



FOUR BASIC TRIANGLE CENTERS AND LOCI

SALEHI, SAEED¹

¹ University of Tabriz, Tabriz, Iran.
root@SaeedSalehi.ir

Abstract. Although various and interesting proofs have been presented for the concurrency of altitudes and medians of a triangle, in this paper we prove these two theorems by using the concept of geometric loci, by first showing that each altitude and each median of a triangle is a locus of some interesting points in the plane or inside the triangle, and then by using this, we give a proof of the concurrence of the three altitudes and the three medians. In the same way, we present proofs for the theorems of Carnot and Ceva.

2020 Mathematics Subject Classification. 51M04

Keywords. Concurrency, Locus, Altitude, Median, Carnot's and Ceva's Theorems.

Date: Received 01-07-2024 Revised 01-09-2024 Accepted 16-09-2024 Available Online 20-12-2025

©Ferdowsi University of Mashhad.



چهار مرکز اصلی مثلث و مکان‌های هندسی

سعید صالحی پور مهر

دانشگاه تبریز

root@SaeedSalehi.ir

چکیده. با اینکه اثبات‌های گوناگون و جالبی برای قضایای هم‌مرسی ارتفاع‌ها و میانه‌های مثلث وجود دارند، ولی به نظر نمی‌رسد که برهان‌هایی مبتنی بر مکان‌های هندسی برای این قضایا قبلاً ارائه شده باشند. در این مقاله، ما این دو قضیه را با استفاده از مکان‌های هندسی ثابت می‌کنیم بدین صورت که نخست نشان می‌دهیم هر ارتفاع و هر میانه مثلث یک مکان هندسی از نقاطی جالب در صفحه یا درون مثلث هست و سپس با استفاده از این مطلب، برهانی بر هم‌مرسی سه ارتفاع و سه میانه می‌آوریم. با همین روش، برهان‌هایی برای قضیه‌های کارنو و سوا ارائه می‌دهیم.

۱. پیش‌گفتار

سه خط را هم‌مرس نامیم، هرگاه در یک نقطه به هم برسند؛ نقطه اشتراک این سه خط را نقطه هم‌مرسی آنها می‌نامیم. (واژه‌ی «هم‌مرس» حاکی از این است که خط‌ها به هم‌دیگر می‌رسند؛ گاهی این را به اشتباه «هم‌رأس» می‌گویند.) از زیباترین و اعجاب‌انگیزترین قضایای هندسه، هم‌مرس بودن برخی خطوط خاص مثلث هستند — همانند نیم‌سازهای داخلی زوایا، عمودمنصف‌های اضلاع، ارتفاع‌ها و میانه‌ها. قضایای هم‌مرسی هر یک از این چهار دسته از خطوط، در صفحات ۵۶ الی ۵۹ کتاب هندسه سال اول دبیرستان نظام قدیم

2020 Mathematics Subject Classification. 51M04

واژگان کلیدی. هم‌مرسی، مکان هندسی، ارتفاع، میانه، قضیه کارنو، قضیه سوا.
تاریخ: دریافت ۱۴۰۳/۰۴/۱۱ بازنگری ۱۴۰۳/۰۶/۱۱ پذیرش ۱۴۰۳/۰۶/۲۶ انتشار برخط ۱۴۰۴/۰۹/۲۹
نحوه ارجاع به این مقاله: س. صالحی پور مهر، چهار مرکز اصلی مثلث و مکان‌های هندسی، به سوی علوم ریاضی، ۵ (۱۴۰۴)، شماره ۱، ۹-۱.

©دانشگاه فردوسی مشهد.

این مقاله، نسخه‌ای است ویژه‌ی خوانندگان ایرانی که بر مبنای یک مقاله‌ی انگلیسی نویسنده [6] تهیه شده است. همانند مقاله اصلی، این نوشته تقدیم می‌گردد به مرحوم آقای بهروز مشکین‌قلم (خرداد۱۳۲۳ — بهمن۱۳۹۱) دبیر ریاضی دبیرستان‌های تبریز.

دهه شصت خورشیدی اثبات شده بودند. در حقیقت، هم‌رس بودن نیمسازهای داخلی هر مثلث در قضیه ۴ مقاله ۴ کتاب اصول/قلیدس (صفحه ۸۸ مرجع [۲]) و هم‌رس بودن عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث در قضیه ۵ مقاله ۴ همان کتاب (صفحه ۸۹ مرجع [۲]) آمده بودند. با اینکه دو قضیه دیگر - هم‌رسی ارتفاع‌ها و میانه‌ها - در کتاب اصول/قلیدس پدیدار نگشته‌اند، گویا یونانیان باستان، از جمله ارشمیدس، از این قضایا آگاه بوده‌اند.

دو قضیه نخست معمولاً توسط مکان‌های هندسی ثابت می‌شوند: هر نیمساز داخلی، مکان هندسی همه نقاط داخل مثلث هست که از دو ضلع آن زاویه فاصله برابر دارند؛ و عمودمنصف هر ضلع، مکان هندسی نقاطی از صفحه هست که از دو رأس آن ضلع فاصله برابر دارند. پس، نقطه هم‌رسی نیمسازهای داخلی مثلث تنها نقطه‌ای در درون مثلث است که فاصله‌های برابر از سه ضلع دارد و مرکز دایره محاطی داخلی، یا به اختصار مرکز داخلی (*incenter*)، آن مثلث نام دارد. همچنین، نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث، یگانه نقطه در صفحه است که از سه رأس مثلث به یک فاصله می‌باشد؛ این نقطه مرکز دایره محیطی، یا به طور مختصر مرکز محیطی (*circumcenter*)، آن مثلث نامیده می‌شود.

با اینکه اثبات‌های گوناگون و جالبی برای قضایای هم‌رسی ارتفاع‌ها و میانه‌های مثلث وجود دارند، ولی به نظر می‌رسد که تاکنون هیچ اثباتی برای این قضایا با استفاده از مکان‌های هندسی ارائه نشده‌اند.^۱ در این مقاله، ما این دو قضیه را با استفاده از مکان‌های هندسی ثابت می‌کنیم بدین صورت که نخست نشان می‌دهیم هر ارتفاع و هر میانه مثلث یک مکان هندسی از نقاطی جالب در صفحه یا درون مثلث هست، و سپس با استفاده از این مطلب، برهانی بر هم‌رسی سه ارتفاع و سه میانه می‌آوریم.

۲. ارتفاع‌ها و قضیه کارنو

برای دو نقطه متمایز P و Q در صفحه، پاره‌خط بین این دو نقطه را با نماد $\overline{PQ}$ ، طول این پاره‌خط را با عبارت $|PQ|$ ، و خط (از دو طرف بی‌نهایت) شامل این دو نقطه را با $\overleftrightarrow{PQ}$ نمایش می‌دهیم.

لم ۱۰۲ (تفاضل مربعات فواصل نقاط یکتاست). اگر دو نقطه P و Q روی $\overleftrightarrow{BC}$ چنان واقع باشند که تفاضل مربعات فواصل آنها از B و C برابر باشند، یعنی $|BQ|^2 - |CQ|^2 = |BP|^2 - |CP|^2$ ، آنگاه $P = Q$.

برهان. طبق فرض، B و C متمایزند و داریم

$$|BP|^2 - |CP|^2 = |BQ|^2 - |CQ|^2. \quad (۱۰۲)$$

چندین حالت را بسته به موقعیت‌های P و Q نسبت به B و C در نظر می‌گیریم:

(الف) هر دو نقطه P و Q در خارج پاره‌خط $\overline{BC}$ و در یک طرف آن روی $\overleftrightarrow{BC}$ قرار داشته باشند، مثلاً نقطه C درون پاره‌خط‌های $\overline{BP}$ و $\overline{BQ}$ باشد. از تساوی‌های $|BP| = |BC| + |CP|$ و $|BQ| = |BC| + |CQ|$ داریم $|BQ| - |CQ| = |BP| - |CP|$ و با بکار بردن اتحاد مزدوج در تساوی (۱۰۲) به دست می‌آوریم:

^۱شاهدی بر این ادعا می‌تواند مقاله جالب [4] باشد که دوازده برهان برای هم‌رسی ارتفاع‌های یک مثلث را فهرست کرده در حالیکه هیچ کدام، از مکان‌های هندسی بهره نبرده‌اند. شایان توجه است که برهان نخست آن مقاله از گاوس، برهان دوم از نیوتن، و برهان سوم از ابوسهیل کوهی دانشمند ایرانی سده چهارم هجری است. در مورد هم‌رسی میانه‌های یک مثلث نیز وضع به همین منوال است، مثلاً مقاله [5] یک برهان جدید برای این قضیه ارائه می‌کند بدون استفاده از مکان‌های هندسی. طبق نظر داور محترم، جای تأمل است که چرا برهان‌های نتیجه‌های ۳.۲ و ۳.۳ قبلاً جایی منتشر نشده‌اند و می‌توانند جدید محسوب شوند در حالیکه قضایای ۲.۲ و ۲.۳ از دیرباز شناخته شده هستند. قابل ذکر است برهان‌های گزاره‌های ۵.۲ و ۵.۳ (قضایای کارنو و سوا) که از مفهوم مکان هندسی سود می‌جویند تفاوت زیادی با اثبات‌های کلاسیک ندارند.

$|BP| + |CP| = |BQ| + |CQ|$. اگر طرفین دو تساوی فوق را یکبار جمع و یکبار تفریق کنیم، نتیجه می‌گیریم

که $|BP| = |BQ|$ و $|CP| = |CQ|$. بنابراین، $P = Q$.

(ب) یکی از نقاط P و Q خارج از $\overline{BC}$ و دیگری در درون آن قرار داشته باشد، مثلاً C درون $\overline{BP}$ باشد و Q درون $\overline{BC}$.

داریم $|BP| = |CP| + |BC|$ و $|BQ| = |BC| - |CQ|$ ، پس مقدار $|BP|^2 - |CP|^2$ بزرگتر از $|BC|^2$

است، ولی مقدار $|BQ|^2 - |CQ|^2$ کوچکتر از $|BC|^2$ است؛ در نتیجه با هم برابر نیستند. بنابراین، در این حالت،

تساوی (۱.۲) امکان ندارد.

(ج) هر دو نقطه P و Q درون پاره‌خط $\overline{BC}$ باشند. از $|BP| + |CP| = |BQ| + |CQ| (= |BC|)$ و بکار بردن

اتحاد مزدوج در (۱.۲)، به دست می‌آوریم $|BP| - |CP| = |BQ| - |CQ|$. مشابه حالت (الف) با جمع و تفریق

طرفین دو تساوی اخیر نتیجه می‌گیریم که $|BP| = |BQ|$ و $|CP| = |CQ|$. پس داریم $P = Q$.

(د) هر دو نقطه P و Q در خارج از پاره‌خط $\overline{BC}$ و دو طرف آن، در جهات مختلف، قرار داشته باشند، مثلاً B درون

$\overline{CP}$ باشد و C درون $\overline{BQ}$. در این صورت، چون $|BP| < |CP|$ ، مقدار $|BP|^2 - |CP|^2$ منفی است، و چون

$|BQ| > |CQ|$ ، مقدار $|BQ|^2 - |CQ|^2$ مثبت است. بنابراین، (۱.۲) ناممکن است.

□

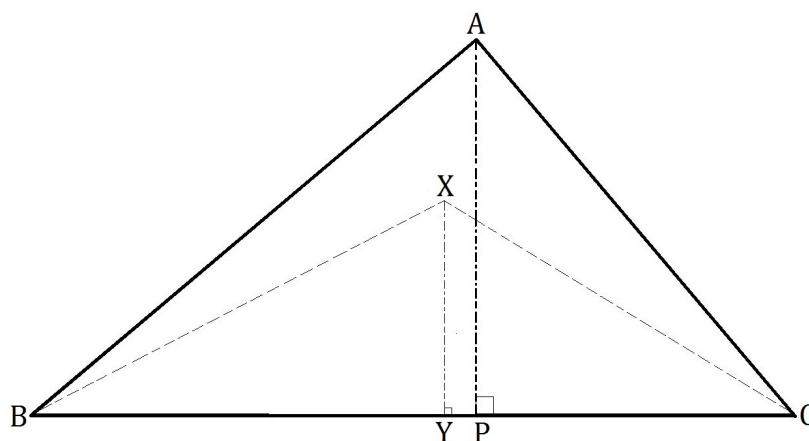
قضیه زیر تاریخی کهن دارد (برای مثال، مکان هندسی ۱۲ در صفحات ۱۹ و ۲۰ مرجع [۱] را ببینید).

قضیه ۲.۲ (هر ارتفاع، یک مکان هندسی است). در مثلث ABC ، هرگاه $\overline{AP}$ ارتفاع وارده از A باشد، آنگاه $\overleftrightarrow{AP}$ مکان هندسی

همه نقاط X در صفحه است که تفاضل مربعات فواصل نقطه X از رئوس B و C برابر مقدار ثابت تفاضل مربعات فواصل نقطه

A از B و C باشد؛ یعنی

$$|XB|^2 - |XC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2.$$



شکل ۱: هر ارتفاع، یک مکان هندسی است

برهان. طبق قضیه فیثاغورس، در دو مثلث قائم ABP و APC شکل ۱ تساوی‌های زیر برقرارند:

$$|AB|^2 = |BP|^2 + |AP|^2 \text{ و } |AC|^2 = |PC|^2 + |AP|^2$$

با تفاضل طرفین این دو تساوی به دست می‌آوریم:

$$|AB|^2 - |AC|^2 = |BP|^2 - |PC|^2. \quad (۲.۲)$$

(الف) اگر نقطه X روی $\overleftrightarrow{AP}$ قرار داشته باشد، آنگاه مشابهاً، $|XB|^2 - |XC|^2 = |BP|^2 - |PC|^2$ برقرار است. بنابراین، از دو تساوی اخیر به حکم مطلوب می‌رسیم:

$$|XB|^2 - |XC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2 \quad (۳.۲)$$

(ب) حال فرض کنید، برعکس، تساوی بالا (۳.۲) برای یک نقطه از X در صفحه مثلث ABC برقرار باشد. از نقطه X عمودی بر $\overleftrightarrow{BC}$ رسم می‌کنیم تا آنرا در Y قطع کند. بنابر آنچه که در ابتدای برهان گفته شد، خواهیم داشت:

$$|XB|^2 - |XC|^2 = |BY|^2 - |YC|^2 \quad (۴.۲)$$

بالاخره از تساوی‌های (۲.۲) و (۳.۲) و (۴.۲) به دست می‌آوریم:

$$|BY|^2 - |YC|^2 = |BP|^2 - |PC|^2.$$

حال، از لم ۱.۲ نتیجه می‌شود که $Y = P$. بنابراین نقطه X روی $\overleftrightarrow{AP}$ قرار دارد.

□

نتیجه ۳.۲ (همرسی ارتفاع‌ها). سه ارتفاع هر مثلث هم‌مس هستند.

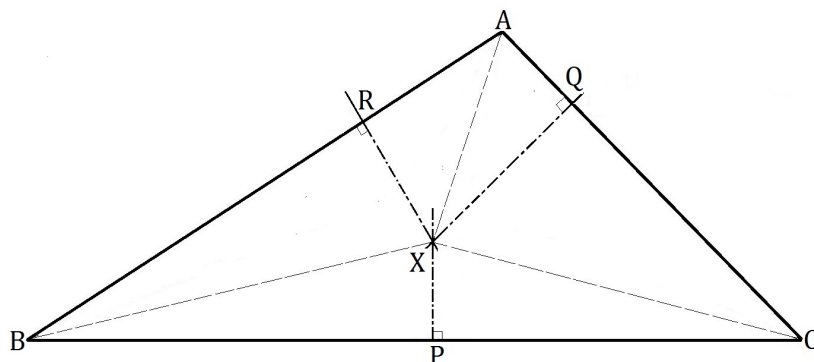
برهان. اگر $\mathbb{H}$ محل تلاقی ارتفاع‌های وارده از رئوس B و C باشد (چون معلوم خواهد شد که این نقطه مهمی است آنرا با قلمی متفاوت نمایش دادیم)، آنگاه طبق قضیه ۲.۲، چون $\mathbb{H}$ روی ارتفاع وارده از B قرار دارد، تساوی زیر برقرار است: $|\mathbb{H}A|^2 - |\mathbb{H}B|^2 = |\mathbb{H}C|^2 - |\mathbb{H}A|^2$ و چون $\mathbb{H}$ بر روی ارتفاع وارده از رأس C هم قرار دارد، مشابهاً داریم $|\mathbb{H}B|^2 - |\mathbb{H}C|^2 = |AB|^2 - |AC|^2$ از جمع دو تساوی بالا، $|\mathbb{H}B|^2 - |\mathbb{H}C|^2 = |AB|^2 - |AC|^2$ نتیجه می‌شود. بنابراین، باز هم طبق قضیه ۲.۲، $\mathbb{H}$ روی ارتفاع وارده از رأس A قرار دارد. پس سه ارتفاع مثلث در نقطه $\mathbb{H}$ هم‌مس هستند. □

نقطه هم‌رسی سه ارتفاع مثلث را معمولاً مرکز تعامد یا مرکز ارتفاعی (*orthocenter*) آن مثلث می‌نامند. پیش از اثبات هم‌رسی میانه‌های مثلث، قضیه کارنو را، که به افتخار لازار کارنو (۱۸۲۳–۱۷۵۳ م) ریاضیدان فرانسوی نام‌گذاری شده، بیان و آنرا هم با استفاده از مکان‌های هندسی ثابت می‌کنیم (قضیه ۳ بخش ۲ در صفحات ۳۷ و ۱۲۹ مرجع [۲]).

لم ۴.۲ (هر خط عمود، یک مکان هندسی است). اگر P نقطه‌ای روی خط $\overleftrightarrow{BC}$ باشد، آنگاه خط عمود بر $\overleftrightarrow{BC}$ از نقطه P ، مکان هندسی نقاط X از صفحه است که $|XB|^2 - |XC|^2 = |BP|^2 - |CP|^2$.

برهان. در قضیه ۲.۲ ثابت کردیم که تساوی زیر برای هر نقطه X روی خط عمود بر $\overleftrightarrow{BC}$ که از P بگذرد برقرار است: $|XB|^2 - |XC|^2 = |BP|^2 - |CP|^2$. حال، برعکس، اگر تساوی بالا برای یک نقطه X در صفحه برقرار باشد، از X عمودی بر $\overleftrightarrow{BC}$ رسم می‌کنیم تا آنرا در Y قطع کند. داریم $|XB|^2 - |XC|^2 = |BY|^2 - |CY|^2$. در نتیجه، $|BY|^2 - |CY|^2 = |BP|^2 - |CP|^2$. از لم ۱.۲ نتیجه می‌گیریم که $Y = P$. بنابراین، X روی خطی است که از P می‌گذرد و بر $\overleftrightarrow{BC}$ عمود است. □

گزاره ۵.۲ (قضیه کارنو). در صفحه مثلث ABC ، نقاط P ، Q و R را به ترتیب روی $\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ در نظر می‌گیریم. خطوط عمود از این نقاط بر روی اضلاع متناظر هم‌رس هستند اگر و تنها اگر

$$(|AQ|^2 - |QC|^2) + (|CP|^2 - |PB|^2) + (|BR|^2 - |RA|^2) = 0.$$


شکل ۲: قضیه کارنو

برهان. اگر X محل تلاقی عمودهای وارد بر $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ از نقاط R و Q باشد (شکل ۲ را ببینید)، آنگاه طبق لم ۴.۲ داریم: $|XA|^2 - |XC|^2 = |QA|^2 - |QC|^2$ و $|XB|^2 - |XA|^2 = |RB|^2 - |RA|^2$. با جمع این دو تساوی به دست می‌آوریم: $|XB|^2 - |XC|^2 = (|AQ|^2 - |QC|^2) + (|BR|^2 - |RA|^2)$. حال، بنا بر لم ۴.۲، نقطه X روی خط عمود بر $\overrightarrow{BC}$ رسم شده از نقطه P قرار دارد اگر و تنها اگر

$$|XB|^2 - |XC|^2 = |PB|^2 - |PC|^2 \text{ اگر و تنها اگر}$$

$$|BP|^2 - |PC|^2 = (|AQ|^2 - |QC|^2) + (|BR|^2 - |RA|^2)$$

$$(|AQ|^2 - |QC|^2) + (|CP|^2 - |PB|^2) + (|BR|^2 - |RA|^2) = 0$$

□

یعنی، سه عمود هم‌رس هستند اگر و تنها اگر تساوی بالا برقرار باشد.

۳. میانه‌ها و قضیه سوا

در ادامه، به هم‌رسی میانه‌ها و نیز اثبات قضیه سوا توسط مکان‌های هندسی می‌پردازیم. مساحت مثلث PQR را با نماد S_{PQR} نمایش می‌دهیم.

لم ۱.۳ (نسبت مساحت‌های مثلث‌ها). اگر نقطه P روی ضلع $\overrightarrow{BC}$ در مثلث ABC و نقطه‌ای روی پاره خط $\overrightarrow{AP}$ باشد، آنگاه

$$\frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} = \frac{|BP|}{|PC|}$$

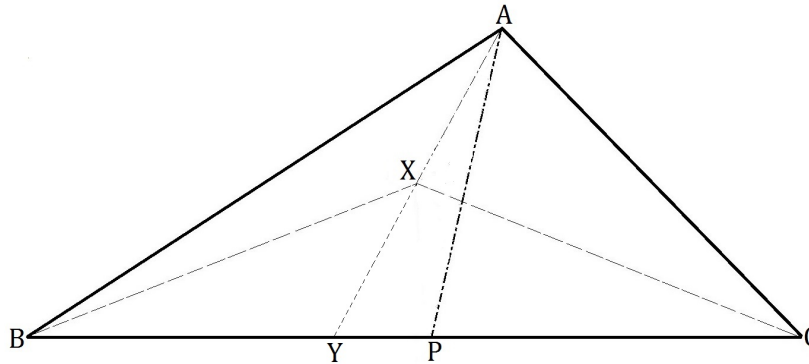
برهان. از آنجا که دو مثلث ABP و APC دارای رأس مشترک و قاعده‌های هم‌خط هستند، رابطه $\frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{|BP|}{|PC|}$ برقرار است؛ مشابهاً داریم $\frac{S_{XBP}}{S_{XPC}} = \frac{|BP|}{|PC|}$. حال، از قانون تفاضل صورت‌ها بر تفاضل مخرجها (قضیه ۱۹ مقاله ۵ کتاب اصول اقلیدس در

□

$$\frac{|BP|}{|PC|} = \frac{S_{ABP} - S_{XBP}}{S_{APC} - S_{XPC}} = \frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} \text{ داریم [۳] را ببینید}$$

قضیه زیر از دوران باستان شناخته شده است (تمرین‌های ۶۸ و ۶۹ صفحه ۳۵ مرجع [۱] را ببینید).

قضیه ۲.۳ (هر میانه، یک مکان هندسی است). میانه $\overline{AM}$ در مثلث ABC ، مکان هندسی نقاط X داخل این مثلث است که مثلث‌های XAB و XAC مساحت‌های برابر دارند، یعنی $S_{AXB} = S_{AXC}$ (شکل ۳ را ببینید، با فرض $P = M$).



شکل ۳: هر میانه، یک مکان هندسی است

برهان. (الف) اگر X روی میانه $\overline{AM}$ باشد، طبق لم ۱.۳ داریم: $\frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} = \frac{|BM|}{|MC|}$ ، پس $S_{AXB} = S_{AXC}$.
 (ب) برعکس، اگر برای نقطه X درون مثلث، رابطه بالا برقرار باشد، یعنی $S_{AXB} = S_{AXC}$ ، خط $\overrightarrow{AX}$ را امتداد می‌دهیم تا ضلع $\overline{BC}$ را در Y قطع کند (شکل ۳). دوباره از لم ۱.۳ خواهیم داشت: $\frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} = \frac{|BY|}{|YC|}$ ، پس $|BY| = |YC|$ ، بنابراین $Y = M$. در نتیجه، X روی میانه $\overline{AM}$ است.

□

نتیجه ۳.۳ (همرسی میانه‌ها). سه میانه هر مثلث هم‌رس هستند.

برهان. اگر میانه‌های رسم شده از B و C یکدیگر را در نقطه G قطع کنند، آنگاه طبق قضیه ۲.۳، چون G روی میانه رسم شده از B هست، داریم $S_{BGA} = S_{BGC}$ و چون روی میانه رسم شده از C هم هست، پس $S_{CGA} = S_{CGB}$. بنابراین، $S_{AGB} = S_{AGC}$ و باز هم از قضیه ۲.۳ نتیجه می‌شود که G روی میانه رسم شده از A نیز قرار دارد. پس، سه میانه در نقطه G هم‌رس هستند.

□

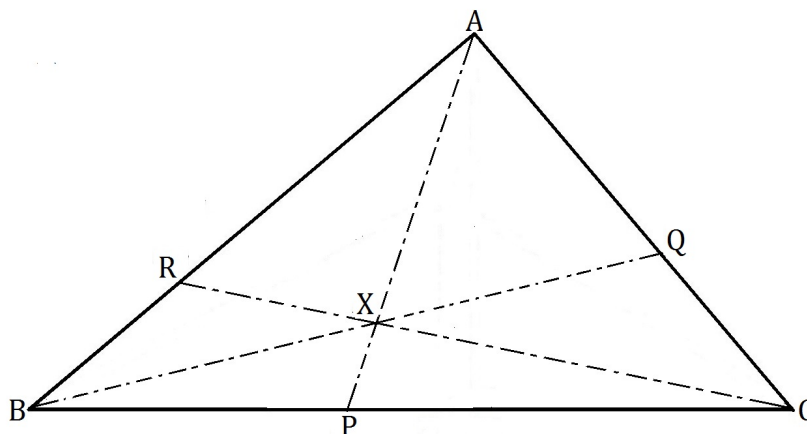
نقطه هم‌رسی سه میانه یک مثلث (به دلیلی که با کمی تأمل در مورد جسم فیزیکی همگنی که شکل مثلث دارد، معلوم می‌شود) به مرکز ثقل هندسی یا به طور مختصر مرکز ثقل (*centroid*) آن مثلث معروف است. حالا، قضیه سوا را، که به افتخار جیووانی سوا (۱۷۳۴–۱۶۴۷م) ریاضیدان ایتالیایی نام‌گذاری شده، بیان و آنرا با استفاده از مکان‌های هندسی ثابت می‌کنیم (مسأله ۴۴ بخش ۲ در صفحات ۴۳ و ۱۳۶ مرجع [۲] را ببینید). منظور از پاره‌خط سوا، هر پاره‌خطی است که یک رأس مثلث را به یک نقطه درون ضلع مقابل آن وصل می‌کند (مانند میانه یا نیمساز داخلی).

لم ۴.۳ (هر پاره‌خط سوا، یک مکان هندسی است). در مثلث ABC ، اگر P نقطه‌ای روی ضلع $\overline{BC}$ باشد، آنگاه پاره‌خط سوا $\overline{AP}$ مکان هندسی نقاط X درون مثلث است که $\frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} = \frac{|BP|}{|PC|}$.

برهان. نیمی از این مطلب در لم ۱.۳ ثابت شده است: اگر X روی $\overline{AP}$ قرار داشته باشد، آنگاه $\frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} = \frac{|BP|}{|PC|}$. برعکس، نشان می‌دهیم که اگر رابطه $\frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} = \frac{|BP|}{|PC|}$ برای نقطه X درون مثلث ABC برقرار باشد، آنگاه نقطه X روی $\overline{AP}$ قرار دارد (شکل بالا).

را ببینید). خط $\overrightarrow{AX}$ را امتداد دهید تا $\overline{BC}$ را در Y قطع کند. از لم ۱.۳ داریم $\frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} = \frac{|BY|}{|YC|}$ ، در نتیجه $\frac{|BP|}{|PC|} = \frac{|BY|}{|YC|}$. حال، از این رابطه و تساوی $|BP| + |PC| = |BY| + |YC| (= |BC|)$ نتیجه می‌شود که $|BP| = |BY|$ و $|PC| = |YC|$ ، $|BP| = |BY|$ ، پس داریم $P = Y$. بنابراین، X روی $\overline{AP}$ قرار دارد. □

گزاره ۵.۳ (قضیه سوا). در مثلث ABC ، سه پاره‌خط سوایی $\overline{AP}$ و $\overline{BQ}$ و $\overline{CR}$ هم‌رس هستند اگر و تنها اگر $\frac{|AQ|}{|QC|} \cdot \frac{|CP|}{|PB|} \cdot \frac{|BR|}{|RA|} = 1$.



شکل ۴: قضیه سوا

برهان. فرض کنید $\overline{BQ}$ و $\overline{CR}$ همدیگر را در X قطع می‌کنند (شکل ۴). با دو بار استفاده از لم ۱.۳، داریم $\frac{S_{BXA}}{S_{BXC}} = \frac{|AQ|}{|QC|}$ و $\frac{S_{CXB}}{S_{CXA}} = \frac{|BR|}{|RA|}$. با ضرب طرفین این دو تساوی به دست می‌آوریم: $\frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} = \frac{|AQ|}{|QC|} \cdot \frac{|BR|}{|RA|}$. حال، بنا بر لم ۴.۳، نقطه X روی $\overline{AP}$ قرار دارد اگر و تنها اگر $\frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} = \frac{|BP|}{|PC|}$ ، اگر و تنها اگر $\frac{|AQ|}{|QC|} \cdot \frac{|BR|}{|RA|} = \frac{|BP|}{|PC|}$. در نتیجه، $\overline{AP}$ و $\overline{BQ}$ و $\overline{CR}$ هم‌رسند اگر و تنها اگر $\frac{|AQ|}{|QC|} \cdot \frac{|CP|}{|PB|} \cdot \frac{|BR|}{|RA|} = 1$. □

۴. جمع‌بندی

در پایان، تلاشی مختصر برای یک جمع‌بندی از چهار مرکز اصلی مثلث توسط مکان‌های هندسی را خواهیم داشت. عبارت «چهار مرکز اصلی مثلث» در عنوان این مقاله، به تبعیت از چهار عمل اصلی در ریاضیات (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) و چهار نیروی اصلی در فیزیک (گرانش، الکترومغناطیس، اتمی ضعیف و اتمی قوی) آورده شده، و اصطلاحی استاندارد در متون علمی نیست. برای یکسان‌سازی مکان‌های هندسی، توابعی به صورت $\varphi(\overline{PQ}, X)$ را بررسی می‌کنیم که مقداری را برای نقطه X نسبت به پاره‌خط $\overline{PQ}$ یا خط $\overrightarrow{PQ}$ (با فرض $P \neq Q$) معین می‌کنند.

(۱) اولین تابع به صورت $d(\overline{PQ}, X)$ می‌باشد که برابر است با فاصله نقطه X از خط $\overrightarrow{PQ}$. نقطه X درون مثلث ABC ، روی نیمساز داخلی زاویه $\angle A$ قرار دارد اگر و تنها اگر $d(\overline{AB}, X) = d(\overline{AC}, X)$. پس، مرکز داخلی مثلث ABC ، تنها نقطه I درون آن است که $d(\overline{AB}, I) = d(\overline{BC}, I) = d(\overline{CA}, I)$.

از $\frac{|BP|}{|PC|} = \frac{|BY|}{|YC|}$ داریم $\frac{|BP|}{|PC|} + 1 = \frac{|BY|}{|YC|} + 1$ ، پس $\frac{|BC|}{|PC|} = \frac{|BC|}{|YC|}$ ، بنابراین $|PC| = |YC|$. از اینجا هم نتیجه می‌گیریم که $|BC| - |PC| = |BC| - |YC|$ ، بنابراین $|BP| = |BY|$.

(۲) دومین تابع را به این صورت در نظر می‌گیریم: $f(\overline{PQ}, X) = |PX|^2 + |QX|^2$. نقطه X در صفحه، روی عمودمنصف ضلع $\overline{BC}$ قرار دارد اگر و تنها اگر $f(\overline{AB}, X) = f(\overline{AC}, X)$ ، که معادل است با تساوی $|BX| = |CX|$. پس، مرکز محیطی مثلث ABC ، یگانه نقطه $\mathbb{O}$ در صفحه است که برای آن داریم: $f(\overline{AB}, \mathbb{O}) = f(\overline{BC}, \mathbb{O}) = f(\overline{CA}, \mathbb{O})$.

(۳) سومین تابع: $h(\overline{PQ}, X) = |PX|^2 + |QX|^2 - |PQ|^2$. توجه می‌کنیم که تساوی زیر برقرار است: $h(\overline{PQ}, X) = f(\overline{PQ}, X) - |PQ|^2$. نقطه X در صفحه مثلث ABC ، روی خط ارتفاع وارده از رأس A قرار دارد اگر و تنها اگر داشته باشیم $h(\overline{AB}, X) = h(\overline{AC}, X)$. توجه داریم که این تساوی، معادل رابطه زیر است (رجوع کنید به قضیه ۲.۲): $|BX|^2 - |CX|^2 = |AB|^2 - |AC|^2$. پس مرکز ارتفاعی مثلث ABC ، تنها نقطه $\mathbb{H}$ در صفحه است که $h(\overline{AB}, \mathbb{H}) = h(\overline{BC}, \mathbb{H}) = h(\overline{CA}, \mathbb{H})$.

(۴) چهارمین تابع برابر است با $g(\overline{PQ}, X) = S_{PQX}$ ، یعنی مساحت مثلث PQX . توجه داریم که تساوی $g(\overline{PQ}, X) = d(\overline{PQ}, X) \cdot \frac{1}{2} |PQ|$ برقرار است. نقطه X درون مثلث ABC ، بر روی میانه وارده از رأس A قرار دارد اگر و تنها اگر $g(\overline{AB}, X) = g(\overline{AC}, X)$. پس، مرکز ثقل مثلث ABC ، تنها نقطه $\mathbb{G}$ درون آن است که $g(\overline{AB}, \mathbb{G}) = g(\overline{BC}, \mathbb{G}) = g(\overline{CA}, \mathbb{G})$.

تشکر و قدردانی. مراتب سپاس‌گزاری عمیق خود را به جناب آقای دکتر کاوه لاجوردی به خاطر ویرایش متن و توصیه‌های بسیار مؤثرشان در بهبود این مقاله تقدیم می‌نمایم.

مراجع

۱. آلتشیلر-کورت، ناتان، هندسه مسطحه: مقدمه‌ای بر هندسه نوین مثلث و دایره، ترجمه محمود دیانی، انتشارات فاطمی، ۱۳۷۶
۲. شاریگین، ایگور فنودوروویچ، مسأله‌هایی در هندسه مسطحه، ترجمه ارشک حمیدی، انتشارات مبتکران، ۱۳۷۵
۳. هیث، تامس لیتل، اصول اقلیدس: سیزده مقاله، ترجمه محمدهادی شفیعیها، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۷.
4. H. Mowaffaq and H. Martini, *Concurrency of the Altitudes of a triangle*, Math. Semesterber. **60** (2013) no. 2, 249–260.
5. H., Mowaffaq and P. Walker, *Why Must the Triangle's Medians Be Concurrent?*, Math. Gaz. **85** (2001) no. 504, 482–483.
6. S., Salehi, *Proving concurrency by loci*, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. **56** (2025) no. 4, 800–808.