



ON THE BIVARIATE SYMMETRIC POLYNOMIALS AND THEIR APPLICATION

ZEINAB SAEIDIAN^{1*} AND REZA KAHKESHANI ²

^{1,2}Department of Mathematics, University of Kashan, Kashan, Iran.

saeidian@kashanu.ac.ir

kahkeshanireza@kashanu.ac.ir

Abstract. In this paper, we first introduce and investigate the symmetric polynomials and then, the features and underlying theorems are expressed.

In addition, we discuss applications of these polynomials in solving equations, systems of equations, inequalities, inverse equations, and divisibility.

The main objective of this research is to explain the prominent role of bivariate symmetric polynomials in different fields and provide practical examples to understand these issues better.

2020 Mathematics Subject Classification. 47A55, 39B52, 34K20, 39B82

Keywords. Symmetric polynomial, System of equations, Inverse equation, Divisibility

Date: Received 26-05-2025 Revised 07-11-2025 Accepted 23-11-2025 Available Online 20-12-2025

©Ferdowsi University of Mashhad.



درباره چندجمله‌ای‌های متقارن دومتغیره و کاربرد آنها

رضا کهکشانی^۱ و زینب سعیدیان^{۲*}

^{۱,۲} دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان

kahkeshanireza@kashanu.ac.ir

saeidian@kashanu.ac.ir

چکیده. در این مقاله، ابتدا به معرفی و بررسی چندجمله‌ای‌های متقارن دومتغیره پرداخته و سپس، ویژگی‌ها و قضیه بنیادین مربوطه بیان می‌شوند. علاوه بر این، کاربردهایی از این چندجمله‌ای‌ها را در حل معادلات، دستگاه‌های معادلات، نامساوی‌ها، معادلات معکوسه و بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها مورد بحث قرار می‌دهیم. هدف اصلی این پژوهش، تبیین نقش برجسته چندجمله‌ای‌های متقارن دومتغیره در زمینه‌های مختلف و ارائه مثال‌هایی کاربردی برای درک بهتر این مفاهیم است.

2010 Mathematics Subject Classification. 47A55, 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. چندجمله‌ای متقارن، دستگاه معادلات، معادله معکوسه، بخش‌پذیری.
تاریخ: دریافت ۱۴۰۴/۰۳/۰۵ بازنگری ۱۴۰۴/۰۸/۱۶ پذیرش ۱۴۰۴/۰۹/۰۲ انتشار برخط ۱۴۰۴/۰۹/۲۹
نحوه ارجاع به این مقاله: ر. کهکشانی و ز. سعیدیان، درباره چندجمله‌ای‌های متقارن دومتغیره و کاربرد آنها، به سوی علوم ریاضی، ۵ (۱۴۰۴)، شماره ۱، ۲۳-۱۰.

©دانشگاه فردوسی مشهد.

* نویسنده مسئول

۱. مقدمه

با استفاده از مفهوم تقارن در چندجمله‌ای‌ها می‌توان به حل بسیاری از مسائل مرتبط با جبر مقدماتی مانند دستگاه‌های معادلات، معادلات گنگ و نامساوی‌ها نائل گشت. در ابتدا، صورت کلی دستگاه معادلات خطی شامل n معادله و n مجهول، یعنی دستگاه

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (1.1)$$

را در نظر می‌گیریم. در اینجا، $x_1, x_2, \dots, x_n$ مجهولات، $a_1, a_2, \dots, a_n$ ضرایب و $b_1, b_2, \dots, b_n$ جملات ثابت هستند. منظور از جواب برای چنین دستگاهی اختصاص مقادیری به متغیرها است به طوری که تمامی معادلات دستگاه به ازای آنها برقرار باشند. در این صورت، سه حالت رخ می‌دهد: (الف) دستگاه دارای بی‌نهایت جواب است، (ب) دستگاه دارای جواب یکتا است، (ج) دستگاه فاقد جواب است [۲]. مجموعه همه جواب‌های ممکن برای این دستگاه را مجموعه جواب آن می‌نامند.

ساده‌ترین روش برای حل دستگاه (۱.۱) حذف متوالی متغیرها است. در این روش، ابتدا متغیری مانند x_n را از یک معادله، مثلاً معادله نخست، به دست آورده و در دیگر معادلات قرار می‌دهیم. بدین طریق به یک دستگاه معادلات خطی با $n-1$ معادله و $n-1$ مجهول می‌رسیم. با تکرار این فرایند می‌توان به یک معادله خطی تک-متغیره دست یافت که با حل آن x_1 و سپس، با جایگزینی‌های مکرر، جواب نهایی دستگاه مشخص می‌شود. به کارگیری این روش برای دستگاه‌های غیرخطی همیشه به سادگی صورت نمی‌پذیرد و اغلب منجر به معادله‌ای از درجه بالاتر می‌شود. به عنوان نمونه، در یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی دلخواه، اگر یک معادله از درجه n و معادله دیگر از درجه m باشد، آنگاه پس از حذف یک مجهول ممکن است به معادله‌ای از درجه mn برسیم. از آنجا که بنا به قضیه آبل-روفینی [۳] هیچ جوابی برای معادلات درجه پنجم و بالاتر بر حسب رادیکال‌ها وجود ندارد، برای حل دستگاه غیرخطی داده شده باید به دنبال راه‌حلی ابتکاری باشیم.

روشی مناسب برای حل دستگاه‌های معادلات با درجه بالا، استفاده از مفهومی به نام تقارن در چندجمله‌ای‌ها است. با توجه به آنکه این روش در حالت کلی قابل اجرا نیست، اما با استفاده از آن می‌توان به حل بسیاری از دستگاه‌های معادلات و معادلات گنگ، اثبات اتحادها و نامساوی‌ها و نیز تجزیه یک عبارت پرداخت. یک مزیت مهم در این روش آن است که برخلاف روش حذفی، ما را به معادله‌ای از درجه پایین‌تر رهنمون می‌سازد. مرجع اصلی ما برای این مقاله، کتاب [۱] است.

تعریف ۱.۱. چندجمله‌ای دومتغیره $P(x, y)$ را متقارن گوییم هرگاه در این چندجمله‌ای، با تبدیل x و y به یکدیگر تغییری حاصل نشود و به عبارت دیگر، داشته باشیم $P(x, y) = P(y, x)$.

چندجمله‌ای‌های متقارن $\sigma = x + y$ و $\tau = xy$ ، که ساده‌ترین نوع چندجمله‌ای‌های متقارن دومتغیره هستند، را مقدماتی می‌نامیم. به ازای هر عدد طبیعی n ، مجموع توان‌های متشابه عبارت است از چندجمله‌ای متقارن $s_n = x^n + y^n$.

۲. قضیه بنیادین

چندجمله‌ای دومتغیره دلخواه $P(\sigma, \tau)$ از σ و τ ، که لزوماً متقارن نیست، را در نظر می‌گیریم. با نوشتن σ و τ بر حسب x و y به چندجمله‌ای متقارن $f(x, y)$ می‌رسیم. در واقع، $f(x, y) = P(x + y, xy)$. به عنوان نمونه، اگر $P(\sigma, \tau) = \sigma^2 - \sigma\tau$ ، آنگاه

$$f(x, y) = (x + y)^2 - (x + y)xy = x^2 + y^2 + 2xy - x^2y - xy^2.$$

چنان که دیده می‌شود این یک روش ساده برای به دست آوردن چندجمله‌ای‌های متقارن است. حال، یک سؤال پیش می‌آید. آیا عکس این مطلب برقرار است و می‌توان هر چندجمله‌ای متقارن را بدین روش به دست آورد؟ به طور مثال، نخستین چهار جمله دنباله $\{s_n\}_{n \geq 1}$ را می‌توان بر حسب σ و τ نوشت:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma, & s_2 &= \sigma^2 - 2\tau \\ s_3 &= \sigma^3 - 3\sigma\tau, & s_4 &= (\sigma^2 - 2\tau)^2 - 2\tau^2. \end{aligned}$$

قضیه ۱.۲ نشان می‌دهد که پاسخ این پرسش مثبت است.

قضیه ۱.۲. برای هر چندجمله‌ای متقارن دومتغیره $f(x, y)$ ، چندجمله‌ای $P(\sigma, \tau)$ وجود دارد به طوری که $f(x, y) = P(\sigma, \tau)$. به دیگر بیان، هر چندجمله‌ای متقارن $f(x, y)$ از x و y را می‌توان بر حسب σ و τ نوشت.

برهان. در ابتدا، حکم را برای مجموع توان‌های متشابه ثابت نموده و نشان می‌دهیم که s_n را می‌توان به صورت یک چندجمله‌ای بر حسب σ و τ نوشت. این امر با استقرای قوی روی n صورت می‌گیرد. حکم برای $n = 1$ واضح است چون $s_1 = x + y = \sigma$. از طرفی، تساوی

$$(x + y)(x^{n-1} + y^{n-1}) = x^n + y^n + xy(x^{n-2} + y^{n-2})$$

نتیجه می‌دهد $s_n = \sigma s_{n-1} - \tau s_{n-2}$. لذا، اگر حکم برای مقادیر طبیعی کوچک‌تر از n برقرار باشد، آنگاه حکم به ازای n نیز برقرار است.

اینک، چندجمله‌ای متقارن دومتغیره دلخواه $f(x, y)$ را در نظر می‌گیریم. از آنجا که f متقارن است، این چندجمله‌ای پس از بسط دارای دو نوع جمله می‌باشد و در واقع، f را می‌توان به صورت مجموعی از جملات $ax^k y^l$ و $bx^l y^k$ نوشت، که در آن $k > l$. چون $ax^k y^k = a\tau^k$ و $bx^k y^l + bx^l y^k = bx^l y^l (x^{k-l} + y^{k-l}) = b\tau^l s_{k-l}$ ، f را می‌توان به صورت یک چندجمله‌ای بر حسب σ ، τ و عناصر دنباله $\{s_n\}_{n \geq 1}$ بیان نمود. بنابراین، حکم نتیجه می‌شود. $\square$

تابع مولد دنباله $\{s_n\}_{n \geq 1}$ عبارت است از $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n$. از طرفی، بنا به اثبات قضیه ۱.۲، برای این دنباله رابطه بازگشتی خطی همگن مرتبه دوم

$$s_n = \sigma s_{n-1} - \tau s_{n-2} \quad (n \geq 3), \quad s_1 = \sigma, \quad s_2 = \sigma^2 - 2\tau, \quad (1.2)$$

برقرار است. با استفاده از [۴] به دست می‌آید

$$f(x) = \frac{\sigma x - 2\tau x^2}{1 - \sigma x + \tau x^2} = (\sigma x - 2\tau x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma x - \tau x^2)^n.$$

با محاسبه ضریب x^n در دو طرف تساوی و سپس ساده کردن، دستور عمومی

$$s_n = n \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^i (n-i-1)!}{i!(n-2i)!} \sigma^{n-2i} \tau^i$$

نتیجه می‌شود. برهان قضیه ۱.۲ الگوریتمی برای محاسبه هر چندجمله‌ای متقارن $f(x, y)$ بر حسب σ و τ ارائه می‌دهد. به عنوان نمونه، برای چندجمله‌ای متقارن

$$f(x, y) = x^4 - 5x^3 y^2 + 7x^3 y + 6x^2 y^2 - 5x^2 y^3 + 7xy^3 + y^4,$$

می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x^4 + y^4) - 5(x^3y^2 + x^2y^3) + 7(x^3y + xy^3) + 6x^2y^2 \\ &= s_4 - 5\tau^2 s_1 + 7\tau s_2 + 6\tau^2 \\ &= (\sigma^2 - 2\tau)^2 - 2\tau^2 - 5\tau^2\sigma + 7\tau(\sigma^2 - 2\tau) + 6\tau^2 \\ &= \sigma^4 + 3\sigma^2\tau - 5\sigma\tau^2 - 6\tau^2. \end{aligned}$$

قضیه ۲.۲ نشان می‌دهد اگر چندجمله‌ای متقارن f با هر روش دیگری، به جز روش بیان شده در اثبات قضیه ۱.۲، بر حسب σ و τ بیان شود، آنگاه حاصل یکسان است. در ادامه ترتیب زیر، موسوم به ترتیب قاموسی، روی تکجمله‌ای‌های دومتغیره مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$ax^m y^n \geq bx^k y^l \iff m \geq k \quad \text{و} \quad (m = k \rightarrow n \geq l).$$

قضیه ۲.۲. (یکتایی تبدیل) اگر چندجمله‌ای‌های دومتغیره φ و ψ به گونه‌ای باشند که $\varphi(\sigma, \tau) = \psi(\sigma, \tau)$ آنگاه می‌توان گفت $\varphi(x, y) = \psi(x, y)$.

برهان. با استفاده از تعریف و تساوی $\sigma^i \tau^j = (x + y)^i (xy)^j$ به سادگی دیده می‌شود که بزرگ‌ترین تکجمله‌ای نسبت به ترتیب قاموسی در چندجمله‌ای دومتغیره $\varphi(x, y)$ برابر $x^m y^n$ است اگر و تنها اگر بزرگ‌ترین تکجمله‌ای در بسط $\varphi(\sigma, \tau)$ برابر با $x^{m+n} y^n$ باشد. در واقع، برای یافتن بزرگ‌ترین تکجمله‌ای در بسط $\varphi(\sigma, \tau)$ کافی است جملات $\sigma^i \tau^j$ را طوری انتخاب نماییم که در آنها $i + j$ بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد و سپس، از میان آنها جمله‌ای را با بیشترین مقدار j برگزینیم. واضح است که برای هر چندجمله‌ای ناصفر $\varphi(\sigma, \tau)$ بزرگ‌ترین جمله وجود دارد و یکتا است. بنابراین، اگر چندجمله‌ای $\varphi(x, y)$ موجود باشد به طوری که $\varphi(\sigma, \tau) = 0$ ، آنگاه $\varphi(x, y) = 0$.

حال، فرض می‌کنیم $\varphi(x, y)$ و $\psi(x, y)$ دو چندجمله‌ای هستند به طوری که $\varphi(\sigma, \tau) = \psi(\sigma, \tau)$. در این صورت، $\varphi(\sigma, \tau) - \psi(\sigma, \tau)$ برابر با صفر است و بنا به بحث بالا، $\varphi(x, y) - \psi(x, y) = 0$. لذا، حکم حاصل می‌شود. $\square$

علت برقراری قضیه ۲.۲ آن است که عبارات $\sigma = x + y$ و $\tau = xy$ تحت هیچ رابطه جبری با یکدیگر مرتبط نیستند. در غیر این صورت، حکم ممکن است برقرار نباشد. به عنوان نمونه، با در نظر گرفتن $\tau_1 = x^2 + y^2 + 2xy$ و چندجمله‌ای‌های $\varphi(x, y) = x^2 + xy$ و $\psi(x, y) = y + xy$ داریم $\varphi(x, y) \neq \psi(x, y)$ ولی $\varphi(\sigma, \tau_1) = \psi(\sigma, \tau_1)$.

۳. کاربردها

در این بخش، به کاربردهایی از چندجمله‌ای‌های متقارن دومتغیره در حل مسائلی از جبر مقدماتی می‌پردازیم. توجه شود که جواب‌های معادله درجه دوم $az^2 + bz + c = 0$ عبارتند از $z = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$. در اینجا، $\Delta = b^2 - 4ac$ مبین نام دارد. پیداست که اگر $\Delta < 0$ ، آنگاه جواب‌ها اعداد مختلط غیرحقیقی هستند و در غیر این صورت، معادله دارای جواب‌های حقیقی است.

۱.۳. **دستگاه‌های معادلات متقارن دومتغیره.** در برخی از این دستگاه‌ها، سمت چپ تساوی‌ها عباراتی متقارن نسبت به x و y هستند. بنا به قضیه ۱.۲، این عبارات را می‌توان بر حسب σ و τ نوشت. این امر مفید واقع می‌شود زیرا به جای عبارت xy ، که از درجه دوم است، متغیر τ از درجه اول قرار می‌گیرد. از این رو، با اعمال جانشینی‌های $\sigma = x + y$ و $\tau = xy$ عبارات مذکور معمولاً به معادلاتی از درجات کمتر تبدیل می‌شوند. سپس، در صورت به دست آوردن σ و τ به مقادیر x و y دست می‌یابیم. در واقع، x و y ریشه‌های معادله $z^2 - \sigma z + \tau = 0$ هستند زیرا $z^2 - \sigma z + \tau = (z - x)(z - y)$.

مثال ۱.۳. دستگاه

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + xy(x+y) = 15, \\ x^2 y^2 (x^2 + y^2) = 20, \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. مطابق آنچه بیان شد، حل این دستگاه به شرح ذیل است:

$$\begin{aligned} \begin{cases} s_3 + \tau s_1 = 15, \\ \tau^2 s_2 = 20, \end{cases} &\longrightarrow \begin{cases} \sigma(\sigma^2 - 2\tau) = 15, \\ \tau^2(\sigma^2 - 2\tau) = 20, \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم دو معادله}} \sigma = \frac{3}{4}\tau^2 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در معادله دوم}} \\ 9\tau^6 - 32\tau^3 - 320 = 0 &\longrightarrow \tau = 2, -\sqrt[3]{40/9} \longrightarrow \begin{cases} \sigma = 3, \\ \tau = 2, \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \sigma = \sqrt[3]{25/3}, \\ \tau = -\sqrt[3]{40/9}, \end{cases} \\ \longrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5}\sqrt{13}}{2\sqrt[3]{3}}, \\ y = \frac{\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{5}\sqrt{13}}{2\sqrt[3]{3}}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{5}\sqrt{13}}{2\sqrt[3]{3}}, \\ y = \frac{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5}\sqrt{13}}{2\sqrt[3]{3}}. \end{cases} \end{aligned}$$

مثال ۲.۳. دستگاه

$$\begin{cases} x^4 = 3x^2 - y^2, \\ y^4 = 3y^2 - x^2, \end{cases}$$

مفروض است. در اینجا، هر معادله به تنهایی متقارن نیست اما با در نظر گرفتن مجموع و تفاضل آنها می‌توان به معادلاتی متقارن دست یافت:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 2(x^2 + y^2), \\ x^4 - y^4 = 4(x^2 - y^2). \end{cases}$$

اگر $x^2 = y^2$ ، آنگاه با جای‌گذاری در دستگاه جواب‌های

$$(x, y) = (0, 0), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}),$$

حاصل می‌شود. در غیر این صورت، با تقسیم معادله دوم بر $x^2 - y^2$ می‌توان نوشت

$$\begin{cases} s_4 = 8, \\ s_2 = 4, \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (\sigma^2 - 2\tau)^2 - 2\tau^2 = 8, \\ \sigma^2 - 2\tau = 4, \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \tau = 2, \\ \sigma = \pm 2\sqrt{2}, \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \tau = -2, \\ \sigma = 0, \end{cases}$$

که از اینجا همان جواب‌های تکراری بالا به دست می‌آید.

۲.۳. استفاده از متغیرهای کمکی. گاهی اوقات یک دستگاه متشکل از معادلاتی است که نسبت به x و y متقارن نیستند یا بر حسب عناصر دنباله $\{s_n\}_{n \geq 1}$ قابل بیان نمی‌باشند، اما با در نظر گرفتن متغیرهایی جدید می‌توان به معادلاتی متقارن دست یافت.

مثال ۳.۳. دستگاه

$$\begin{cases} \sqrt{y} + \sqrt[4]{x^3 - 1} = 5, \\ x^3 + y^2 = 98, \end{cases}$$

داده شده است. با در نظر گرفتن متغیرهای $u = \sqrt[4]{x^3 - 1}$ و $v = \sqrt{y}$ می‌توان گفت

$$\begin{aligned} \begin{cases} u + v = 5, \\ u^4 + v^4 = 97, \end{cases} &\longrightarrow \begin{cases} \sigma = 5, \\ (\sigma^2 - 2\tau)^2 - 2\tau^2 = 97, \end{cases} \\ &\longrightarrow \begin{cases} \sigma = 5, \\ \sigma = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma = 5, \\ \tau = 44, \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3, \\ y = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

گاهی اوقات نیز یک معادله تک مجهولی را می‌توان با استفاده از متغیرهای جدید به دستگاهی از معادلات متقارن تبدیل نمود.

مثال ۴.۳. معادله $x\sqrt[3]{37-x^3}(x+\sqrt[3]{37-x^3})=-12$ را در نظر می‌گیریم. با قرار دادن $y = \sqrt[3]{37-x^3}$ داریم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^3 + y^3 = 37, \\ xy(x+y) = -12, \end{cases} &\longrightarrow \begin{cases} \sigma^3 - 3\sigma\tau = 37, \\ \sigma\tau = -12, \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sigma = 1, \\ \tau = -12, \end{cases} \\ &\longrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ y = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

۳.۳. برخی مسائل مرتبط با معادلات درجه دوم. در برخی مسائل، به محاسبه عباراتی شامل ریشه‌های یک معادله درجه دوم مفروض نیازمندیم. چنین مسائلی را نیز می‌توان به کمک چندجمله‌ای‌های متقارن حل نمود.

مثال ۵.۳. می‌خواهیم معادله درجه دومی تشکیل دهیم که ریشه‌های آن مکعب ریشه‌های معادله $x^2 + 7x + 9 = 0$ باشند. اگر ریشه‌های معادله اخیر x_1 و x_2 باشند، آنگاه $\sigma = x_1 + x_2 = -7$ و $\tau = x_1x_2 = 9$. از طرفی، باید p و q را طوری بیابیم که $z^2 + pz + q = (z - x_1^3)(z - x_2^3)$ از این رو،

$$p = x_1^3 + x_2^3 = \sigma^3 - 3\sigma\tau = -154,$$

$$q = x_1^3x_2^3 = \tau^3 = 729,$$

و $z^2 - 154z + 729 = 0$ همان معادله خواسته شده است.

مثال ۶.۳. معادله $x^2 - 9x + 16 = 0$ و ریشه‌های α و β از آن مفروض هستند. روشن است که $\alpha, \beta > 0$. می‌خواهیم حاصل عبارت $A = \sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}$ را بیابیم. قرار می‌دهیم $u = \sqrt[4]{\beta}$ و $v = \sqrt[4]{\alpha}$. در این صورت،

$$\begin{cases} u^4 + v^4 = 9, \\ u^4v^4 = 16, \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (\sigma^2 - 2\tau)^2 - 2\tau^2 = 9, \\ \tau^4 = 16, \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sigma = \sqrt{4 + \sqrt{17}}, \\ \tau = 2, \end{cases}.$$

حال، $A = \sigma = \sqrt{4 + \sqrt{17}}$.

۴.۳. نامساوی‌ها. با استفاده از چندجمله‌ای‌های متقارن می‌توان به اثبات بسیاری از نامساوی‌ها پرداخت. قضیه زیر در این راستا مفید واقع می‌شود.

قضیه ۷.۳. [۱] دو عدد $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$ و دستگاه

$$\begin{cases} x + y = \sigma, \\ xy = \tau, \end{cases}$$

مفروض است. جواب‌های x و y از این دستگاه اعداد حقیقی هستند اگر و تنها اگر $\sigma^2 - 4\tau \geq 0$. به علاوه، اگر $x = y$ و تنها اگر $\sigma^2 - 4\tau = 0$. همچنین، x و y دو جواب حقیقی نامنفی برای دستگاه هستند اگر و تنها اگر $\sigma, \tau \geq 0$ و $\sigma^2 - 4\tau \geq 0$.

در حالت کلی، فرض می‌کنیم چندجمله‌ای متقارن $f(x, y)$ به ازای مقادیری همچون $x, y \in \mathbb{R}$ یا $x, y \geq 0$ داده شده است. به منظور یافتن کرانی پایین برای مقادیر f ، ابتدا چندجمله‌ای $f(x, y)$ را برحسب σ و τ نوشته و قرار می‌دهیم $z = \sigma^2 - 4\tau \geq 0$. سپس، به طور معمول با جانشینی $\tau = (\sigma^2 - z)/4$ در چندجمله‌ای حاصل، آن را بر حسب σ و z می‌نویسیم. حال، با توجه به شرایط مسئله برای σ و نامنفی بودن z ، به یک کران پایین برای f دست می‌یابیم.

مثال ۸.۳. (الف) نشان می‌دهیم برای هر دو مقدار حقیقی x و y ، $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$ ، با توجه به مطالب بالا،

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 - x^3y - xy^3 &= (x^4 + y^4) - xy(x^2 + y^2) \\ &= (\sigma^2 - 2\tau)^2 - 2\tau^2 - \tau(\sigma^2 - 2\tau) = \sigma^4 - 5\sigma^2\tau + 4\tau^2 \\ &= \sigma^4 - 5\sigma^2 \frac{\sigma^2 - z}{4} + \frac{(\sigma^2 - z)^2}{4} = \frac{3}{4}\sigma^2 z + \frac{1}{4}z^2 \geq 0. \end{aligned}$$

(ب) نشان می‌دهیم برای مقادیر نامنفی x و y ، $(x^3 + y^3)/2 \geq ((x+y)/2)^3$. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + y^3}{2} - \left(\frac{x+y}{2}\right)^3 &= \frac{4(x^3 + y^3) - (x+y)^3}{8} \\ &= \frac{4(\sigma^3 - 3\sigma\tau) - \sigma^3}{8} = \frac{3\sigma^3 - 12\sigma\tau}{8} \\ &= \frac{3\sigma^3 - 3\sigma(\sigma^2 - z)}{8} = \frac{3\sigma z}{8} \geq 0. \end{aligned}$$

(ج) نشان می‌دهیم اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند که $x + y = 1$ آنگاه $(x + 1/x)^2 + (y + 1/y)^2 \geq 25/2$.

با توجه به مفروضات، $\sigma = 1$ ، $z = 1 - 4\tau \geq 0$ ، $0 \leq \tau \leq 1/4$ ، حال،

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{25}{2} &= x^2 + y^2 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} - \frac{17}{2} \\ &= \sigma^2 - 2\tau + \frac{\sigma^2 - 2\tau}{\tau^2} - \frac{17}{2} = \frac{-4\tau^3 - 15\tau^2 - 4\tau + 2}{2\tau^2}. \end{aligned}$$

لذا، برای اثبات نامساوی داده شده، کافی است ثابت کنیم $4\tau^3 + 15\tau^2 + 4\tau \leq 2$. روشن است که بیشترین مقدار $4\tau^3 + 15\tau^2 + 4\tau$ به ازای $\tau = 1/4$ حاصل می‌شود، که برابر است با ۲.

۵.۳. معادلات معکوسه. با استفاده از چندجمله‌ای‌های متقارن می‌توان برای حل برخی معادلات از درجات بالا اقدام نمود. این

امر برای معادلات معکوسه بر اساس روش بیان شده در برهان قضیه ۱۱.۳ صورت می‌گیرد.

تعریف ۹.۳. چندجمله‌ای $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ ، که در آن $a_n \neq 0$ ، را معکوسه گوئیم هرگاه ضرایب این چندجمله‌ای از طرفین دو به دو برابر باشند. به عبارت دیگر، $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ معکوسه است هرگاه به ازای هر $0 \leq i \leq n$ داشته باشیم $a_i = a_{n-i}$. معادله $f(z) = 0$ یک معادله معکوسه نامیده می‌شود هرگاه f خود یک چندجمله‌ای معکوسه باشد.

با استفاده از تعریف، دیده می‌شود که چندجمله‌ای $f(z)$ از درجه n یک چندجمله‌ای معکوسه است اگر و تنها اگر $z^n f(1/z) = f(z)$. گزاره ۱۰.۳ نشان می‌دهد که خارج قسمت دو چندجمله‌ای معکوسه خود یک چندجمله‌ای معکوسه است.

گزاره ۱۰.۳. فرض می‌کنیم $f(z)$ و $g(z)$ دو چندجمله‌ای معکوسه هستند به طوری که $f(z) \mid g(z)$. در این صورت، $h(z) = f(z)/g(z)$ نیز یک چندجمله‌ای معکوسه است.

برهان. فرض می‌کنیم چندجمله‌ای‌های معکوسه $f(z)$ و $g(z)$ به ترتیب از درجات m و n هستند. از این رو، می‌توان نوشت $z^m f(1/z) = f(z)$ و $z^n g(1/z) = g(z)$. چون $g(z) \mid f(z)$ ، چندجمله‌ای $h(z) = f(z)/g(z)$ از درجه $m - n$ وجود دارد به طوری که

$$z^{m-n} h(1/z) = \frac{z^m f(1/z)}{z^n g(1/z)} = \frac{f(z)}{g(z)} = h(z).$$

بنابراین، $h(z)$ یک چندجمله‌ای معکوسه است. $\square$

قضیه ۱۱.۳. گیریم $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ یک چندجمله‌ای معکوسه از درجه n باشد. اگر $n = 2k$ آنگاه $f(z) = z^k h(\sigma)$ ، که در آن $\sigma = z + 1/z$ و h یک چندجمله‌ای از درجه k است. اگر $n = 2k + 1$ ، آنگاه $f(z) = (z + 1) h(\sigma)$ و خارج قسمت یک چندجمله‌ای معکوسه از درجه $2k$ است.

برهان. چندجمله‌ای معکوسه $f(z) = a_{2k} z^{2k} + \dots + a_1 z + a_0$ از درجه $2k$ را در نظر می‌گیریم. بنا به تعریف، به ازای هر $0 \leq i \leq 2k$ داریم $a_i = a_{2k-i}$. در این صورت،

$$\begin{aligned} f(z) &= z^k \left(a_{2k} z^k + a_{2k-1} z^{k-1} + \dots + a_{k+1} z + a_k + \frac{a_{k-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{k-1}} + \frac{a_0}{z^k} \right) \\ &= z^k \left(a_{2k} \left(z^k + \frac{1}{z^k} \right) + a_{2k-1} \left(z^{k-1} + \frac{1}{z^{k-1}} \right) + \dots + a_{k+1} \left(z + \frac{1}{z} \right) + a_k \right). \end{aligned}$$

از طرف دیگر، با قرار دادن z و $1/z$ به ترتیب به جای x و y در بخش ۲، رابطه بازگشتی خطی همگن مرتبه دوم

$$S_n = \sigma S_{n-1} - S_{n-2} \quad (n \geq 3), \quad S_1 = \sigma, \quad S_2 = \sigma^2 - 2 \quad (۱.۳)$$

برای دنباله $\{S_n\}_{n \geq 1}$ حاصل می‌شود، که در آن $S_n = z^n + 1/z^n$. از اینجا دیده می‌شود که S_n یک چندجمله‌ای بر حسب σ از درجه n است. به علاوه، برای هر $n \geq 1$ داریم

$$S_n = n \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^i (n-i-1)!}{i! (n-2i)!} \sigma^{n-2i}.$$

لذا، قسمت اول حکم ثابت می‌شود.

فرض می‌کنیم $f(z) = a_{2k+1} z^{2k+1} + \dots + a_1 z + a_0$ یک چندجمله‌ای معکوسه از درجه $2k + 1$ است. از این رو، برای هر $0 \leq i \leq 2k + 1$ داریم $a_i = a_{2k+1-i}$. پس،

$$f(z) = a_0 (z^{2k+1} + 1) + a_1 (z^{2k} + z) + \dots + a_k (z^{k+1} + z^k).$$

پیداست که $f(-1) = 0$. این نتیجه می‌دهد $f(z) \mid z + 1$. از آنجا که $z + 1$ نیز یک چندجمله‌ای معکوسه است، اثبات قسمت دوم حکم با استفاده از گزاره ۱۰.۳ به دست می‌آید. $\square$

توجه شود که برای به‌دست آوردن S_n ، کافی است در دستور s_n بر حسب σ و τ جای‌گذاری $\tau = 1$ اعمال شود. به عنوان نمونه، نخستین چهار جمله دنباله $\{S_n\}_{n \geq 1}$ بر حسب σ عبارتند از

$$\begin{aligned} S_1 &= \sigma, & S_2 &= \sigma^2 - 2, \\ S_3 &= \sigma^3 - 3\sigma, & S_4 &= \sigma^4 - 4\sigma^2 + 2. \end{aligned}$$

مثال ۱۲.۳. (الف) معادله معکوسه $6z^6 - 5z^5 + 2z^4 + 5z^3 + 2z^2 - 5z + 6 = 0$ را در نظر گرفته و می‌خواهیم ریشه‌های آن را بیابیم. بنا به برهان قضیه ۱۱.۳، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} z^3 \left(6 \left(z^3 + \frac{1}{z^3} \right) - 5 \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + 2 \left(z + \frac{1}{z} \right) + 5 \right) &= 0, \\ \rightarrow 6S_3 - 5S_2 + 2S_1 + 5 &= 0 \rightarrow 6\sigma^3 - 5\sigma^2 - 16\sigma + 15 = 0 \rightarrow \sigma = 1, \frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, \\ \rightarrow z + \frac{1}{z} &= 1, \frac{2}{3}, -\frac{5}{3} \rightarrow z^2 - z + 1 = 0, 3z^2 - 2z + 3 = 0, 3z^2 + 5z + 3 = 0, \\ \rightarrow z &= \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 \pm 2i\sqrt{2}}{3}, \frac{-5 \pm i\sqrt{11}}{6}. \end{aligned}$$

(ب) معادله معکوسه $z^5 - 4z^4 + 3z^3 + 3z^2 - 4z + 1 = 0$ داده شده است. هدف یافتن ریشه‌های این معادله است. بنا به برهان قضیه ۱۱.۳، -1 یک ریشه این معادله است و با تقسیم چندجمله‌ای معکوسه متناظر بر $z + 1$ به معادله معکوسه $z^4 - 5z^3 + 8z^2 - 5z + 1 = 0 = 0$ می‌رسیم. لذا،

$$\begin{aligned} z^2 \left(\left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) - 5 \left(z + \frac{1}{z} \right) + 8 \right) &= 0 \rightarrow S_2 - 5S_1 + 8 = 0 \rightarrow \sigma^2 - 5\sigma + 6 = 0 \\ \rightarrow \sigma &= 2, 3 \rightarrow z + \frac{1}{z} = 2, 3 \rightarrow z^2 - 2z + 1 = 0, z^2 - 3z + 1 = 0 \\ \rightarrow z &= 1, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

همان طور که پیش‌تر اشاره شد، حل معادلات درجه پنجم و بالاتر بر حسب رادیکال‌ها امکان‌پذیر نیست. با این حال، گزاره ۱۳.۳ نشان می‌دهد چنین امری برای رده‌هایی از معادلات امکان‌پذیر است.

گزاره ۱۳.۳. (الف) همه ریشه‌های معادله معکوسه درجه چهارم $az^4 + bz^3 + cz^2 + bz + a = 0$ ، که در آن $a \neq 0$ ، را می‌توان به کمک چهار عمل اصلی حساب و جذرگرفتن به‌دست آورد.

(ب) همه ریشه‌های معادله معکوسه درجه پنجم $az^5 + bz^4 + cz^3 + cz^2 + bz + a = 0$ ، که در آن $a \neq 0$ ، را می‌توان به کمک چهار عمل اصلی حساب و جذرگرفتن به‌دست آورد.

(ج) اگر یک ریشه معادله معکوسه درجه ششم $az^6 + bz^5 + cz^4 + dz^3 + cz^2 + bz + a = 0$ ، که در آن $a \neq 0$ ، مشخص باشد، آنگاه دیگر جواب‌ها را می‌توان به کمک چهار عمل اصلی حساب و ریشه گرفتن به‌دست آورد.

(د) اگر یک ریشه معادله معکوسه درجه هفتم $az^7 + bz^6 + cz^5 + dz^4 + dz^3 + cz^2 + bz + a = 0$ ، که در آن $a \neq 0$ ، مشخص باشد، آنگاه دیگر جواب‌ها را می‌توان به کمک چهار عمل اصلی حساب و ریشه گرفتن به‌دست آورد.

برهان. (الف) بنا به روش بیان شده،

$$\begin{aligned} z^2 \left(a \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + b \left(z + \frac{1}{z} \right) + c \right) &= 0 \longrightarrow aS_2 + bS_1 + c = 0 \\ \longrightarrow a\sigma^2 + b\sigma + (c - 2a) &= 0 \longrightarrow \sigma = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 8a^2 - 4ac}}{2a} \\ \longrightarrow 2az^2 + \left(b \pm \sqrt{b^2 + 8a^2 - 4ac} \right) z + 2a &= 0. \end{aligned}$$

از آنجا که حل معادله درجه دوم اخیر تنها با استفاده از چهار عمل اصلی حساب و جذرگرفتن امکان پذیر است، حکم به دست می آید.
(ب) بنا به قضیه ۱۱.۳، می توان نوشت $az^5 + bz^4 + cz^3 + cz^2 + bz + a = (z + 1)g(z)$ که در آن $g(z)$ یک چندجمله ای معکوسه درجه چهارم است. حال، از (الف) نتیجه می شود که حل معادله $g(z) = 0$ به کمک چهار عمل اصلی حساب و جذرگرفتن ممکن است. لذا، حکم حاصل می شود.
(ج) می توان گفت

$$\begin{aligned} z^3 \left(a \left(z^3 + \frac{1}{z^3} \right) + b \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + c \left(z + \frac{1}{z} \right) + d \right) &= 0 \\ \longrightarrow aS_3 + bS_2 + cS_1 + d = 0 \longrightarrow a\sigma^3 + b\sigma^2 + (c - 3a)\sigma + d - 2b &= 0, \end{aligned}$$

که از اینجا سه مقدار برای σ با استفاده از چهار عمل اصلی حساب و ریشه گرفتن به دست می آید. سپس، به ازای هر مقدار به دست آمده σ با معادله $z + 1/z = \sigma$ ، چهار عمل اصلی حساب و جذرگرفتن به دو مقدار برای z می رسیم. لذا، حکم نتیجه می شود.
(د) گیریم معادله معکوسه درجه هفتم مفروض دارای ریشه ای مانند λ باشد به طوری که $\lambda \neq -1$. از طرفی، -1 نیز یک ریشه این معادله معکوسه است و

$$az^7 + bz^6 + cz^5 + dz^4 + dz^3 + cz^2 + bz + a = (z + 1)g(z),$$

که در آن $g(z)$ یک چندجمله ای معکوسه درجه ششم است. اینک، چون $g(\lambda) = 0$ ، حکم از (ج) نتیجه می شود. $\square$

۶.۳. تجزیه چندجمله ای های متقارن. برای تجزیه یک چندجمله ای متقارن دومتغیره $f(x, y)$ به صورت حاصل ضربی از عوامل، یک راهبرد کلی آن است که ابتدا f را بر حسب σ و τ نوشته و سپس، به تجزیه عبارت جدید بپردازیم. در این بخش، با استفاده از راهبرد مذکور، چندجمله ای های متقارن دومتغیره درجه چهارم را مورد بررسی قرار می دهیم. بدین منظور، می نویسیم

$$\begin{aligned} f(x, y) &= ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + bxy^3 + ay^4 \\ &\quad + dx^3 + ex^2y + exy^2 + dy^3 + fx^2 + gxy + fy^2 + hx + hy + k \\ &= as_4 + b\tau s_2 + c\tau^2 + ds_3 + e\tau\sigma + fs_2 + g\tau + h\sigma + k \\ &= (2a - 2b + c)\tau^2 - (4a\sigma^2 - b\sigma^2 + 3d\sigma - e\sigma + 2f - g)\tau \\ &\quad + a\sigma^4 + d\sigma^3 + f\sigma^2 + h\sigma + k. \end{aligned}$$

چنان که می بینیم، یک چندجمله ای درجه دوم بر حسب τ حاصل می شود که برای تجزیه آن کافی است ریشه هایش را بیابیم. روشن است که در صورت وجود دو ریشه حقیقی τ' و τ'' تجزیه

$$f(x, y) = (2a - 2b + c)(xy - \tau')(xy - \tau'')$$

به عوامل حقیقی حاصل می‌گردد. سپس، با توجه به حضور تک‌جمله‌ای xy در هر یک از عوامل، می‌توان نتیجه گرفت که هر عامل به صورت کلی $\alpha x^2 + \beta xy + \alpha y^2 + \gamma x + \gamma y + \delta$ است. این عوامل نیز بر حسب x از درجه دوم هستند و در صورت امکان به عوامل حقیقی تجزیه می‌شوند.

مثال ۱۴.۳. چندجمله‌ای متقارن درجه چهارم

$$f(x, y) = 6x^4 - 11x^3y - 18x^2y^2 - 11xy^3 + 6y^4 + 3x^2 - 10xy + 3y^2$$

داده شده است. برای تجزیه آن، می‌نویسیم

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 6s_4 - 11\tau s_2 - 18\tau^2 + 3s_2 - 10\tau \\ &= 16\tau^2 - (35\sigma^2 + 16)\tau + 3\sigma^2(2\sigma^2 + 1) = 16(\tau - 2\sigma^2 - 1)(\tau - \frac{3}{16}\sigma^2) \\ &= (2x^2 + 3xy + 2y^2 + 1)(3x^2 - 10xy + 3y^2). \end{aligned}$$

همان طور که دیده می‌شود، هر کدام از عوامل یک چندجمله‌ای درجه دوم بر حسب x است. عامل اول دارای ریشه‌های مختلط غیرحقیقی است اما عامل دوم دارای دو ریشه حقیقی $y/3$ ، $x = 3y$ می‌باشد. بنابراین،

$$f(x, y) = 16(\tau - 2\sigma^2 - 1)(\tau - \frac{3}{16}\sigma^2) = (2x^2 + 3xy + 2y^2 + 1)(3x - y)(x - 3y).$$

قضیه ۱۵.۳. چندجمله‌ای متقارن دومتغیره $ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + bxy^3 + ay^4$ را در نظر می‌گیریم. اگر تجزیه f به عوامل حقیقی مطابق با روش بیان شده در بخش ۶.۳ امکان‌پذیر نباشد، آنگاه f را می‌توان به صورت

$$f(x, y) = (Ax^2 + Bxy + Cy^2)(Cx^2 + Bxy + Ay^2)$$

به عوامل حقیقی تجزیه نمود، که در آن هر عامل از تبدیل دوری دیگری نسبت به x و y به دست می‌آید.

برهان. بدون کاسته شدن از کلیت، فرض می‌کنیم $a = 1$. بنا به روش بیان شده در بخش ۶.۳، داریم:

$$f(x, y) = s_4 + b\tau s_2 + c\tau^2 = (c - 2b + 2)\tau^2 + (b - 4)\sigma^2\tau + \sigma^4.$$

از آنجا که روش مذکور برای تجزیه f به عوامل حقیقی به بن‌بست می‌رسد، مبین چندجمله‌ای درجه دوم اخیر باید منفی باشد. از این رو، $b^2 < 4(c - 2)$. از طرف دیگر، با مساوی قرار دادن ضرایب چندجمله‌ای‌ها نتیجه می‌شود که تجزیه $f(x, y) = (Ax^2 + Bxy + Cy^2)(Cx^2 + Bxy + Ay^2)$ امکان‌پذیر است اگر و تنها اگر دستگاه

$$\begin{cases} AC = 1, \\ B(A + C) = b, \\ A^2 + B^2 + C^2 = c, \end{cases} \quad (۲.۳)$$

برای ضرایب نامعین A ، B و C دارای جواب باشد. از اینجا با به دست آوردن $C = 1/A$ و $B = bA/(A^2 + 1)$ به ترتیب از معادلات اول و دوم و جای‌گذاری در معادله سوم، به

$$X^4 + (2 - c)X^3 + (b^2 - 2c + 2)X^2 + (2 - c)X + 1 = 0 \quad (۳.۳)$$

می‌رسیم، که در آن $X = A^2$. لذا، دستگاه (۲.۳) دارای جواب است اگر و تنها اگر معادله معکوسه (۳.۳) دارای جواب مثبت باشد. برای حل این معادله معکوسه، می‌توان نوشت

$$S_2 + (2 - c)S_1 + (b^2 - 2c + 2) = 0 \longrightarrow \sigma^2 + (2 - c)\sigma + (b^2 - 2c) = 0$$

$$\longrightarrow \sigma = \frac{c - 2 \pm \sqrt{(c + 2)^2 - 4b^2}}{2}.$$

از $b^2 < 4(c - 2)$ نتیجه می‌شود $(c - 6)^2 > (c + 2)^2 - 4b^2 > 0$ و $c > 2$. لذا، دو جواب حقیقی برای σ به دست می‌آید. حال، $X + 1/X = c - 2 + \sqrt{(c + 2)^2 - 4b^2} \geq 2$ چون $c - 2 + \sqrt{(c + 2)^2 - 4b^2} \geq 2$ ، از معادله اخیر یک جواب مثبت برای X حاصل می‌شود و بنابراین، تجزیه بیان شده برای f امکان‌پذیر است. $\square$

مثال ۱۶.۳. چندجمله‌ای متقارن $f(x, y) = 3x^4 + 4x^3y + 11x^2y^2 + 4xy^3 + 3y^4$ مقروض است. برای تجزیه f آن را بر حسب عبارات متقارن σ و τ می‌نویسیم:

$$f(x, y) = 3s_4 + 4\tau s_2 + 11\tau^2 = 9\tau^2 - 8\sigma^2\tau + 3\sigma^4.$$

مبین چندجمله‌ای اخیر منفی است و لذا، برای معادله متناظر ریشه‌های حقیقی حاصل نمی‌شود. حال، بنا به قضیه ۱۵.۳، f را می‌توان به صورت $f(x, y) = (Ax^2 + Bxy + Cy^2)(Cx^2 + Bxy + Ay^2)$ تجزیه نمود. پس،

$$3x^4 + 4x^3y + 11x^2y^2 + 4xy^3 + 3y^4 = (Ax^2 + Bxy + Cy^2)(Cx^2 + Bxy + Ay^2).$$

تساوی اخیر یک اتحاد است و لذا، به ازای همه مقادیر x و y برقرار می‌باشد. با قرار دادن $x = y = 1$ داریم $(A+B+C)^2 = 25$ که نتیجه می‌دهد $A+B+C = \pm 5$. با توجه به اینکه در تجزیه مورد نظر علامت‌های A ، B و C را همزمان می‌توان تغییر داد، تساوی $A+B+C = 5$ را در نظر می‌گیریم. با قرار دادن $x = 1$ و $y = -1$ داریم $(A-B+C)^2 = 9$ که نتیجه می‌دهد $A-B+C = \pm 3$. همچنین، با قرار دادن $x = 0$ و $y = 1$ داریم $AC = 3$. از این رو، دستگاه

$$\begin{cases} A+B+C=5, \\ A-B+C=\pm 3, \\ AC=3, \end{cases} \quad (۴.۳)$$

به دست می‌آید. با در نظر گرفتن مقدار $+3$ در طرف راست معادله دوم به $B = 1$ و $A+C = 4$ می‌رسیم. سپس، با لحاظ نمودن معادله سوم، مقادیر $A = 1$ و $C = 3$ حاصل می‌شوند. بنابراین،

$$3x^4 + 4x^3y + 11x^2y^2 + 4xy^3 + 3y^4 = (x^2 + xy + 3y^2)(3x^2 + xy + y^2).$$

۷.۳. بخش‌پذیری. در این بخش، به برخی از دیگر کاربردهای چندجمله‌ای‌های متقارن دومتغیره در حل مسائل مرتبط با بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها می‌پردازیم.

مثال ۱۷.۳. فرض می‌کنیم $f(x, y)$ یک چندجمله‌ای متقارن دومتغیره است و $P(\sigma, \tau)$ از بیان f بر حسب σ و τ به دست آمده است. نشان می‌دهیم $f(x, y)$ بر $x^2 + xy + y^2$ بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر مجموع ضرایب در چندجمله‌ای $P(\sigma, \tau)$ برابر با صفر باشد.

در وهله اول، فرض می‌کنیم $f(x, y) \mid x^2 + xy + y^2$. از این رو، چندجمله‌ای متقارن $g(x, y)$ وجود دارد به طوری که $f(x, y) = (x^2 + xy + y^2)g(x, y)$. از طرفی، با بیان g بر حسب σ و τ داریم $g(x, y) = Q(\sigma, \tau)$. بنابراین،

$P(\sigma, \tau) = (\sigma^2 - \tau)Q(\sigma, \tau)$. چون $P(1, 1) = 0$ ، مجموع ضرایب در $P(\sigma, \tau)$ برابر با صفر است. برعکس، بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد

$$f(x, y) = P(\sigma, \tau) = \sigma^n + a_1 \sigma^{n-2} \tau + a_2 \sigma^{n-4} \tau^2 + \dots + a_{\lfloor n/2 \rfloor} \sigma^{n-2\lfloor n/2 \rfloor} \tau^{\lfloor n/2 \rfloor},$$

که در آن $P(1, 1) = 0$ در این صورت،

$$P(\sigma, \tau) = \sigma^n \left(1 + a_1 \left(\frac{\tau}{\sigma^2} \right) + a_2 \left(\frac{\tau}{\sigma^2} \right)^2 + \dots + a_{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{\tau}{\sigma^2} \right)^{\lfloor n/2 \rfloor} \right)$$

و چندجمله‌ای $1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{\lfloor n/2 \rfloor} z^{\lfloor n/2 \rfloor}$ بخش‌پذیر است. پس، چندجمله‌ای $g(z)$ از درجه حداکثر $\lfloor n/2 \rfloor - 1$ وجود دارد به طوری که $(1 - z)g(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{\lfloor n/2 \rfloor} z^{\lfloor n/2 \rfloor}$ و

$$P(\sigma, \tau) = \sigma^n \left(1 - \frac{\tau}{\sigma^2} \right) g \left(\frac{\tau}{\sigma^2} \right) = (\sigma^2 - \tau) \sigma^{n-2} g \left(\frac{\tau}{\sigma^2} \right).$$

چون $0 \leq \deg g \leq n - 2$ ، داریم $P(\sigma, \tau) \mid \sigma^2 - \tau$. بنابراین، $\sigma^2 - \tau \mid f(x, y)$ ، $x^2 + xy + y^2 \mid f(x, y)$.

مثال ۱۸.۳. ثابت می‌کنیم اگر $x^2 + xy + y^2 \mid (x + y)^n - x^n - y^n$ ، آنگاه $n = 6k \pm 1$. از فرض نتیجه می‌شود $\sigma^n - s_n \mid \sigma^2 - \tau$ و لذا، مقدار این s_n ها به ازای $\sigma = \tau = 1$ برابر با یک است. در حالت کلی، مقدار s_n را به ازای $\sigma = \tau = 1$ با a_n نشان می‌دهیم. بنا به رابطه (۱.۲)، رابطه بازگشتی خطی همگن مرتبه دوم

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \quad (n \geq 3), \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -1$$

برای دنباله $\{a_n\}_{n \geq 1}$ به دست می‌آید. از اینجا به راحتی دیده می‌شود که s_n تنها به ازای $n = 6k \pm 1$ برابر با یک است و بنابراین، حکم حاصل می‌شود.

مثال ۱۹.۳. در اینجا، به دنبال یک شرط لازم برای بخش‌پذیری چندجمله‌ای $x^{2n} + x^n + 1$ بر $x^2 + x + 1$ هستیم. اگر $x^{2n} + x^n + 1 \mid x^2 + x + 1$ ، آنگاه $(x^2 + x + 1) \mid f(z)$ ، که در آن $f(z)$ یک چندجمله‌ای معکوسه از درجه $2n - 2$ است. با تقسیم دو طرف تساوی بر z^n ، می‌توان نوشت $f(z)/z^{n-1} = (S_1 + 1)f(z)/z^{n-1}$. واضح است که $f(z)/z^{n-1}$ یک چندجمله‌ای بر حسب σ است و به ازای $\sigma = -1$ باید داشته باشیم $S_n = -1$. در حالت کلی، مقدار S_n را به ازای $\sigma = -1$ با A_n نشان می‌دهیم. بنا به رابطه (۱.۳)، رابطه بازگشتی خطی همگن مرتبه دوم

$$A_n = -(A_{n-1} + A_{n-2}) \quad (n \geq 3), \quad A_1 = -1, \quad A_2 = -1$$

برای دنباله $\{A_n\}_{n \geq 1}$ به دست می‌آید. از اینجا به راحتی دیده می‌شود که S_n تنها به ازای $n = 3k \pm 1$ برابر با -1 است و بنابراین، شرط مورد نظر حاصل می‌شود.

مراجع

- [۱] بالتیانسکی، و.گ.، ویلنکین، ن.یا. تقارن در جبر. ترجمه پرویز شهریاری (۱۳۶۳). چاپ دوم. موسسه انتشارات امیرکبیر.
- [۲] هافمن، کی.ام.، کنزی، آر. (۱۹۷۱) جبر خطی. ترجمه جمشید فرشیدی (۱۴۰۱). ویرایش دوم. مرکز نشر دانشگاهی.
- [۳] هانگرفورد، تی.دبلیو. (۱۹۸۰) جبر. ترجمه علی‌اکبر عالم‌زاده، حسین ذاکری (۱۳۸۲). انتشارات پژوهش.
- [4] Grimaldi, R.P. (2004) Discrete and Combinatorial Mathematics. 5th Edition. Pearson Education: Boston, USA.