



THE DYNAMICS OF RESISTANCE TO LEARNING: A RE-READING OF EPISTEMOLOGICAL OBSTACLES IN ADVANCED MATHEMATICS ENGLISH

MOHAMAD SABZI ^{1*}, MEHRDAD NANDARI ², AND MOHAMMAD ALI SIAVOSHI ³

¹Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Shahid Chamran University of Ahvaz
Ahvaz, Iran

sabzi.mohamad@gmail.com

²Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Shahid Chamran University of Ahvaz
namdari@scu.ac.ir

³Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Shahid Chamran University of Ahvaz
m.siavosshi@scu.ac.ir

Abstract. This paper addresses the question of why learning failures in mathematics occur even when learners possess the relevant knowledge and strategies. Drawing on Bachelard's notion of the epistemological obstacle, we argue that many persistent learning failures cannot be reduced to superficial misunderstandings; rather, they stem from deep-seated, prior cognitive structures that resist new knowledge. We show that Schoenfeld's theory of problem solving, particularly the components of beliefs and control, can be understood as a metacognitive reformulation of the same Bachelardian logic. We also demonstrate that concepts such as diSessa's p-prims, Fischbein's coercive intuitions, and Tall and Vinner's concept image are all distinct forms of Bachelardian obstacles. The theoretical framework of the paper is based on the Mathematical Knowledge Architecture (MKA), which introduces five mechanisms, translation, compression, reconfiguration, coordination, and epistemic shift, as the core processes underpinning the construction and evolution of knowledge. Using this framework, an analysis of three instructional vignettes on infinite cardinality, the harmonic series, and the quotient group reveals how a single epistemological obstacle can systematically disrupt multiple MKA mechanisms.

2020 Mathematics Subject Classification. 47A55, 39B52, 34K20, 39B82

Keywords. Epistemological obstacle, Mathematical knowledge architecture, Failures of control, Conceptual development in Mathematics, Mathematics education

Date: Received 1-12-2025 Accepted 15-12-2025 Available Online 20-12-2025

©Ferdowsi University of Mashhad.



سازوکار مقاومت در برابر یادگیری؛ بازخوانی موانع معرفتی در ریاضیات پیشرفته

محمد سبزی*، مهرداد نامداری، و محمدعلی سیاوشی

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهیدچمران اهواز

sabzi.mohamad@gmail.com

namdari@scu.ac.ir

m.siaavoshi@scu.ac.ir

چکیده. این مقاله به این پرسش می‌پردازد که چرا شکست‌های یادگیری در ریاضیات، حتی با وجود برخورداری یادگیرنده از دانش و استراتژی، رخ می‌دهد. با تکیه بر مفهوم موانع معرفتی باشلار، استدلال می‌کنیم که بسیاری از شکست‌های پایدار یادگیری را نمی‌توان به سوتفاهم‌های سطحی تقلیل داد؛ بلکه این شکست‌ها ریشه در ساختارهای پیشینی و مقاوم ذهن دارند که در برابر دانش جدید می‌ایستند. نشان می‌دهیم که می‌توان نظریه حل مساله شونفلد، به‌ویژه دو مولفه باورها و کنترل را به‌مثابه بازصورت‌بندی فراشناختی همین منطق باشلاری تفسیر کرد. هم‌چنین نشان می‌دهیم که مفاهیمی چون خُرده‌شهودهای دی‌سسا، شهودهای قهری فیشبین، تصویر مفهومی تال و وینر همگی اشکال گوناگونی از مقاومت‌های باشلاری‌اند. چارچوب نظری مقاله بر معماری دانش ریاضی استوار است که پنج مکانیسم ترجمه، فشرده‌سازی، بازآرایی، هماهنگی و گذار معرفتی را به‌عنوان سازوکارهای ساخت و تحول دانش معرفی می‌کند. براساس این چارچوب، تحلیل سه وینیت آموزشی درباره کاردینالیته نامتناهی، سری هارمونیک و گروه خارج‌قسمتی نشان می‌دهد که چگونه یک مانع معرفتی واحد می‌تواند به‌طور سیستماتیک چندین مکانیسم معماری دانش را مختل کند. نتایج نشان می‌دهد که شکست‌های یادگیری، پدیده‌هایی چندلایه و معماری‌محورند و از طریق تحلیل هم‌زمان موانع معرفتی و مکانیسم‌های معماری دانش ریاضی قابل فهم‌اند.

2010 Mathematics Subject Classification. 47A55, 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. موانع معرفتی، معماری دانش ریاضی، شکست در کنترل، تحول مفهومی ریاضی، آموزش ریاضی.

تاریخ: دریافت ۱۴۰۴/۰۹/۱۰ پذیرش ۱۴۰۴/۰۹/۲۴ انتشار برخط ۱۴۰۴/۰۹/۲۹

نحوه ارجاع به این مقاله: م. سبزی، م. نامداری و م.ع. سیاوشی، سازوکار مقاومت در برابر یادگیری؛ بازخوانی موانع معرفتی در ریاضیات پیشرفته، به سوی علوم ریاضی، ۵ (۱۴۰۴)، شماره ۱، ۸۰-۶۸.

©دانشگاه فردوسی مشهد.

۱. مقدمه

هشتاد سال از انتشار کتاب کلاسیک جورج پولیا^۱، چگونه مساله حل کنیم [۱۴]، می‌گذرد؛ اثری که با معرفی چهار مرحله حل مساله و مجموعه‌ای از رهیافت‌ها^۲، چارچوبی هنجاری برای رفتار حل‌کننده ایده‌آل ارائه کرد. اما با وجود تاثیر گسترده آن، مدل پولیا در پاسخ به پرسش تشخیصی بنیادین ناتوان بود: چرا دانش‌آموزان، حتی زمانی که رهیافت‌ها را می‌دانند، در به‌کارگیری آن‌ها شکست می‌خورند؟ این شکاف نظری، تا چند دهه بی‌پاسخ ماند.

آلن شونفلد^۳ کوشید این خلا را پر کند. او با افزودن سه مولفه منابع^۴، کنترل^۵ و باورها^۶ [۱۵] و [۱۶]، مدل پولیا را از چارچوبی هنجاری به چارچوبی توصیفی-تحلیلی تبدیل کرد. نوآوری اصلی شونفلد، برجسته‌سازی نقش باورها و کنترل به‌عنوان عوامل تعیین‌کننده موفقیت/شکست حل‌کنندگان بود؛ عواملی که می‌تواند بیش از دانش محتوا یا رهیافت‌ها بر فرآیند حل مساله اثرگذار باشد. در این مقاله استدلال می‌شود که مفهوم باورها را در نظریه شونفلد می‌توان در پرتو مفهوم کلاسیک موانع معرفتی^۷ گاستون باشلار^۸ بازخوانی کرد. به‌نظر باشلار، یادگیری علمی نه از فقدان دانش، بلکه از مقاومت دانش قبلی در برابر دانش جدید نشأت می‌گیرد. این مقاومت می‌تواند منشأ تجربی، شهودی، زبانی یا مفهومی داشته باشد و ماهیتی ساختاری دارد، نه این‌که صرفاً یک اشتباه سطحی باشد [۳]. اگر چنین دیدگاهی پذیرفته شود، باورهای شونفلدی را می‌توان بازتابی فراشناختی از همین موانع دانست: ساختارهایی پایدار که منابع شناختی را محدود و فرایند کنترل را مختل می‌کنند.

ادبیات معاصر (آموزش ریاضی) نیز این خط فکری را، به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم، پیش برده است. مفهوم شهودهای قهری^۹ در فیشبین^{۱۰} [۱۰]، نظریه بار بودن ادراک^{۱۱} در هانسون^{۱۲} [۱۱]، خُرده‌شهودها^{۱۳} در دی‌سسا^{۱۴} [۷] و تصویر مفهومی^{۱۵} در مقابل تعریف مفهومی^{۱۶} در تال^{۱۷} و وینر^{۱۸} [۱۹] همگی نشان می‌دهند که مقاومت‌های ذهنی ریشه‌دار چگونه فهم ریاضی را محدود می‌سازد. افزون بر این، در برخی رویکردها، همچون کارهای سیرپینسکا در مورد درک مفهوم حد، یا تحلیل‌های بروسو در نظریه موقعیت‌های

¹George Polya²Heuristics³Alan H. Schoenfeld⁴Resources⁵Control⁶Beliefs⁷Epistemological Obstacles⁸Gaston Bachelard⁹Coercive Intuitions¹⁰Efraim Fischbein¹¹Theory-laden¹²Norwood Russell Hanson¹³p-prims (Phenomenological Primitives)¹⁴Andrea A. diSessa¹⁵Concept Image¹⁶Concept Definition¹⁷David Tall¹⁸Shlomo Vinner

دی‌داتیک، اصطلاح جدیدی برای این مقاومت‌ها وضع نشده است؛ اما همان منطق باشلاری به‌صورت ضمنی توسعه یافته و در قالب تضادهای شناختی و موانع مفهومی بنیادی بازتولید شده است.

این مقاله با عبور از دوگانگی فلسفه علم و روان‌شناسی یادگیری، یک سنتز نظری ارائه می‌دهد که در آن، باورهای شونفلدی به‌عنوان تجلی فراشناختی همان موانع معرفتی باشلاری تبیین می‌شود. در ادامه، با تکیه بر چارچوب معماری دانش ریاضی (MKA) [۱]، سه موقعیت کلاسی بازسازی‌شده تحلیل می‌شود تا سازوکار این مقاومت‌های معرفتی در عمل نشان داده‌شود. هدف، ارائه تصویری روشن از این است که چرا شکست‌های یادگیری در ریاضیات، اغلب ناشی از یک بدفهمی ایزوله نیست، بلکه پیامد یک معماری شناختی ناپایدار است.

۱.۱. روش‌شناسی. روش‌شناسی داده‌های اصلی این مقاله شامل سه وینیت آموزشی بازسازی‌شده^{۱۹} است که با محوریت موانع معرفتی کلاسیک در ریاضیات پیشرفته (کاردینالیتی نامتناهی، سری هارمونیک و گروه خارج‌قسمتی) طراحی شده‌اند. این وینیت‌ها داده‌های خام تجربی نیستند، بلکه ماهیتی شبیه به آزمایش‌های فکری^{۲۰} دارند که با جزئیات واقعی غنی شده‌اند. محتوای این روایت‌ها، حاصل تلفیق مشاهدات کلاسی و تحلیل روایت‌های آموزشی همکاران است. هدف از به‌کارگیری این روش، نه دستیابی به تعمیم‌پذیری آماری، بلکه تبیین نظری و آشکارسازی سازوکارهای شکست شناختی در مواجهه با یک مانع معرفتی باشلاری است. این رویکرد که بر مبنای ایزوله‌کردن و توجه‌کردن^{۲۱} به لحظات بحرانی استوار است [۱۳]، این امکان را فراهم می‌سازد تا مکانیسم‌های شناختی فعال‌شده/شکست‌خورده در این لحظات را، با وضوح تحلیلی بالا بررسی کنیم. این روش‌شناسی از منطق تعمیم تحلیلی [۲۰] پیروی می‌کند و اعتبار آن در انسجام تبیینی است، نه در نمایندگی آماری داده‌ها.

چارچوب تحلیلی بر پنج مکانیسم معماری دانش ریاضی (MKA) استوار است و تحلیل وینیت‌ها به‌گونه‌ای سازمان‌دهی شده‌است که نشان‌دهنده چگونه یک مانع معرفتی می‌تواند مکانیسم‌های MKA را مسدود کند. در بخش نظری، ایده‌های باشلار، شونفلد و دیگران از منظر MKA بازخوانی می‌شود، اما هدف مقاله مقایسه این نظریه‌ها نیست؛ بلکه یکپارچه‌سازی آن‌ها در قالب یک چارچوب تشخیصی واحد برای توضیح شکست شناختی است. این انتخاب روش‌شناسی ما را قادر می‌سازد که تمایز میان سوتفاهم‌های سطحی و موانع معرفتی ساختاری را نشان دهیم و دلالت‌های آموزشی آن را استخراج کنیم.

۲. پیشینه نظری

۱.۲. موانع معرفتی و بازتاب آن در پژوهش‌های آموزش ریاضی. مفهوم مانع معرفتی نخستین بار توسط گاستون باشلار در فلسفه علم معرفی شد. از نظر باشلار، یادگیری علم یک حرکت پیوسته و انباشتی نیست؛ بلکه فرایندی گسسته است که در آن یادگیرنده باید از دانش پیشین خود عبور کند. این دانش پیشین، برخاسته از تجربه خام، شهودهای طبیعی و تفسیرهای بدیهی جهان، نه‌تنها ناپدید نمی‌شود، بلکه در برابر تغییر مقاوم است و می‌تواند مسیر یادگیری مفاهیم علمی را مسدود کند [۳]. باشلار نشان داد که مانع معرفتی نوعی اقناع کاذب ایجاد می‌کند: ساختاری که از نظر یادگیرنده معتبر به‌نظر می‌رسد، اما درحقیقت با معماری مفاهیم علمی ناسازگار است. از این رو، یادگیری نیازمند نوعی گسست معرفتی^{۲۲} است؛ گسستی که تنها از طریق مواجهه آگاهانه با تضادهای شناختی و بازسازی مفهومی رخ می‌دهد. این دیدگاه درباره مشکل‌زایی دانش پیشین باشلار، نقطه آغاز بسیاری از تبیین‌های معاصر درباره دشواری‌های یادگیری ریاضیات است. در ادامه نشان می‌دهیم که چگونه نظریه‌های کلیدی آموزش ریاضی، باوجود تفاوت‌های ماهیتی و ریشه‌ای، در لحظه یادگیری، همگی نقشی مشابه مقاومت در برابر دانش جدید ایفا می‌کنند.

¹⁹Reconstructed Vignettes

²⁰Thought Experiments

²¹Noticing

²²Epistemological Rupture

نخستین بازتاب این دیدگاه را می‌توان در سطح فراشناختی و در کارهای شونفلد مشاهده کرد. شونفلد یادگیری ریاضی را حاصل تعامل میان دانش، کنترل و باورها می‌داند. او نشان می‌دهد که حتی وقتی دانش‌آموزان دانش یا استراتژی لازم را برای حل مساله دارند، باورهای ریشه‌دار آنان درباره ماهیت ریاضی می‌تواند آنان را از به‌کارگیری آن دانش بازدارد [۱۵، ۱۶]. برای نمونه، باورهایی نظیر «ریاضی یعنی سرعت و اجرای الگوریتم»، «اگر جواب سریع پیدا نشد، مساله فراتر از توان ماست» یا «تفکر خلاق اتلاف وقت است»، ساختار کنترلی حل مساله را از کار می‌اندازد و یادگیرنده را به رفتارهای ناکارآمد سوق می‌دهد [۱۲]؛ ساختارهای ذهنی به‌ظاهر قابل اعتماد، درعمل یادگیری را مختل می‌کنند. در این معنا، باورهای شونفلدی را می‌توان صورت فراشناختی موانع معرفتی دانست.

درحالی‌که شونفلد بر باورهای کلان تمرکز دارد، دی‌سسا این منطق را در سطحی خردتر و ساختاری‌تر دنبال می‌کند. در نظریه دانش تکه‌تکه^{۲۳} او، دانش یادگیرنده شبکه‌ای از قطعه‌های کوچک شهودی به نام خُرده‌شهودها است. این عناصر شهودی اولیه، از نظر یادگیرنده کاملاً طبیعی و قابل اطمینان‌اند، اما در مسائل جدید اغلب نادرست عمل می‌کنند و دربرابر تغییر مقاوم‌اند [۷]. می‌توان این خرده‌شهودها را موانع معرفتی خرد دانست: عناصر شهودی‌ای که به‌ظاهر بدیهی‌اند اما مانع شکل‌گیری مدل‌های رسمی ریاضی می‌شوند. ویژگی‌هایی چون پایداری، مقاومت دربرابر آموزش و قدرت اقناع درونی، همان ویژگی‌های مانع معرفتی نزد باشلار هستند. هم‌سو با همین نگاه به نقش بازدارنده شهود، فیشبین بر جنبه روان‌شناختی و قدرت اجبارکننده آن تاکید می‌کند. فیشبین نشان می‌دهد که برخی شهودها اقتدار و قدرت اقناع بی‌واسطه دارند؛ یعنی به‌مثابه یک واقعیت بدیهی تجربه می‌شوند و مسیر استدلال ریاضی را کنترل می‌کنند. این شهودهای قهری نه‌تنها خطاهای مفهومی ایجاد می‌کنند، بلکه آموزش رسمی نیز به‌آسانی آن‌ها را اصلاح نمی‌کند [۵، ۱۰]. این ایده به‌طور مستقیم با منطق باشلار هم‌خوان است: شهود طبیعی، اگرچه از نظر یادگیرنده کاملاً پذیرفتنی است، اما می‌تواند یک ساختار معرفتی نادرست و مقاوم ایجاد کند که باعث توقف یادگیری شود.

تجلی دیگر این تقابل میان ساختار ذهنی و دانش رسمی را می‌توان در نظریه تال و وینر یافت. آن‌ها با معرفی مفهوم تصویر مفهومی درمقابل تعریف مفهومی، می‌گویند که یادگیرنده برای هر مفهوم ریاضی یک تصویر ذهنی دارد که ممکن است ناقص، نادرست، یا بیش‌ازحد محدود باشد [۱۹]. هنگامی‌که تصویر مفهومی (که ریشه در تجربیات قبلی دارد) با تعریف رسمی در تعارض قرار می‌گیرد، یادگیری دچار تنش و تضاد شناختی می‌شود. برای مثال، تال و وینر می‌گویند بسیاری از دانشجویان هنگام مواجهه با $0.999... = 1$ شهود آن‌ها بی‌نهایت را یک فرایند ناتمام می‌بیند، نه یک مقدار کامل؛ بنابراین نمی‌توانند بپذیرند که فرایندی بی‌نهایت مرحله‌ای می‌تواند مقدار نهایی داشته‌باشد. این ساختار بازنمایی‌شده شهودی، نوعی مانع از جنس شهود طبیعی است.

درنهایت، باید اشاره کرد که نفوذ منطق باشلاری محدود به نظریاتی نیست که اصطلاحات جدید وضع کرده‌اند. در برخی رویکردهای آموزش ریاضی، مانند تحلیل سیرپینسکا [۱۸] از درک ریاضی یا نظریه موقعیت‌های آموزشی بروسو [۴]، نام جدیدی برای مانع معرفتی ارائه نشده و همان منطق بنیادین حفظ شده‌است. در این نظریه‌ها نیز دانش پیشین به‌ظاهر طبیعی، ساختار مساله را برای یادگیرنده تحریف می‌کند و تنها ازطریق بازسازی مفهومی و مواجهه با تضادهای شناختی است که یادگیری عمیق رخ می‌دهد. این آثار نشان می‌دهند که نفوذ باشلار در آموزش ریاضی گسترده‌تر از آن است که صرفاً ازطریق ارجاعات مستقیم قابل ردیابی باشد.

۲.۲. معماری دانش ریاضی (MKA): مکانیسم‌های ساخت، اصلاح و عبور از موانع. نظریه معماری دانش ریاضی (MKA) چارچوبی ساختاری است که چگونگی ساخت، سازمان‌دهی و تحول دانش ریاضی را ازطریق پنج مکانیسم شناختی بنیادی توضیح می‌دهد: ترجمه، فشرده‌سازی، بازآرایی، هماهنگی و گذار معرفتی. این مکانیسم‌ها مجموعه‌ای از کنش‌های مهندسی شناختی هستند که یادگیرنده برای ساخت مفاهیم جدید، یکپارچه‌سازی معماری‌های موجود و مواجهه با چالش‌های مفهومی به‌کار می‌گیرد [۱].

²³Knowledge-in-Pieces

در پیشینه نظری این مقاله، معماری دانش ریاضی (MKA) دو نقش کلیدی و محوری ایفا می‌کند:

- نشان می‌دهد که عبور از مانع معرفتی یک فرایند چندمرحله‌ای و تدریجی است (و نه صرفاً یک تغییر ناگهانی و آنی)؛
- امکان تحلیل شکست‌های یادگیری را فراهم می‌کند؛ از طریق تشخیص این‌که کدام مکانیسم مشخص (مانند ترجمه یا گذار معرفتی) مختل شده‌است.

لازم است تأکید کنیم که در این پژوهش، MKA صرفاً به‌عنوان یک تبیین بهینه موجود برای شکست‌های سیستمی مشاهده‌شده در وینیت‌ها پیشنهاد می‌شود؛ نه این‌که وینیت‌ها اثبات‌کننده صحت MKA باشد. درواقع، تلاش ما نشان دادن این است که MKA یک لنز تحلیلی قدرت‌مند برای مشاهده و درک زوایای پنهان این شکست‌ها فراهم می‌سازد.

اگر نظریه‌هایی چون شونفلد، دی‌سسا یا فیشبین مانع یادگیری را توصیف می‌کنند، MKA می‌گوید که یادگیرنده برای عبور از این مانع به چه حرکاتی نیاز دارد. این پیوند میان منطق باشلاری و مکانیسم‌های معماری دانش، زیربنای تحلیل موردی در بخش‌های بعدی مقاله است.

در ادامه هریک از این پنج مکانیسم را معرفی می‌کنیم:

ترجمه. ^{۲۴} ترجمه جابه‌جایی نظام‌مند یک سازه مفهومی از یک نظام بازنمایی به نظامی دیگر است. شرط اساسی ترجمه معتبر، حفظ ساختار معنایی عمیق آن سازه است، حتی اگر ابزارهای نمایش کاملاً تغییر کنند. حوزه اثر این مکانیسم معمولاً میان دو معماری یا دو نظام بازنمایی متفاوت است (مثلاً هندسه و جبر) و کارکرد اصلی آن، دسترس‌پذیر ساختن ابزارهای یک حوزه برای حل مسائل حوزه‌ای دیگر است. همانند ابداع دستگاه مختصات توسط دکارت که پلی بین معماری‌های عظیم هندسه اقلیدسی و جبر نمادین است.

فشرده‌سازی. ^{۲۵} فشرده‌سازی فرآیندی شناختی است که در آن یک فعالیت پیچیده، چندمرحله‌ای و زمان‌بر به یک سازه یا مفهوم واحد، ایستا و قابل‌دستکاری بدل می‌شود. این مکانیسم، ابزار ساز اصلی در معماری دانش است. این مکانیسم به‌صورت فرکتالی در مقیاس‌های مختلف عمل می‌کند. در سطح خرد، این همان فرآیندی است که طی آن، رویه $a \times a \times \dots \times a$ به سازه مفهومی a^n فشرده می‌شود. در مقیاس کلان تاریخی، فرآیند طولانی و چند دهه‌ای کار بر روی رویه‌های محاسباتی پراکنده در حوزه جایگشت‌ها، در نهایت در سازه انتزاعی گروه فشرده شد.

بازآرایی. ^{۲۶} بازآرایی زمانی رخ می‌دهد که ورود یک ایده، ابزار یا مثال نقض جدید، روابط میان اجزای دانش موجود را بازچینش می‌کند و شبکه‌ای تازه و کارآمدتر می‌سازد. این مکانیسم نقش مهندس نوسازی و مقاوم‌سازی را دارد. حوزه اثر آن درون یک معماری است و کارکردش حل تناقضات، رفع بدفهمی‌ها و افزایش انسجام شبکه مفهومی. مانند بازآرایی ریمان در سری‌های نامتناهی، که منجر به حل بحران مفهومی از طریق خلق یک معماری پیچیده‌تر با دسته‌بندی‌های جدید (همگرایی مشروط/ غیرمشروط) شد.

هماهنگی. ^{۲۷} هماهنگی فرآیند خلافت‌آه‌ای است که دو یا چند معماری یا ساختار مفهومی مجزا را در یک نظام نو و یکپارچه ادغام می‌کند. این مکانیسم نقش شهرساز کلان را دارد. برخلاف ترجمه که تنها پلی بین دو حوزه می‌سازد، هماهنگی با تغییر قوانین و ایجاد زیرساخت‌های تازه، معماری‌ای نو خلق می‌کند. هماهنگی فرآیندی است که در آن دو معماری درهم ادغام می‌شوند و یک معماری

²⁴Translation

²⁵Compression

²⁶Reconfiguration

²⁷Coordination

کاملا جدید با قوانین و موجودیت‌های خاص خود پدید می‌آید. مانند خلق هندسه تحلیلی به واسطه محاسبه‌پذیر کردن استدلال‌های هندسی از طریق معرفی دستگاه مختصات.

^{۲۸} گذار معرفتی به معنای تغییر در معیارهای بنیادین صدق و اعتبار در دانش ریاضی است؛ زمانی که جامعه ریاضی یا یک یادگیرنده، چارچوبی نو برای تشخیص ریاضیات معتبر اتخاذ می‌کند. این مکانیسم نقش انقلاب و بازنویسی قانون اساسی را دارد. حوزه اثر آن بر اصول بنیادین یک معماری است و برخلاف تغییرات تکاملی، یک دگرگونی ریشه‌ای در نحوه شناخت، استدلال و اعتباربخشی است. مانند رویارویی با هندسه هذلولوی و به چالش کشیدن بدهات اقلیدسی و گذار از هندسه اقلیدسی به نااقلیدسی و تغییر بنیادین در معیار حقیقت؛ تغییر از انطباق با شهود به سازگاری منطقی درونی یک سیستم.

۳. تحلیل موانع معرفتی بنیادین: کالبدشکافی با MKA

اکنون که چارچوب نظری موانع معرفتی و ابزار تحلیلی (MKA) را ایجاد کردیم، از این چارچوب برای کالبدشکافی سه موقعیت کلاسیک استفاده می‌کنیم. سه وینیت کاردینالیتی نامتناهی، سری هارمونیک و گروه خارج قسمتی به این دلیل انتخاب شده‌اند که نمونه بارز موانع معرفتی باشلاری هستند؛ شهودهای ریشه‌دار (دانش پیشین) مستقیماً با تعریف صوری ریاضی (دانش جدید) در تضاد قرار می‌گیرد.

همان‌طور که در تحلیل شونفلدی اشاره شد، این مانع به صورت باور و شکست در کنترل ظاهر می‌شود. در ادامه، ما نشان می‌دهیم که این شکست فراشناختی، در سطح شناختی، یک شکست زنجیروار است که در آن، مانع معرفتی واحد، مکانیسم‌های MKA را به‌طور سیستماتیک مختل می‌کند.

وینیت ۱ (کاردینالیتی نامتناهی). در کلاس مبانی ریاضی، استاد گزاره‌ای بنیادین از نظریه کانتور را بیان می‌کند:

«تعداد اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) با تعداد اعداد زوج ($\mathbb{E}$) برابر است.»

سپهر، بلافاصله واکنش نشان می‌دهد: «استاد چطور ممکن است؟ مگر می‌شود یک زیرمجموعه، هم‌تعداد با کل مجموعه باشد؟ $\mathbb{N}$ که هم اعداد زوج را دارد و هم فرد! پس قطعاً بزرگ‌تر است.»

استاد تعریف رسمی هم‌اندازه بودن را ارائه می‌دهد: «دو مجموعه هم‌اندازه‌اند اگر و تنها اگر یک تناظر یک‌به‌یک بین آن‌ها وجود داشته باشد.» سپس تابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{E}$ را که با $f(n) = 2n$ تعریف شده‌است، روی تخته می‌نویسد و نشان می‌دهد که این تابع، یک‌به‌یک و پوشاست.

سپهر فرمول را می‌فهمد، منطق جبری تابع را می‌پذیرد، اما همچنان قانع نشده است و می‌گوید: «ولی هنوز فکر می‌کنم غلط است! ما در $\mathbb{N}$ به‌تعداد دو برابر $\mathbb{E}$ عدد داریم.»

واکنش سپهر یک شکست ساده در یادگیری نیست؛ بلکه یک مقاومت فعال است. این، نمونه بارز یک مانع معرفتی به معنای باشلاری آن است: دانش قبلی (شهود متناهی) که زمانی مفید بوده، اکنون به مانع اصلی معرفتی در پذیرش دانش جدید (کاردینالیتی نامتناهی) تبدیل شده‌است.

در این وینیت، شکست یادگیری صرفاً ناتوانی در پذیرش یک تعریف جدید نیست؛ بلکه واکنشی ساختاری است که از برخورد شهود متناهی با معماری صوری بی‌نهایت ناشی می‌شود. همان‌طور که خواهیم دید، این واکنش در مکانیسم‌های MKA قابل ردیابی است.

تحلیل وینیت. شکست اصلی سپهر، یک شکست در بازآرایی است. معماری دانش او بر یک اصل نانوخته اما قدرت‌مند بنا شده‌است: «جز، کوچک‌تر از کل است.» این اصل، در دنیای متناهی تجربیات روزمره، یک قانون مطلق است. گزاره استاد

²⁸Epistemic Shift

$(|\mathbb{N}| = |\mathbb{E}|)$ صرفاً یک داده ناسازگار^{۲۹} نیست [۶]؛ بلکه یک بحران مفهومی است که این اصل موضوعی را به‌طور مستقیم مورد هدف قرار می‌دهد.

سپهر به‌جای تخریب و بازسازی این ساختار قدیمی (یک بازآرایی پرهزینه)، ترجیح می‌دهد داده جدید (تابع $f(n) = 2n$) را به حاشیه براند [۶] و آن را به‌عنوان یک حیلۀ منطقی رد کند، نه یک حقیقت. این مقاومت در برابر بازسازی، همان ایستایی ذهنی باشلاری است [۳]. تال و وینر این مانع بازآرایی را تضاد تصویر مفهومی ریشه‌دار با تعریف مفهومی می‌نامند [۱۹].

شکست در بازآرایی، مستقیماً توسط یک مانع عمیق‌تر پشتیبانی می‌شود: شکست در گذار معرفتی. سپهر در یک معیار حقیقت قدیمی گیر کرده‌است. مانع معرفتی در این‌جا، اتکای شهودی است. معیار حقیقت برای سپهر، سازگاری با شهود تجربی و فیزیکی است. اما استاد در حال ارائه یک معیار حقیقت جدید است: سازگاری منطقی درونی با تعریف رسمی. این ایستایی معرفتی^{۳۰}، یعنی گیرکردن در یک معیار حقیقت قدیمی‌تر و نپذیرفتن معیارهای جدید، در ادبیات شونفلد به‌صورت یک باور محدودکننده ظاهر می‌شود؛ باوری که می‌گوید ریاضیات نباید با شهود فیزیکی در تضاد باشد، و همین باور سیستم کنترل سپهر را از پایش^{۳۱} منطقی باز می‌دارد. همان باور که «ریاضیات باید با عقل سلیم سازگار باشد»، و این باور، مانع از پذیرش قانون اساسی جدید در دنیای نامتناهی می‌شود. این همان شهود قهری فیشبین است؛ شهود «جز کوچک‌تر از کل است» آن قدر قدرت‌مند و بدیهی جلوه می‌کند که درمقابل اثبات منطقی (تابع) مقاومت می‌کند. در این‌جا می‌بینیم که گذار از معنا به تعریف چقدر می‌تواند دشوار باشد. این گذار مستلزم پذیرش آن است که ریاضیات می‌تواند برخلاف شهود طبیعی حرکت کند. مانع گذار معرفتی قدرت شهود قهری در برابر منطق صوری است.

این دو شکست بنیادین (در بازآرایی و گذار معرفتی)، منجر به شکست در ترجمه نیز می‌شود. سپهر باید کلمه تعداد را از زبان روزمره (مبتنی بر شمارش متناهی) به زبان منطق آنالیز (مبتنی بر تناظر یک‌به‌یک) ترجمه کند.

چیزی که در این‌جا باعث ایجاد مانع می‌شود این است که سپهر کلمه تعداد را با فرآیند شمارش یکسان می‌داند. او نمی‌تواند این نماد (کلمه تعداد) را از آن فرآیند رها و معنای جدید (تناظر) را به آن متصل کند. او تابع را می‌بیند، اما این ترجمه را باور نمی‌کند؛ او فکر می‌کند این تابع، چیزی غیر از تعداد را نشان می‌دهد. در این‌جا سپهر باید مفهوم اندازه متناهی را به مفهوم کاردینالیته نامتناهی ترجمه کند.

حتی زمانی که سپهر تلاش می‌کند تابع را بررسی کند، شکست دیگری رخ می‌دهد: شکست در فشرده‌سازی. او تابع را به‌عنوان یک رویه بی‌پایان می‌بیند: ۱ به ۲ می‌رود، ۲ به ۴ می‌رود، ۳ به ۶ می‌رود ...

سپهر در این فرآیند الگوریتمی گیر کرده‌است. او قادر نیست این رویه نامتناهی را در یک سازه مفهومی واحد و ایستا فشرده کند؛ سازه‌ای به نام هم‌توانی. این شکست در فشرده‌سازی، مانع از آن می‌شود که او بتواند از برابری کاردینالیته به‌عنوان یک ابزار مفهومی در ساختارهای پیچیده‌تر استفاده کند (مقایسه کنید با کپسوله‌سازی^{۳۲} دوبینسکی^{۳۳} و شی‌انگاری^{۳۴} اسفارد^{۳۵} [۲، ۸، ۱۷]). در این‌جا دانشجو باید مفهوم تناظر یک‌به‌یک را فشرده‌سازی کند و بپذیرد که این تعریف کاردینالیته است.

²⁹Anomalous Data

³⁰Epistemic Fixation

³¹Monitoring

³²Encapsulation

³³Ed Dubinsky

³⁴Reification

³⁵Anna Sfard

شکست سپهر به یک موضوع ویژه نظریه مجموعه‌ها محدود نیست. منطق مانع معرفتی او، اتکای بیش‌ازحد به شهود طبیعی، در حوزه‌های دیگر ریاضی نیز تکرار می‌شود. در وینیت بعد، می‌بینیم که همین ساختار شناختی چگونه در زمینه‌ای دیگر (سری‌ها در آنالیز) دوباره ظاهر می‌شود.

وینیت ۲ (سری هارمونیک). در درس آنالیز، استاد مبحث همگرایی سری‌ها را تدریس می‌کند. او سری هارمونیک را روی تخته می‌نویسد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

استاد پس از نوشتن چند جمله اول سری، می‌گوید: «این سری، با این که جمله عمومی‌اش $(\frac{1}{n})$ به صفر میل می‌کند، واگرا است.» او با استفاده از روش گروه‌بندی جملات و سپس آزمون انتگرال (مساحت زیر نمودار $f(x) = 1/x$) اثبات می‌کند که این سری واگرا است و مجموع آن به بی‌نهایت میل می‌کند و می‌نویسد $S_n \rightarrow \infty$. کیهان، به شدت مقاومت می‌کند: «استاد، ولی جملات دارند مرتباً کوچک‌تر می‌شوند. مگر می‌شود مجموع چیزهایی که تقریباً هیچ‌اند، بی‌نهایت شود؟»

سپس استاد نمودار تابع را رسم می‌کند و مساحت زیر نمودار را به نمایش می‌گذارد و نشان می‌دهد این مساحت نامحدود است و دلیل واگرایی همان است.

ولی کیهان این را فقط یک ترفند هندسی می‌داند. در ذهن او واقعیت عددی عوض نمی‌شود. باخود می‌گوید: «وقتی ورودی به صفر می‌رود، چیزی برای اضافه شدن نمی‌ماند. پس باید یک جایی متوقف شود.»

در ظاهر، مساله کیهان یک مساله محاسباتی ساده درباره سری‌هاست؛ اما مکانیسم شکست او نشانه‌ای از همان مقاومت باشلاری است که در وینیت نخست دیده شد. این بار، نه شهود متناهی جز-کل، بلکه شهود دینامیکی «زوال جز منجر به توقف کل می‌شود» در برابر معماری صوری سری‌ها مقاومت می‌کند.

تحلیل وینیت. شکست کیهان، ناتوانی در محاسبه نیست؛ او حد $\frac{1}{n}$ را به درستی صفر می‌داند. شکست او یک مانع معرفتی تمام‌عیار است: باور به این که «زوال جز، توقف کل را تضمین می‌کند».

دانشجو ناچار است معیار حقیقت برای همگرایی را تغییر دهد. در دنیای شهودی و دنباله‌ها، کوچک شدن نشانه پایان است. اما در دنیای سری‌ها، معیار حقیقت جدید، سرعت همگرایی است. او ناچار است از معیار شهودی کوچک شدن جملات به معیار تحلیلی سرعت زوال گذر کند.

در این جا مانع معرفتی به صورت «اگر خروجی یک فرآیند به صفر می‌رود، اثرش بر سیستم باید ناپدید شود» دیده می‌شود. این باور مانع از فهم این دگرگونی مفهومی می‌شود که صفر شدن شرط لازم است، نه کافی.

درک سری‌ها نیازمند هماهنگی [در سطح خرد] هم‌زمان دو فرآیند پویاست: فرآیند زوال جملات $(a_n \rightarrow 0)$ و فرآیند انباشت مجموع‌های جزیی $(S_n \rightarrow \infty)$.

کیهان دچار پدیده تمرکز موضعی است. ذهن او فقط روی تک جملات متمرکز است و نمی‌تواند این فرآیند خرد را با فرآیند کلان (انباشت) هماهنگ کند. در معماری دانش او، منطق جمله بر منطق مجموع سایه انداخته است.

برای غلبه بر این شهود، دانشجو باید بتواند مساله را از معماری گسسته (جمع اعداد) به معماری پیوسته (سطح زیر نمودار $1/x$) ترجمه کند (مقایسه کنید با [۹]). اما کیهان نمودار و انتگرال را ترفند محاسباتی می‌بیند؛ در نتیجه نمی‌تواند بفهمد که $(\ln x)$ خود تبلور هندسی و مفهومی همان انباشت آرام سری است. این شکست ترجمه‌ای، مهم‌ترین مانع اوست.

در این جا می بینیم که چگونه مانع معرفتی، کنترل را از کار می اندازد. کیهان به جای زیر سوال بردن شهود خود، از آن دفاع می کند: «با عقل جور در نمی آید.» این جمله نشان دهنده تعلیق فعالیت ارزیابی است و بنابراین، تفکر تحلیلی متوقف می شود. تا این جا دو نمونه از موانع معرفتی را دیدیم که هر دو ریشه در شهودهای عددی و تحلیلی دارند. اما موانع باشلاری محدود به محتوای عددی نیستند؛ در سطوح بالاتر جبر نیز، گاهی مانع معرفتی خود ساختار است. وینیت سوم این نوع خاص از مانع را نشان می دهد: جایی که یادگیرنده نمی تواند سطوح هستی شناسی^{۳۶} مفاهیم ریاضی را بپذیرد.

وینیت ۳ (گروه خارج قسمتی). در درس جبر، استاد مفهوم چالش برانگیز گروه خارج قسمتی را تدریس می کند. او توضیح می دهد که عناصر این گروه جدید، دیگر اعداد یا عناصر منفرد نیستند، بلکه هم دسته ها هستند؛ یعنی هر عضو ساختار جدید، خود یک مجموعه از عناصر G به شکل aH است. سپس عمل گروه را معرفی می کند:

$$(aH)(bH) = (ab)H.$$

ناهید، با دیدن این تعریف دچار چالش می شود و می گوید: «استاد، این تعریف منطقی نیست. aH یک عدد یا یک عنصر نیست؛ مجموعه ای از عنصر است. چطور می شود مجموعه ها را به جای عناصر در هم ضرب کرد؟ ضرب برای عناصر تعریف شده است، نه برای کل یک دسته.»

سپس به مثال اعداد صحیح اشاره می کند: «مثلا کلاس 2 شامل بی نهایت عدد گسسته $..., 2, 5, 8, ...$ است. چطور ممکن است تمام این ها ناگهان به یک شی واحد تبدیل شوند؟»

این واکنش اولیه ناهید، که یک مجموعه نمی تواند نقش یک عنصر را بپذیرد، از همان جنس مقاومت های قبلی است؛ اما این بار در سطح ساختارهای جبری. در ادامه نشان می دهیم چگونه همین مقاومت، مکانیسم های فشرده سازی و بازآرایی را به طور مستقیم مختل می کند.

تحلیل وینیت. واکنش ناهید شکستی محاسباتی نیست؛ او قوانین ضرب، هم نهشتی، و حتی کار با کلاس های باقیمانده را می داند. او با یک مانع معرفتی درگیر است؛ نمی تواند بپذیرد که یک مجموعه در یک سطح، در سطحی بالاتر می تواند عنصر شود. برای ناهید عنصر یعنی چیزی تجزیه ناپذیر، و یک مجموعه هرگز نمی تواند جای عنصر بنشیند. بنابراین نمی تواند aH را شی ببیند؛ تنها لیستی از عناصر است. این همان شکست در مکانیسم فشرده سازی است. از طرفی، درک کلاس های هم ارزی مستلزم بازآرایی سلسله مراتب ریاضی است؛ یک موجودیت می تواند در سطح پایین مجموعه باشد و در سطح بالا عنصر. او این نسبت لایه ها را نمی پذیرد؛ و این مقاومت ساختاری باعث می شود نتواند جهان مفهومی جدید را سازمان دهی کند. در نتیجه در مکانیسم بازآرایی شکست می خورد.

در نهایت مفهوم گروه خارج قسمتی، که ماهیتی چندلایه و ساختاری دارد، برای او غیر قابل فهم می شود و تعریف ضرب در G/H را ذاتا متناقض می پندارد. در این جا می بینیم که مانع باشلاری، چگونه به یک باور شونفلدی تبدیل شده است: «عملیات ریاضی فقط روی اعداد تعریف می شوند، نه روی ساختارها.» این باور، سیستم کنترل ناهید را فلج می کند و اجازه نمی دهد او تعاریف صوری را حتی به صورت آزمایشی اجرا کند.

۴. بحث و نتیجه گیری

تحلیل سه وینیت کلاسی متمایز، کاردینالیته نامتناهی، سری هارمونیک و گروه خارج قسمتی، نشان داد که دشواری های یادگیری در سطوح پیشرفته ریاضیات، خطاهای موضعی یا بدفهمی های ایزوله نیستند؛ بلکه نمادهایی از یک فروپاشی سیستمی در معماری

³⁶Ontological

شناخت یادگیرنده‌اند. به عبارت دیگر، این دشواری‌ها زمانی رخ می‌دهد که مکانیسم‌های ضروری شناخت، مانند توانایی بازآرایی ساختارهای قدیمی یا فشرده‌سازی رویه‌ها به سازه‌های مفهومی، در مواجهه با مفاهیم جدید فعال نشود. پافشاری سپهر بر شهود «جز کوچک‌تر از کل»، مقاومت کیهان در برابر واگرایی مجموع جملات زوال یافته و ناتوانی ناهید در پذیرش مجموعه به مثابه عنصر، تجلی سازوکارهای شناختی زیربنایی مشترک است؛ مقاومت ساختارهای شناختی پیشین در برابر دانش جدید. در این مقاله استدلال کردیم که این مقاومت‌ها، نمونه‌های بارز موانع معرفتی به معنای باشلاری است که اکنون می‌توانیم آن‌ها را در چارچوب‌های مدرن‌تر شناسایی کنیم.

ریشه‌یابی شکست: ظهور مانع معرفتی باشلاری. نخستین لایه تحلیل، بازگشت به ریشه‌های باشلاری است. باشلار یادآور می‌شود که یادگیرندگان جهان را با شهودهای باستانی می‌خوانند؛ معرفت‌هایی که تلاش می‌کنند مفاهیم جدید را به قالب‌های آشنای خود تحمیل کنند [۳]. سه وینیت این مقاله تجلی روشن همین پدیده در سه قلمرو متفاوت ریاضیات بودند:

- در کاردینالیتی، دانشجو شهود متناهی را بر نامتناهی تحمیل کرد؛
 - در سری هارمونیک، شهود دینامیکی توقف بر تحلیل همگرایی سایه انداخت؛
 - در گروه خارج قسمتی، تصور هستی‌شناسی شی منفرد مانع از پذیرش ساختار جدید شد.
- در هر سه مورد، مقاومت نه ناشی از ناآشنایی با تعریف رسمی، بلکه ناشی از سیطره نظام پیشینی فهم بود.

ترجمه مانع به رفتار: خوانش شونفلدی. اما این مانع معرفتی چگونه در رفتار حل مساله ظاهر می‌شود؟ تحلیل شونفلدی نشان می‌دهد که این موانع باشلاری، مستقیماً به شکست در لایه کنترل تبدیل می‌شود. در وینیت‌های بررسی شده، دیدیم که مانع معرفتی باعث شد معیار قضاوت دانشجو از مبانی نظری به عقل سلیم تغییر کند (کاردینالیتی)، یا در برابر تناقض ظاهری، راهبرد بازیابی را رها کند (سری هارمونیک)، و یا مسیر استدلال رسمی را به نفع معیارهای شهودی کنار بگذارد (گروه خارج قسمتی). بدین ترتیب، ما نشان دادیم که شکست کنترلی شونفلد، درواقع لایه فراشناختی همان پدیده‌ای است که باشلار در لایه معرفت‌شناسی ریشه‌یابی می‌کرد.

کالبدشکافی شکست: نقش معماری دانش ریاضی (MKA). حال سوال این است که این شکست کنترلی، کدام چرخ دنده‌های ذهنی را از کار می‌اندازد؟ تحلیل ما می‌گوید که اگرچه سازوکار شناختی زیربنایی کلی (مانع معرفتی) یکسان است، اما هر وینیت بیانگر اختلال در یک مکانیسم محوری خاص است:

- کاردینالیتی: شکست در بازآرایی؛ ناتوانی در تخریب شبکه مفهومی اندازه؛
- سری هارمونیک: شکست در گذار معرفتی؛ ناتوانی در تغییر معیار حقیقت همگرایی؛
- گروه خارج قسمتی: شکست در فشرده‌سازی؛ ناتوانی در بازنمایی مجموعه به مثابه شی واحد.

این تفاوت‌های ظاهری درواقع سه تجلی از یک فرآیند واحد هستند: ناسازگاری بین ساختار مفهومی لازم برای فهم مفهوم جدید و ساختار موروثی از تجربه قبلی.

دلالت‌های آموزشی. اهمیت این تفکیک نظری زمانی آشکار می‌شود که به بافت‌های آموزشی خاص، مانند آموزش ریاضی در ایران، می‌نگریم. یکی از انگیزه‌های اصلی این تحقیق، پُرکردن خلا مفهومی در ادبیات پژوهشی داخلی است؛ جایی که مفهوم مانع معرفتی تقریباً غایب است و اغلب با بدفهمی^{۳۷} خلط می‌شود. تحلیل ما نشان داد که این تمایز، بنیادین است: بدفهمی یک خطای محتوایی است، اما مانع معرفتی ذاتاً محصول دانش پیشین موفق است. فقدان این تمایز باعث شده است بخش مهمی از تحلیل‌های مفهومی

³⁷Misconception

در ایران سطحی باقی بماند. بازگشودن بحث موانع معرفتی، ابزاری نظری فراهم می‌کند که می‌تواند خطاهای پایدار یادگیرندگان ایرانی را بادقت بسیار بیشتری تحلیل کند و آن را از سطح اشتباهات موردی به سطح ساختارهای شناختی ارتقا دهد.

محدودیت‌ها و پیشنهادها. تحلیل ارائه شده در این مقاله، اگرچه از نظر نظری غنی است، اما دارای محدودیت‌هایی است. این مقاله یک پژوهش مفهومی است که بر ابعاد شناختی موانع یادگیری تمرکز دارد. عوامل حیاتی دیگر مانند عوامل انگیزشی، باورهای عاطفی و تاثیر بافت اجتماعی-فرهنگی بر یادگیری دانشجو، به‌طور آگاهانه در این پژوهش بررسی نشده‌است. این پژوهش بر سه وینیت متمرکز بود که اگرچه به‌دقت انتخاب شده‌اند، اما لزوماً نماینده تمام موانع معرفتی در یادگیری نیستند. برای تایید تجربی فرضیه‌ها، به مطالعات کمی در مقیاس بزرگ نیاز است. پیشنهاد می‌شود که در پژوهش‌های آتی آزمون‌هایی طراحی شود که به‌طور مستقیم ناتوانی دانشجو در ترجمه، بازآرایی یا فشرده‌سازی را اندازه‌گیری و ارتباط آن با شکست در یادگیری مفاهیم پیشرفته را بررسی کند.

سخن پایانی. شکست در یادگیری ریاضی زمانی فهم‌پذیر می‌شود که موانع معرفتی باشلاری را جدی بگیریم و آن‌ها را با مدل‌های معاصر شناختی و فراشناختی یکپارچه کنیم. MKA چنین امکانی را فراهم می‌سازد و نشان می‌دهد که چرا تحلیل‌های شونفلد، تال، فیشبین و دیگران درواقع تجلی‌های مختلف یک چالش مشترک هستند؛ مقاومت ساختاری دانش در برابر تحول. بازاندیشی در این مفهوم می‌تواند به شکل‌گیری نسل جدیدی از طراحی‌های آموزشی منجر شود؛ طراحی‌هایی که نه‌صرفاً به انتقال محتوا، بلکه به معماری گذارهای شناختی می‌اندیشند.

مراجع

- [۱] سبزی، محمد و بهمانی، رضا. نظریه معماری دانش ریاضی: تحلیل و تبیین مکانیسم‌های شناختی در پرتو دیالکتیک تعمیم و انتزاع، و هم‌راستایی معرفتی (۱۴۰۴) (تحت داوری).
- [2] M. Asiala, A. Brown, D. J. DeVries, E. Dubinsky, D. Mathews, and K. Thomas, A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Res. Coll. Math. Educ.* **2** (1996), 1–32.
- [3] G. Bachelard, *The formation of the scientific mind: A contribution to a psychoanalysis of objective knowledge*. Clinamen Press, 2002 (Original work published 1938).
- [4] G. Brousseau, *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic, 1997.
- [5] C.-H. Huang, Students' use of intuitive reasoning to decide on the validity of mathematical statements. *Amer. J. Educ. Res.* **4**(14) (2016), 1025–1029.
- [6] C. A. Chinn and W. F. Brewer, The role of anomalous data in knowledge acquisition: A theoretical framework and implications for science instruction. *Rev. Educ. Res.* **63**(1) (1993), 1–49.
- [7] A. A. diSessa, Knowledge in pieces. In G. Forman and P. Pufall, eds., *Constructivism in the Computer Age*, Lawrence Erlbaum, 1988, pp. 49–70.
- [8] E. Dubinsky, Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall, ed., *Advanced mathematical thinking*, Springer, 1991, pp. 95–123.

- [9] R. Duval, *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Springer, 2017.
- [10] E. Fischbein, *Intuition in Science and Mathematics*. Kluwer, Dordrecht, 1987.
- [11] N. Hanson, *Patterns of discovery: An enquiry into the conceptual foundations of science*. Cambridge University Press, Cambridge, 1958.
- [12] P. Kloosterman and F. K. Stage, Measuring beliefs about mathematical problem solving. *Sch. Sci. Math.* **92**(3) (1992), 109–115.
- [13] J. Mason, *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Routledge, 2002.
- [14] G. Polya, *How to solve it*. Princeton University Press, 1945.
- [15] A. H. Schoenfeld, *Mathematical problem solving*. Academic Press, 1985.
- [16] A. H. Schoenfeld, Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making. In D. Grouws, ed., *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, Macmillan, 1992, pp. 334–370.
- [17] A. Sfard, On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as two sides of the same coin. *Educ. Stud. Math.* **22**(1) (1991), 1–36.
- [18] A. Sierpińska, Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educ. Stud. Math.* **18**(4) (1987), 371–397.
- [19] D. Tall and S. Vinner, Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educ. Stud. Math.* **12** (1981), 151–169.
- [20] R. K. Yin, *Case study research: Design and methods*, 5th ed. Sage Publications, 2014.