریاضیات به‌طور قابل‌توجهی گسترش یافت [۲]. به عنوان مثال، در هندسه، پیش از هیلبرت، تنها فضاهایی تا بُعد سه بررسی می‌شدند، زیرا فضاهای با ابعاد بالاتر از نظر فیزیکی غیرواقعی به شمار می‌آمدند [۲۵]. از زمان هیلبرت [۱۲]، ریاضیات به عنوان نمونه اولیه علوم صوری-انتزاعی تلقی شده و با ویژگی‌های زیر تعریف می‌شود:

- ساختار اصل موضوعی
- جدا از واقعیت
- علم سیستم‌های انتزاعی تفسیر نشده (تمرکز بر ساختارها)
- مفهوم مطلق حقیقت (سازگاری درونی)

به‌طور خلاصه، می‌توان با استناد به فرودنتال [۸] گفت: «پیوند ریاضیات با واقعیت توسط هیلبرت قطع شده است». بر اساس یک فرضیه مستند در آموزش ریاضی، باور دانش‌آموزان نسبت به ریاضیاتی که در کلاس درس کسب می‌کنند، متفاوت است [۳۴]. تلاش‌ها برای آموزش ریاضیات در قالبی انتزاعی-صوری در مدارس در دهه ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ (جنبش «ریاضیات جدید») با شکست مواجه شد. در عوض، معلمان سعی دارند ریاضیات را به‌صورت ملموس و با کمک ابزارهای دیداری و رسانه‌های آموزشی تدریس کنند. مطالعات تجربی یک دوراهی را آشکار می‌کند: در حالی که برخی از معلمان مایل‌اند یک نظریه ریاضی انتزاعی-صوری را منتقل کنند، دانش‌آموزان در عمل یک نظریه تجربی-نمایشی درباره چگونگی استفاده از ابزارهای بصری و مفهومی را فرا می‌گیرند [۳۱، ۳۷]. به نظر می‌رسد، معلمان و دانش‌آموزان برداشت‌های متفاوتی از ریاضیات دارند — این مشاهده برای توسعه بیشتر آموزش ریاضی بسیار مهم است. در این شرایط، نظریه‌های دانش‌آموزان، نظریه‌های «فیزیکی» هستند، به این معنا که پدیده‌های واقعی، یعنی تجسم‌سازی، توصیف و تبیین می‌شوند. وجه اشتراک این دو، جنبه تجربی آن‌هاست: هدف، توصیف و توضیح پدیده‌های تجربی (فیزیکی) است.

دو مثال زیر نشان می‌دهند که چگونه درک دانش‌آموزان از ریاضیات مدرسه‌ای با درک انتزاعی-صوری ریاضیات در سطح دانشگاهی تفاوت دارد. مثال اول: هندسه مدرسه‌ای. هندسه اقلیدسی برای نخستین بار توسط دیوید هیلبرت [۱۲] به‌طور کامل بر اساس اصول موضوعی بنا نهاده شد. این دستگاه شامل ۲۰ اصل موضوعه است. با این حال، در آموزش هندسه در مدارس، این دستگاه اصل موضوعی انتزاعی-صوری در ابتدا ارائه نمی‌شود، بلکه هندسه با کمک شکل‌هایی که بر روی کاغذهای رسم یا تخته سیاه ترسیم می‌شوند، تدریس می‌شود. به این ترتیب، دانش‌آموزان هندسه انتزاعی-صوری را به معنای کتاب «مبانی هندسه» هیلبرت، که صرفاً با کمک شکل‌های ترسیمی ماهرانه به تصویر کشیده شده است، فرا نمی‌گیرند، بلکه یک نظریه تجربی-نمایشی از شکل‌های ترسیمی را می‌آموزند [۲۴]. این موضوع در مطالعات تجربی شونفیلد [۳۲، ۳۳] تأیید شده است. او با مشاهده دانش‌آموزان هنگام حل مسائل هندسی و بررسی «نظام باورهای» آن‌ها، به این نتیجه رسید که دانش‌آموزان دارای یک «نظام باور تجربی» هستند، در حالی که ریاضی‌دانان از یک «نظام باور ریاضی» پیروی می‌کنند.

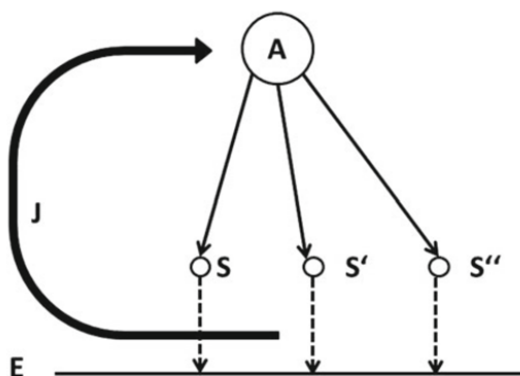
مثال دوم، آنالیز مدرسه‌ای است. موضوع اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال مدرن، توابع هستند. این توابع اشیایی جبری یا روابطی انتزاعی-صوری هستند که ویژگی‌های نظری خاصی را برآورده می‌کنند. از آنجا که مجموعه اعداد حقیقی در مدارس تنها به‌صورت ابتدایی تدریس می‌شود و به‌ویژه مفهوم کامل بودن آن معمولاً مورد بحث قرار نمی‌گیرد، تدریس حساب دیفرانسیل و انتگرال در مدارس نمی‌تواند همانند سطح دانشگاهی انجام شود. در عوض، نمایش بصری توابع از طریق نمودارها (ترسیم گراف‌ها)، که اغلب بر اساس رسم دستی یا نمایش روی ماشین حساب‌های گرافیکی است، پایه تدریس قرار می‌گیرد. در نتیجه، دانش‌آموزان در واقع یک نظریه تجربی درباره نمودارهای ترسیمی یاد می‌گیرند، نه یک نظریه انتزاعی درباره توابع [۳۷]. با این حال، یک درک تجربی-عینی از ریاضیات در مدرسه لزوماً یک نقص نیست. تحلیل‌های تاریخی [۳۵] نشان می‌دهند که بسیاری از ریاضیدانان در تاریخ ریاضیات چنین ایده‌ای داشته‌اند: مثال‌هایی از آن‌ها، موریتس پاش برای هندسه و لایبنتس و همچنین یاکوب و یوهان برنولی در حساب دیفرانسیل و انتگرال هستند. این مطالعات موردی تاریخی نشان می‌دهد که یک مفهوم تجربی-فیزیکی از ریاضیات به ویژه برای آموزش در مدرسه مناسب به نظر می‌رسد.

یک نظام باورهای تجربی از ریاضیات را می‌توان با نکات زیر مشخص کرد:

- یک حوزه موضوعی واقعی
- توضیح دانش از طریق استدلال منطقی و ارجاع به دانش شناخته‌شده
- تثبیت دانش از طریق تجربه‌گرایی

۳. شباهت‌های معرفت‌شناختی بین ریاضیات مدرسه‌ای و فیزیک

از زمان گالیله، نه تنها استقرا، بلکه استنتاج نیز نقش مهمی در فیزیک ایفا می‌کنند [۲۴]. تعمیم استقرایی پدیده‌های طبیعی به‌تنهایی منجر به تولید دانش علمی نمی‌شود. اگرچه تلاش‌هایی برای تثبیت استقرا به‌عنوان روشی نظام‌مند برای شکل‌گیری نظریه در فیزیک انجام شده است، اما این تلاش‌ها چندان موفقیت‌آمیز نبوده‌اند. مشهورترین مثال این نوع رویکرد، روش استقرایی فرانسس بیکن است. او با مشاهده نظام‌مند و ثبت داده‌ها (همان جدول‌های مثبت و منفی معروف بیکن) در یک فرایند تکراری، سعی کرد بینش جدیدی (نتیجه خطی مرحله اول، مرحله دوم و غیره) به دست آورد. اگرچه او با این روش ارتباطی بین گرما و حرکت کشف کرد، اما سیمونی [۲۰] در بررسی‌های تاریخی خود می‌نویسد: «در عمل، روش دقیق بیکن برای کشف قوانین واقعی طبیعت قابل استفاده نیست و هیچ قانون جدیدی از این طریق کشف نشده است». این بدفهمی از ماهیت فیزیک بسیار رایج است، اینشتین بارها در نوشته‌های خود درباره فلسفه علوم طبیعی، علیه دیدگاه‌های استقرایی صرف موضع گرفته است. هولتون [۱۳] درباره نظرات اینشتین چنین توضیح می‌دهد: «رشد و پیشرفت یک علم در مراحل ابتدایی، اغلب به شکل صعود از یک نردبان منطقی است که در آن، گزاره‌های کلی با استفاده از استقرا از مشاهدات جزئی حاصل می‌شوند». اینشتین گفته است [۶]: «هیچ روش استقرایی وجود



شکل ۲: مدل EJASE اینشتین

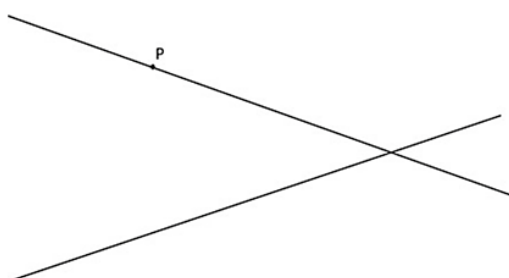
ندارد که به فرضیه‌های بنیادی فیزیک منجر شود. عدم درک این واقعیت، خطای بنیادی فلسفی است که بسیاری از پژوهشگران قرن نوزدهم را گمراه کرده است». او علم را این‌گونه توصیف می‌کند [۶]: علم تلاشی است برای سازگار کردن تنوع آشفته تجربیات حسی با یک دستگاه فکری منسجم و منطقی؛ در این دستگاه، تجربیات فردی باید به‌گونه‌ای به ساختار نظری مرتبط شوند، که نتیجه این ارتباط منحصربه‌فرد و قانع‌کننده باشد. تجربیات حسی، داده‌های اولیه هستند. اما نظریه‌ای که هدف تفسیر آن‌هاست، ساخته دست انسان است. این نظریه نتیجه یک فرآیند تطبیق بسیار طاقت‌فرسا، فرضی، نه کاملاً نهایی، و همواره در معرض پرسش‌ها و تردیدهاست.

در نامه‌ای که اینشتین در سال ۱۹۵۲ به دوست خود موریس سولوون نوشت، دیدگاه خود را درباره ماهیت علم تبیین کرد. این مدل که در مقالات علمی به نام مدل EJASE شناخته می‌شود، توسط هولتون [۱۳]، کوهن [۱۹] و کراوزه [۱۷] تحلیل و بازنشر شده است. هسته اصلی توضیح او در طرح شکل ۲ خلاصه شده است.

در این مدل خط E نشان‌دهنده تجربیات است. اما نقطه شروع واقعی این فرآیند، طبق نظر اینشتین، اصول موضوعه هستند که می‌توان آن‌ها را به عنوان یک آفرینش ذهنی آزاد و در نتیجه ساخته دست بشر در نظر گرفت. پیکان منحنی به سمت اصول موضوعه، که «جهش» نامیده می‌شود، بدون شک بیشترین سوالات را در این مدل ایجاد می‌کند. اینشتین در این باره به طور دقیق توضیح می‌دهد (نامه اینشتین به سولوون، نقل شده از هولتون [۱۳])، ترجمه توسط نویسنده: از نظر روانشناختی، A بر E استوار است. هیچ مسیر منطقی از E به A وجود ندارد، بلکه فقط یک ارتباط شهودی (روانشناختی) وجود دارد که همواره در معرض نقض شدن است.

تعیین دقیق عوامل دخیل در خلق اصول موضوعه یک نظریه دشوار است. بی‌شک تجربیات حاصل از آزمایش عامل بسیار مهمی در خلق اصول موضوعه یک نظریه است، اما «ایده‌های جسورانه» دیگر، که شاید از اعتقادات متافیزیکی ریشه گرفته باشند نیز ممکن است در این امر دخیل باشند. از مجموعه اصول موضوعه و تعاریف، گزاره‌هایی قابل استخراج هستند (S در شکل ۲). روابط بین A و S فقط استنتاجی هستند و به خودی خود تحت تأثیر هیچ داده تجربی قرار نمی‌گیرند.

گزاره‌های استخراج شده باید در نظریه تجربی مبتنی بر تجربه، صحت خود را نشان دهند. اینشتین این نکته را با پیکان‌های از S به خط مستقیم E مشخص می‌کند. در فیزیک، این کار معمولاً از طریق آزمایش‌ها انجام می‌شود. اصول موضوعه A، گزاره‌های استنتاج شده S و ارتباط بین آنها، هسته ریاضیاتی نظریه را تشکیل می‌دهند. مفاهیم نظری به خودی خود هیچ ارجاع تجربی ندارند. در این مدل، یک افزودنی دیگر به استنتاج نهایی مبتنی بر استنتاج گالیله‌ای و استدلال‌های قیاسی-ربایشی وجود دارد. خلق اصول



شکل ۳: یک تکلیف هندسی برای پی بردن به نظام باورها

موضوعه، تعمیم استقرایی تجربیات حسی نیست. کمان از E به A بیشتر به عنوان ربایش شناخته می‌شود. این منطق توسط چارلز سندرز پیرس (۱۸۳۹-۱۹۱۴) در پایان قرن نوزدهم و آغاز قرن بیستم [۲۷] وارد حوزه نظریه دانش شد.

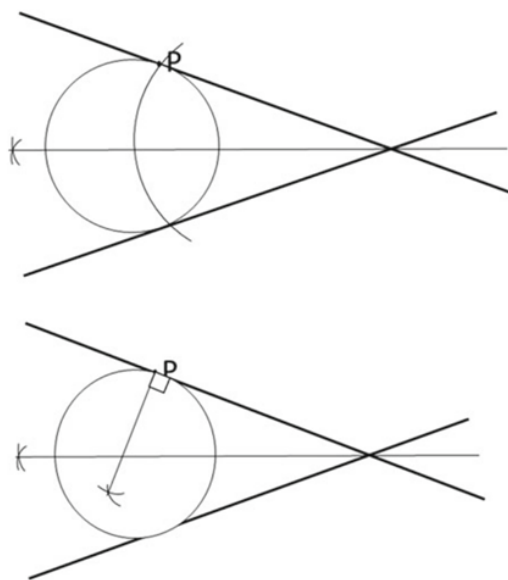
نقطه شروع ربایش معمولاً یک واقعیت غیرمنتظره، یک پرسش یا یک ناسازگاری حل نشده است و قاعده‌ای را پیشنهاد می‌کند که به پرسش پاسخ می‌دهد یا تردید را برطرف می‌کند. این قاعده از پیش فرضها استنتاج نمی‌شود، بلکه به شکل موقت وضع می‌شود. از این اصول موضوعه، گزاره‌هایی در یک استدلال منطقی دیگر استخراج می‌شوند. داده‌های تجربی حاصل از آزمایش، برای سنجش این قضایا به کار می‌روند. بنابراین، ربایش، استنتاج و، به نوعی، استقرا نیز در این فرآیند تولید دانش نقش دارند. بدیهی است که این روند به صورت خطی و مرحله‌ای نخواهد بود. شکل‌گیری نظریه با تکرار این مراحل بهبود می‌یابد.

مدل EJASE اینشتین، که به عنوان الگویی برجسته برای تبیین ماهیت علم مطرح است، با دیدگاه تجربی حاکم بر ریاضیات که شونفیلد [۳۲] به آن پرداخته، همخوانی‌هایی دارد.

برای نشان دادن شباهت‌های بین ریاضیات مدرسه‌ای و فیزیک، می‌خواهیم نگاهی دقیق‌تر به مسئله‌ای بیندازیم که شونفیلد [۳۲] برای تحقیقات خود از آن استفاده کرد: دو خط راست متقاطع و نقطه‌ای به نام P روی یکی از این دو خط داده شده‌اند. نشان دهید چگونه می‌توان فقط با استفاده از پرگار و خطکش، دایره‌ای را رسم کرد که دو خط راست متقاطع بر آن مماس باشند و نقطه P، نقطه تماس با یکی از خطوط باشد (شکل ۳). رونوشت‌هایی که شونفیلد [۳۲] تهیه کرد، الگویی از رفتار دانشجویان را نشان می‌دهد که مانند «تجربه‌گرایان محض» عمل می‌کنند و ایده‌ها و فرضیات خود را منحصراً با رسم شکل تولید و تأیید می‌کنند. در مقابل، یک ریاضی‌دان از اصطلاحات و تعاریف استفاده می‌کند. بررسی فرضیه‌های هندسی توسط دانشجویان فقط بر اساس رسم شکل انجام می‌شود. وقتی که ریاضی‌دان از رسم استفاده نمی‌کند، میزان دقت افزایش می‌یابد. شکل ۴ نشان می‌دهد که استدلال منطقی برای دانشجویان به اندازه یک رسم ظاهراً صحیح اهمیت ندارد، زیرا آن‌ها می‌توانند دو راه حل متفاوت (از نظر منطقی ناسازگار) را بپذیرند، اگر هر دو مناسب به نظر برسند.

۴. جمع‌بندی و پیشنهادات پژوهشی

ریاضیات و فیزیک اشتراکات محتوایی گسترده‌ای دارند. علاوه بر این، شباهت‌های معرفت‌شناختی بین این دو رشته اجازه می‌دهد که آن‌ها را با یکدیگر مقایسه کنیم. به‌ویژه، ریاضیات مدرسه‌ای، که از منظر محدودیت‌های هستی‌شناختی در ارتباط با واقعیت، با ریاضیات نوین تفاوت دارد، وجوه مقایسه‌جذابی را با فیزیک نمایان می‌کند. بر این اساس، ریاضیات مدرسه‌ای را می‌توان به عنوان یک علم شبه طبیعی قلمداد کرد. این مقایسه شامل ظرفیت‌های پژوهشی جدیدی برای هر دو رشته است: پژوهش‌های بنیادی باید هم‌افزایی‌های دقیق بین این دو حوزه را بررسی کرده و پیامدهای آن‌ها برای آموزش را مشخص کنند. این پژوهش‌ها باید با تحقیقات



شکل ۴: دانش‌آموزان هر دو راه حل را می‌پذیرند، با وجود اینکه از لحاظ منطقی متناقض هستند، چون تصویر درست به نظر می‌رسد [۳۱، p. ۱۷۰].

تجربی همراه شود، به طور مثال، پژوهش‌هایی که باورهای ریاضیاتی و درک دانشجویان از ماهیت علم را در چارچوب نظری موجود، شناسایی می‌کنند. علاوه بر این، لازم است مداخلاتی طراحی و مورد ارزیابی قرار گیرند. به عنوان مثال، می‌توان یک دوره بین‌رشته‌ای در تربیت معلم طراحی کرد که در آن، دبیران ریاضی و فیزیک، وجوه اشتراک و تفاوت‌های این دو رشته را در سطح محتوایی و در فرا-سطح معرفت‌شناختی مورد بحث و بررسی قرار دهند.

مراجع

1. A. Baumann, *Eine kritische Betrachtung zum Thema "Modellierungsaufgaben" anhand von Beispielen aus dem hessischen Zentralabitur 2009*, Mathematikinformation 55 (2011), 15–23.
2. A. Büchter and H. W. Henn, *Schulmathematik und Realität – Verstehen durch Anwenden*. In: Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B., Weigand, H.-G. (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik*, Springer, Heidelberg (2015), 19–50.
3. H. Caviola, *Wie Fächer miteinander ins Gespräch kommen: Modelle der Fächervernetzung und ihre Lernziele*. In: Caviola, H., et al. (Hrsg.), *TriOS: Nr. 2/2012. Interdisziplinarität*, LIT-Verlag, Münster (2012), 5–36.
4. P. J. Davis, R. Hersch, E. A. Marchisotto, *The Mathematical Experience*, Study Edition, Boston (1995).
5. R. Defila, and A. Guilio *"Interdisziplinarität" in der wissenschaftlichen Diskussion und Konsequenzen für die Lehrerbildung*. In: Wellensiek, A. (Hrsg.), *Beltz Wissenschaft: Bd. 38*.

- Interdisziplinäres Lehren und Lernen in der Lehrerbildung, Perspektiven für innovative Ausbildungskonzepte, Beltz, Weinheim, Basel (2002).
6. A. Einstein, *Aus meinen späten Jahren*, Deutsche Verlagsanstalt, Stuttgart (1952).
 7. L. D. English, *Advancing elementary and middle school STEM education*, Int. J. Sci. Math. Educ. 15 (2017), 5–24.
 8. H. Freudenthal, *Die Grundlagen der Geometrie um die Wende des 19. Jh.*, Vortrag auf der DMV-Tagung in Utrecht (1972).
 9. I. Galili, *Physics and mathematics as interwoven disciplines in science education*, Sci. Educ. 27 (2018), 7–37.
 10. D. Granzer, *Interdisziplinäres Lehren und Lernen – Leitgedanken für einen neuen Lernbereich*. In: Wellensiek, A. (Hrsg.), Beltz Wissenschaft: Bd. 38. Interdisziplinäres Lehren und Lernen in der Lehrerbildung, Beltz, Weinheim, Basel (2002), 72.
 11. C. G. Hempel, *Am. Math. Mon. 52 (1945)*. Reprinted in: Feigl, H., Sellars, W. (Hrsg.), *Readings in Philosophical Analysis*, Appleton-Century-Crofts, New York (1949). Reprinted in: Newman, J. R. (Hrsg.), *The World of Mathematics*, vol. III, Simon and Schuster, New York (1956).
 12. D. Hilbert, *Grundlagen der Mathematik*, Leipzig (1900).
 13. G. J. Holton, *Thematische Analyse der Wissenschaft: Die Physik Einsteins und seiner Zeit* (1. Aufl.), Suhrkamp-Taschenbuch Wissenschaft 293, Frankfurt am Main (1981).
 14. T. Jahnke, *Zur Authentizität von Mathematikaufgaben*. Universitätsbibliothek Dortmund, (2013).
 15. R. T. Kelly, J. G. Knowles, *A conceptual framework for integrated STEM education*, Int. J. STEM Educ. 3, (2016) 11.
 16. J. Kepler, *Harmonice mundi* (1619). Reprinted in: Caspar, M. (Hrsg.), *Gesammelte Werke*, Band 1, Mysterium Cosmographicum, 405 (1995).
 17. E. Krause, *Das EJASE-Modell: Einstein als Ausgangspunkt physikdidaktischer Forschungsfragen – Anregungen aus einem Modell zur Natur der Naturwissenschaft*, Physik und Didaktik in Schule und Hochschule (PhyDidA) 1/16 (2017), 57.
 18. O. Krey, *Zur Rolle der Mathematik in der Physik: Wissenschaftstheoretische Aspekte und Vorstellungen Physiklernender*, Dissertation, Universität Potsdam (2012), 163–208.
 19. W. Kuhn, *Das Wechselspiel von Theorie und Experiment im physikalischen Erkenntnisprozess*. In: Praxis der Naturwissenschaften – Physik 12 (1983), 355–362.
 20. P. Labudde, *Fächerübergreifender naturwissenschaftlicher Unterricht – Mythen, Definitionen, Fakten*, Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften 20(1) (2014), 11.
 21. P. Labudde, *Naturwissenschaften vernetzen – Horizonte erweitern: Fächerübergreifender Unterricht konkret* (1. Aufl.), Klett/Kallmeyer, Seelze-Velber (2008).

22. M. LaForce, E. Noble, H. King, J. Century, C. Blackwell, S. Holt, A. Ibrahim, S. Loo, *The eight essential elements of inclusive STEM high schools*, Int. J. STEM Educ. 3, (2016) 21.
23. C. Michelsen, *Expanding context and domain: a cross-curricular activity in mathematics and physics*, ZDM 30 (1998), 100–106.
24. I. Militschenko, and S. Kraus *Entwicklungslinien der Mathematisierung der Physik – die Rolle der Deduktion in der experimentellen Methode*, Der Mathematikunterricht 63(5), Friedrich Verlag, Seelze (2017), 21–29.
25. F. Möbius, *Der barycentrische Calcul*, Barth, Leipzig (1827).
26. K. Moegling, *Kompetenzaufbau im fächerübergreifenden Unterricht: Förderung vernetzten Denkens und komplexen Handelns*, vol. 2, Prolog-Verlag, Immenhausen bei Kassel (2010).
27. C. S. Peirce, *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, Harvard University Press, Cambridge (1985).
28. G. Pospiech and R. Karam *Mathematik im Physikunterricht*. In: Naturwissenschaften im Unterricht – Physik 153, no. 154 (2016), 27.
29. C. Schier and E. Schwinger *Pädagogik, Interdisziplinarität und Transdisziplinarität als Herausforderung akademischer Bildung: Innovative Konzepte für die Lehre an Hochschulen und Universitäten*, De Gruyter, Bielefeld, Berlin (2014).
30. K. Schimony, *Kulturgeschichte der Physik*, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt (1990).
31. S. Schlicht, *Zur Entwicklung des Mengen- und Zahlenbegriffs*, Springer, Heidelberg (2016).
32. A. H. Schoenfeld, *Mathematical problem solving*, Academic Press, Orlando (1985).
33. A. H. Schoenfeld, *How We Think: A Theory of Goal-Oriented Decision Making and Its Educational Applications*, Routledge, New York (2011).
34. H. Struve, *Grundlagen einer Geometriedidaktik*, BI, Mannheim (1990).
35. I. Witzke, *Die Entwicklung des Leibnizschen Calculus: Eine Fallstudie zur Theorieentwicklung in der Mathematik*, Franzbecker, Hildesheim (2009).
36. I. Witzke, *Zur Problematik der empirisch gegenständlichen Analysis des Mathematikunterrichtes*, Der Mathematikunterricht 60, no. 2 (2014): 19–32.
37. I. Witzke and Spies, S. *Domain-specific beliefs of school calculus*, J. Math. Didaktik 37(1) (2016), 131–161.
38. H. Winter, *Mathematikunterricht und Allgemeinbildung*. Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 4, no. 2 (1996): 35–41.