



تفسیرهای اقتصادی تحلیل پوششی داده‌ها

حسین عزیزی*

گروه ریاضی کاربردی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

hossein.azizi@iau.ac.ir

چکیده. پژوهش در زمینه‌ی کارایی تولیدی در سطح بنگاه طی چند دهه‌ی اخیر به یکی از حوزه‌های مهم و فعال تحقیقاتی تبدیل شده است؛ حوزه‌ای که هم در پژوهش عملیاتی، هم در علم مدیریت و هم در اقتصاد جایگاه ویژه‌ای یافته است. در این مقاله، دو تعریف ظاهراً متفاوت از کارایی مورد بررسی قرار می‌گیرند، اما نشان داده می‌شود که زمانی که هر دو روش برآورد بر اساس حل مسائل برنامه‌ریزی خطی انجام شوند، این دو تعریف در واقع معادل و یکسان هستند. هدف این مقاله ارائه‌ی مفاهیم بنیادی تحلیل کارایی با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) به‌عنوان ابزاری برای پژوهشگرانی است که با تحلیل کارایی و روش DEA آشنایی چندانی ندارند. همچنین، مفهوم قیمت‌های سایه با دقت و توجه ویژه مورد بحث قرار گرفته است.

این مقاله ترجمه‌ی مقاله‌ی زیر می‌باشد:

F. R. Førsund, Economic interpretations of DEA, Socio-Econ. Plann. Sci. **61** (2018), 9–15.

2010 Mathematics Subject Classification. 90B50, 90C05.

واژگان کلیدی. اندازه‌های کارایی، تحلیل پوششی داده‌ها، برنامه‌ریزی خطی، قیمت‌های سایه .
تاریخ: دریافت ۱۴۰۴/۰۹/۰۵ بازنگری ۱۴۰۴/۱۱/۲۴ پذیرش ۱۴۰۵/۰۱/۲۴ انتشار برخط ۱۴۰۵/۰۳/۳۱
نحوه ارجاع به این مقاله: ح. عزیزی، تفسیرهای اقتصادی تحلیل پوششی داده‌ها، به سوی علوم ریاضی، ۶ (۱۴۰۵)، شماره ۱، ۳۱-۱۵.

© دانشگاه فردوسی مشهد.

۱. مقدمه

اندازه‌گیری کارایی تولیدی طی چند دهه‌ی اخیر به تدریج توسعه یافته و به یکی از حوزه‌های پژوهشی مهم در رشته‌های اقتصاد، علم مدیریت و پژوهش عملیاتی تبدیل شده است. دو اثر اولیه در این زمینه متعلق به فارل^۱ [۸] و چارنز^۲ و همکاران [۴] هستند. اگرچه مقاله‌ی دوم از تعریف کارایی ارائه شده در مقاله‌ی اول بهره می‌گیرد، اما رویکرد این دو اثر در نحوه‌ی تدوین و محاسبه‌ی اندازه‌های کارایی با یکدیگر متفاوت است. این تفاوت رویکردها تأثیر قابل توجهی بر مسیر تکامل این حوزه‌ی پژوهشی در اقتصاد، علم مدیریت و پژوهش عملیاتی داشته است، چراکه پژوهشگرانی با پیش‌زمینه‌ی علمی اخیر، غالباً سهم و اهمیت کار فارل [۸] را نادیده گرفته‌اند. هدف این مقاله، بررسی برخی از مسائل بنیادی در ادبیات مربوط به کارایی است، با تمرکز ویژه بر تفاوت‌های میان تفسیرهای اقتصادی و صورت‌بندی‌های مبتنی بر پژوهش عملیاتی در زمینه‌ی کارایی. از این رو، این مقاله می‌تواند به‌ویژه برای پژوهشگرانی از رشته‌هایی غیر از اقتصاد مفید واقع شود. علاوه بر این، مقاله می‌تواند به‌عنوان مقدمه‌ای بر تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)^۳ — اصطلاحی که نخستین بار در منبع [۴] ابداع شد — مورد استفاده قرار گیرد. در این مقاله، ضمن روشن ساختن موانع و چالش‌های بالقوه در تحلیل‌های کارایی، مبانی نظری تحلیل کارایی با استفاده از DEA به‌عنوان ابزاری برای پژوهشگرانی که آشنایی چندانی با تحلیل کارایی و روش DEA ندارند، تشریح می‌شود. فرض بر این است که خواننده با مفاهیم پایه‌ای برنامه‌ریزی (خطی) آشنایی دارد.

روند این مقاله به شرح زیر است: در بخش ۲، تعریف‌های اندازه‌های کارایی در دو مقاله‌ی اولیه‌ی فارل [۸] و چارنز و همکاران [۴] مرور و به تفاوت رویکردها اشاره شده است. بخش ۳ به بررسی تفسیر قیمت‌های سایه (متغیرهای دوگان یا وزن‌ها) در مسائل DEA که به‌صورت مسائل برنامه‌ریزی خطی تنظیم می‌شوند، می‌پردازد.^۴ بخش ۴ مرور کوتاهی بر دو پیشرفت مهم مرتبط با پیامدهای سیاستی ارائه می‌دهد. در بخش ۵، نتیجه‌گیری‌ها مطرح می‌شوند.

۲. تعریف‌های اندازه‌ی کارایی

۱.۲. مقدمه. تعریف بنیادین کارایی ظاهراً در دو مقاله‌ی اولیه متفاوت است؛ فارل [۸] تعریف خود را بر پایه‌ی مقیاس‌گذاری تناسبی لازم برای اینکه مشاهدات یک واحد ناکارا بر روی یک تابع تولید کارا (که بعدها «تابع مرز» نامیده شد) منتقل شوند قرار می‌دهد، و چارنز و همکاران [۴] تعریف خود را بر پایه‌ی شاخصی از خروجی‌های وزنی نسبت به ورودی‌های وزنی قرار می‌دهند که این نسبت را محدود می‌کنند تا کمتر یا مساوی نسبت مربوط به کاراترین واحد (نرمال شده برابر ۱) باشد.

برای انجام یک مطالعه درباره‌ی کارایی، سه عنصر باید مهیا باشند:

(i) تعریف اندازه‌های کارایی

(ii) روش‌های محاسبه‌ی اندازه‌های کارایی

(iii) داده‌های مرتبط درباره‌ی ورودی‌ها و خروجی‌های فعالیتی که می‌خواهیم کارایی آن را اندازه‌گیری کنیم.

فارل [۸] و چارنز و همکاران [۴] هم تعریف‌ها و هم روش‌ها را ارائه دادند. با این حال، زمانی که فارل در پی بحث مقاله‌اش در نشست انجمن سلطنتی آمار در ۱۹۵۶ (رجوع شود به [۸، ص. ۲۹۰]) یادداشت کرد که برنامه‌ریزی خطی تازه توسعه یافته می‌تواند

¹Farrell.

²Charnes.

³Data Envelopment Analysis (DEA).

^۴بخش‌های ۲ و ۳ همچنین از بخش‌هایی از اثر فورسوند [۱۴] اقتباس شده‌اند.

به‌کار گرفته شود، کاربرد ارائه‌شده در فارل و فیلدهاوس^۵ [۹] صرفاً برای پوشش حالت تک‌خروجی و بازدهی ثابت نسبت به مقیاس^۶ طراحی شده بود. چارنز و همکاران [۴] برنامه‌ریزی خطی را برای خروجی‌های چندگانه تعمیم دادند و از پیوند میان مسائل دوگان و اولیه استفاده کردند. این صورت‌بندی‌ها هنوز مورد استفاده‌اند و شاید توضیح دهد چرا این رویکرد بیشتر توسط پژوهشگرانی با پیش‌زمینه‌ی علم مدیریت و پژوهش عملیاتی دنبال شده است.

نیاز به داده‌های مرتبط در هر دو مقاله‌ی اولیه مورد تأکید قرار گرفت. نمایش مدل از جهان واقعی همواره باید یک ساده‌سازی باشد. از منظر روش‌شناختی بین تمرکز بر مجموعه‌ی محدودی از متغیرها و درجات آزادی یک مصالحه وجود دارد. کافی است گفته شود که انتخاب ثمربخش متغیرها بستگی به آگاهی از فعالیت‌های موردنظر دارد، همان‌گونه که توان استخراج نتایج مفید برای سیاست‌گذاری عملی نیز وابسته به آن است.

باید توجه داشت که از منظر نظری و روش‌شناختی تعیین علل تفاوت‌های کارایی میان واحدهای مورد تحلیل بسیار دشوار بوده است. بدون دانستن این علل، دشوار است که درباره‌ی سیاست‌هایی برای بهبود کارایی توصیه داد. با این حال، این مسأله خارج از محدوده‌ی اصلی مقاله است (برای بحث بیشتر رجوع کنید به فورسوند^۷ [۱۳])؛ ولی دو پیشرفت روش‌شناختی اخیر که می‌توانند فهم ما را بهبود بخشند، به‌اختصار در بخش ۴ مطرح خواهند شد.

۲.۲. تعریف‌های فارل از اندازه‌های کارایی. فارل [۸، ص. ۲۵۳] تعریف‌های رسمی از اندازه‌های کارایی ارائه نکرد، احتمالاً به این دلیل که می‌خواست بیان مطلب را ساده نگه دارد تا «برای طیف وسیعی از آمارگران اقتصادی، بازرگانان و کارمندان دولت — بسیاری از آنان که دانش اندکی از نظریه‌ی اقتصادی یا ریاضیات دارند — قابل فهم باشد». باین‌حال، نمودارهای او که به‌طور گسترده بازتولید شده‌اند، تعریف‌های کارایی او را به‌خوبی منتقل می‌کنند. شکل اصلی او، «نمودار ۱»، در شکل ۱ بازتولید شده است، اما برچسب‌های محورهای آن به نمادگذاری استاندارد ورودی تقسیم بر خروجی تغییر یافته‌اند.^۸

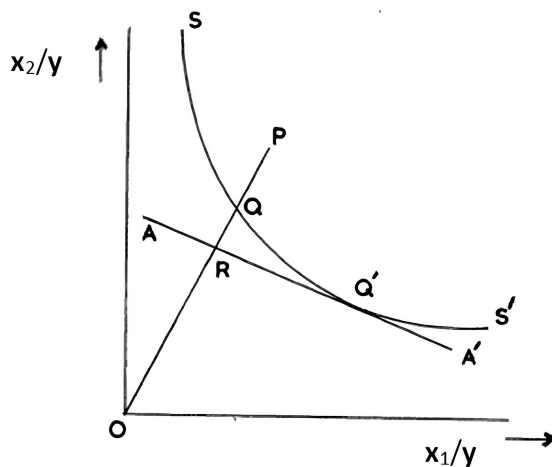


DIAGRAM 1.

شکل ۱: تصویر اصلی فارل [۸] برای اندازه‌های کارایی.

^۵Fieldhouse.

^۶Constant returns to scale.

^۷Førsund.

^۸در فارل [۸] از نمادهای x و y برای ضرایب ورودی استفاده شده است.

این تصویر بر پایه‌ی یک خروجی و دو ورودی بنا شده است. منحنی SS' ایزوکانت^۹ واحد تابع تولید کارا (یا مرزی) را نشان می‌دهد که فرض شده تحت بازدهی ثابت نسبت به مقیاس قرار دارد.^{۱۰} تمام اطلاعات فنی درباره‌ی تابع تولید در این حالت در ایزوکانت واحد در فضای ضرایب ورودی خلاصه می‌شود. واحد مورد مطالعه در نقطه‌ی P قرار دارد. کارایی فنی سپس به‌عنوان فاصله‌ی نسبی تا مرز تعریف می‌شود، در حالی که خروجی ثابت نگه داشته می‌شود اما استفاده‌ی ورودی‌ها به‌صورت متناسب کاهش می‌یابد تا به نقطه‌ی Q روی مرز برسیم؛ یعنی نسبت OQ/OP . دانش درباره‌ی فناوری مرزی به دو روش قابل‌دستیابی است:

- مبتنی بر اطلاعات مهندسی درباره‌ی فعالیت تولیدی مربوطه، یا
- مبتنی بر مشاهداتی بهترین عملکرد موجود.

در کاربردهای تجربی معمولاً رویکرد دوم دنبال می‌شود. اندازه‌های کارایی ورودی‌محور و خروجی‌محور فارل را می‌توان، در حالتی با چندین ورودی و خروجی، با استفاده از تابع تبدیل استاندارد بین ورودی‌ها و خروجی‌ها در اقتصاد تعمیم داد:

$$F(Y, X) \quad (F'_Y > 0, F'_X < 0), \quad (۱.۲)$$

که در آن X یک بردار ورودی و Y یک بردار خروجی است. می‌توانیم عبارت $F(Y, X) \leq 0$ را به‌عنوان نمایش عمومی امکانات تولید به‌صورت مجموعه‌ی زیر به‌کار ببریم:

$$T = \{(Y, X) : Y \geq 0 \text{ can be produced by } X \geq 0\}. \quad (۲.۲)$$

مرز این مجموعه متناظر با تابع تولید مرزی است، همان‌گونه که منحنی SS' در شکل ۱ نشان می‌دهد. یک بیان دیگر از مجموعه با استفاده از تابع تبدیل چنین است:

$$T = \{(Y, X) : F(Y, X) \leq 0, Y \geq 0, X \geq 0\}. \quad (۳.۲)$$

تساوی در رابطه‌ی تبدیل $F(Y, X) = 0$ یعنی روی مرز مجموعه هستیم، یعنی روی تابع مرزی؛ درحالی‌که نامساوی اکید به معنای وجود یک واحد ناکارا است. برای واحد j از میان n واحد، تعریف رسمی کارایی فنی چنین است:

$$E_{1j} = \text{Min}_{\varphi_j} \{\varphi_j : F(Y_j, \varphi_j X_j) = 0\}, \quad E_{1j} \in (0, 1], \quad j = 1, \dots, n. \quad (۴.۲)$$

فارل برای این اندازه‌ی کارایی فنی ورودی‌محور از نماد E_1 استفاده کرد.^{۱۱} فرض می‌شود که یک فناوری مرزی مشترک برای همه‌ی واحدها وجود دارد.

^۹Isoquant.

^{۱۰}بازدهی ثابت نسبت به مقیاس بدان معناست که اگر همه‌ی ورودی‌ها به‌صورت متناسبی و با همان ضریب افزایش یابند، خروجی(ها) نیز به همان نسبت افزایش خواهند یافت.
^{۱۱}فارل [۸، ص. ۲۵۹] از نمادهای با حروف کوچک e_1 و e_2 استفاده کرد، اما در فارل و فیلدهاوس [۹، ص. ۲۵۸] برای اندازه‌ی کارایی ورودی‌محور به نمادهای حرف بزرگ تغییر داد.

فارل همچنین یک اندازه‌ی کارایی فنی خروجی محور را مطرح کرد که به عنوان مقیاس‌گذاری خروجی‌ها با ثابت نگه داشتن ورودی‌ها تعریف می‌شود. او همچنین می‌خواست این اندازه، یعنی E_2 ، بین $^{\circ}$ و 1 باشد:

$$1/E_{2j} = \max_{\theta_j} \{\theta_j : F(\theta Y_j, X_j) = 0\}, \quad E_{2j} \in (0, 1], \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.2)$$

فارل برای اندازه‌ی خروجی محور، نمودار جداگانه‌ای ارائه نکرد، اما در حالت بازدهی ثابت نسبت به مقیاس این لازم نبود، زیرا همان‌طور که فارل اشاره کرد، این دو اندازه یکسان‌اند. نقطه‌ی P در نمودار 1 او به نقطه‌ی مرزی Q بر روی SS' منتقل می‌شود، با افزایش خروجی برای مجموعه ورودی‌های داده‌شده، و SS' اکنون ایزوکانتی را نشان می‌دهد که خروجی قابل حصول روی مرز را مشخص می‌کند.

اندازه‌های کارایی فارل با مفهوم تابع فاصله که در شپرد^{۱۲} [۱۷، ۱۸] معرفی شد مطابقت دارند. تابع فاصله‌ی ورودی شپرد معکوس اندازه‌ی کارایی ورودی محور فارل است، و تابع فاصله‌ی خروجی شپرد با اندازه کارایی خروجی محور فارل یکسان است. خط AA' در شکل ۱ یک خط هزینه‌ی ثابت^{۱۳} است با شیبی برابر نسبت منفی قیمت ورودی محور عمودی به قیمت ورودی محور افقی. این خط در نقطه‌ی Q' با ایزوکانت واحد مماس می‌شود. در این حالت می‌توان اندازه‌هایی مبتنی بر هزینه تعریف کرد. کارایی فنی E_1 را می‌توان نسبت هزینه‌ها در نقطه‌ی مرزی Q به هزینه‌های مشاهده‌شده سنجید؛ یعنی دوباره OQ/OP ، با ثابت نگه داشتن سطح خروجی و قیمت‌های ورودی. فارل یک اندازه‌ی کارایی کلی (OE) معرفی کرد که به صورت OR/OP اندازه‌گیری می‌شود، و یک اندازه‌ی کارایی تخصیصی (AE) یا کارایی قیمتی که به صورت OQ/OR تعریف می‌شود. اندازه‌ی اخیر نشان می‌دهد که کاهش نسبی هزینه در هنگام حرکت از نقطه‌ی مرزی به نقطه‌ای که هزینه‌ی ورودی‌ها برای خروجی داده‌شده حداقل می‌شود چقدر است. روشن است که کارایی کلی به صورت ضربی به کارایی تخصیصی تجزیه می‌شود:

$$OE = OR/OP = OQ/OP \times OR/OQ = E_1 \times AE. \quad (6.2)$$

سه مفهوم هزینه که برای پیوند دادن اندازه‌ها به وضعیت عمومی با چندین خروجی و m ورودی و یک رابطه‌ی تبدیل تابع تولید مورد نیاز است، عبارتند از:

$$C_j^0 = \sum_{i=1}^m q_i x_{ij}^0, \quad (7.2)$$

$$C_j^Q = \sum_{i=1}^m q_i \varphi_j x_{ij}^0, \quad (8.2)$$

$$C_j^* = \min \sum_{i=1}^m q_i x_{ij} \quad \text{s.t.} \quad F(Y_j, X_j) = 0, \quad Y_j \geq Y_j^0. \quad (9.2)$$

در اینجا، C_j^0 هزینه‌ی مشاهده‌شده‌ی ورودی‌ها است (نقطه‌ی P در شکل ۱)، که در آن q_i قیمت ورودی i و x_{ij}^0 مقدار مشاهده‌شده‌ی ورودی i برای واحد j است. C_j^Q هزینه‌ی ورودی‌ها در نقطه‌ی مرزی Q است، با تعدیل ورودی‌ها بر اساس نمره‌ی کارایی θ_j . C_j^* هزینه‌ی کمینه‌سازی‌شده در نقطه‌ی Q' است که خروجی حداقل برابر خروجی مشاهده‌شده باشد. کارایی ورودی محور فارل به صورت $E_1 = C_j^Q/C_j^0$ ، و کارایی تخصیصی به صورت $AE = C_j^*/C_j^Q$ ، و کارایی کلی به صورت $OE = C_j^*/C_j^0$ تعریف می‌شود. واضح است که تجزیه‌ی ضربی مشابه قبل برقرار است.

¹²Shephard.

¹³Isocost.

توجه کنید که این تحلیل‌گر است که رفتار اقتصادی حداقل‌سازی هزینه را وارد مدل می‌کند، نه الزاماً واحدهای تحت بررسی. بنابراین، هزینه بهینه C_j^* فقط یک معیار هنجاری است و ممکن است رفتار هیچ واحد مشاهده‌شده‌ای را نشان ندهد. این نکته در ادبیات به راحتی بد تعبیر می‌شود: این تحلیل‌گر است که یک واحد مصنوعی معرفی می‌کند که فناوری مرزی را رعایت می‌کند و هیچ ناکارایی فنی ندارد. نقطه‌ی Q' در شکل ۱ یک معیار فرضی است.

فارل [۸، صص. ۲۶۰-۲۶۱] استدلال‌هایی درباره‌ی ضعف‌های کارایی تخصیصی یا قیمتی مطرح می‌کند و توصیه می‌کند تمرکز بر کارایی فنی باشد. نگرانی‌های او شامل این است که کارایی قیمتی نسبت به ورود مشاهدات جدید حساس است (به واسطه‌ی تأثیر بر شکل ایزوکانت‌ها یا خطاهای اندازه‌گیری قیمت‌ها) و اینکه ترکیب فعلی ورودی‌ها ممکن است مبتنی بر قیمت‌های گذشته یا پیش‌بینی‌شده باشد نه قیمت‌های جاری، و بنابراین تنها در یک وضعیت کاملاً ایستا یک اندازه‌ی مناسب ارائه می‌دهد.

۳.۲. روش‌های برآورد. دانش مربوط به یک فناوری مرزی را می‌توان به دو روش به دست آورد: یا بر اساس اطلاعات مهندسی درباره‌ی فعالیت تولیدی مورد نظر، یا بر اساس بهترین عملکرد مشاهده‌شده. روش دوم توسط فارل [۸] توصیه شد و معمولاً در مطالعات تجربی به کار می‌رود.

فارل [۸] روشی برای برآورد یک مرز بهترین عملکرد پیشنهاد کرد که در آن داده‌ها با استفاده از یک تابع خطی قطعه‌ای ناپارامتری پوشانده می‌شوند؛ تابعی که ایزوکانت‌های محدب با شیب منفی و بازدهی ثابت نسبت به مقیاس را تحمیل می‌کند. او توضیح می‌دهد که این شیوه‌ی برآورد تابع تولید ممکن است بهترین روش نباشد اگر صرفاً هدف، برآورد مرز باشد، اما «این روش فقط از این جهت انتخاب شد که بهترین اندازه‌ی کارایی فنی را ارائه می‌دهد» [۸، صص. ۲۶۲]. ۱۴. روش برآورد او، در «نمودار ۲» اصلی، در شکل ۲ نشان داده شده است؛ جایی که ضرایب ورودی همانند نمودار ۱ روی محورها اندازه‌گیری می‌شوند. تابع تولید مرزی تحت بازدهی ثابت نسبت به مقیاس با قطعات خطی که به وسیله‌ی مشاهدات بهترین عملکرد ایجاد شده‌اند، برآورد می‌شود. برای اینکه بخش‌های انتهایی ایزوکانت واحد موازی با محورها باقی بمانند و همان نوع ایزوکانت‌های محدبی که مدنظر داشت حاصل شوند، او دو واحد مصنوعی با مقادیر $(0, \infty)$ روی محور افقی و $(\infty, 0)$ روی محور عمودی برای ضرایب ورودی وارد کرد تا بخش‌های انتهایی SS' در شکل ۲ با محورها موازی شوند (در کاربردهای عملی، یک عدد بسیار بزرگ به جای ∞ کافی است). فارل [۸] رویکرد خود را تنها در حالت «یک خروجی» به کار برد. روش او برای برآورد نمرات کارایی بر پایه‌ی حل یک دستگاه معادلات خطی بود. در این روش بیان می‌شود که مشاهدات باید در سمت راست و بالا در شکل ۲ قرار گیرند یا روی قطعات مرزی؛ هیچ نقطه‌ای نمی‌تواند به مبدأ نزدیک‌تر باشد. در بحث مقاله‌ی فارل [۸] در نشست «انجمن سلطنتی آمار» در سال ۱۹۵۶، هافمن^{۱۵} [۸، صص. ۲۹۰] مداخله‌ی مهمی انجام داد و اشاره کرد که برنامه‌ریزی خطی—که به تازگی توسعه یافته بود—می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. در فارل و فیلدهاوس [۹] برای نخستین بار برنامه‌ریزی خطی برای مسأله‌ی کارایی به کار گرفته شد، با این حال هنوز به بازدهی ثابت نسبت به مقیاس و یک خروجی محدود بود. فارل و فیلدهاوس [۹] تعمیم‌هایی برای بازدهی متغیر نسبت به مقیاس و چندین خروجی پیشنهاد دادند، اما در انجام کامل آن موفق نبودند [۱۲]. یک گروه از اقتصاددانان کشاورزی در برکلی^{۱۶} روش فارل و فیلدهاوس را با موفقیت بیشتری صورت‌بندی کردند و برنامه‌ریزی خطی را به حالت چندخروجی بسط دادند [۲، ۳]. (برای منابع بیشتر درباره‌ی کارهای گروه برکلی، بنگرید [۱۰، ۱۱]).

^{۱۴} سپس او به پیشنهاد روش‌های آماری برای برآورد توابع مرزی پارامتریک می‌پردازد که در سه دهه‌ی اول پس از انتشار اثر بنیادین او در ادبیات اقتصادی دنبال شدند [۱۰، ۱۱].

^{۱۵}Hoffman.

^{۱۶}Berkeley.

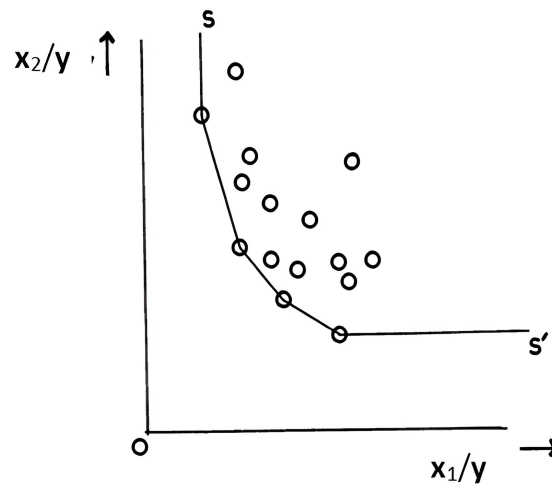


DIAGRAM 2.

شکل ۲: تصویر اصلی فارل [۸] از روش برآورد.

۴.۲. صورت نسبت محور اندازه‌ی کارایی. چارنز و همکاران [۴، ص. ۴۳] بحث خود را با بیان این موضوع آغاز می‌کنند که قصد دارند ایده‌های خود درباره‌ی اندازه‌گیری کارایی را با پیشرفت‌های رشته‌ی اقتصاد مرتبط سازند، بدین صورت که «به توابع تولید و مفاهیم مرتبط ...» ارجاع دهند. باین حال، آن‌ها همچنین می‌خواستند ایده‌های خود را به مهندسی نیز مرتبط کنند، و در واقع نقطه‌ی آغاز تعریف کارایی آن‌ها همین است؛ تعریفی که (به ظاهر) بر پایه‌ی چگونگی تعریف کارایی در آن حوزه استوار است. نقل قول کلیدی از ادبیات مهندسی چنین است: «کارایی نسبت مقدار واقعی گرمای آزادشده در یک دستگاه به بیشترین مقدار گرمایی است که می‌توانست توسط سوخت آزاد شود». (منبع این نقل قول دانشنامه‌ی آمریکانا ص. ۴۳ است.) این نقل قول—که بیشتر شبیه تعریفی برای کارایی انرژی است تا یک تعریف عمومی از کارایی—به معرفی رویکرد نسبت محور می‌انجامد، یعنی بیشینه‌سازی نسبت خروجی‌های وزنی به ورودی‌های وزنی، مشروط بر اینکه این نسبت برای همه‌ی واحدها کمتر یا مساوی یک باشد؛ جایی که وزن‌ها متغیرهای درون‌زا هستند که باید تعیین شوند. این تعریف نسبت محور تنها در حالت بازدهی ثابت نسبت به مقیاس معتبر است. تعریف کارایی برای یک واحد j_0 (با استفاده از نمادهای اصلی در چارنز و همکاران [۴]) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } h_{j_0} &= \frac{\sum_{r=1}^s u_{rj_0} y_{rj_0}}{\sum_{i=1}^m v_{ij_0} x_{ij_0}} \\
 \text{s.t. } \frac{\sum_{r=1}^s u_{rj_0} y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ij_0} x_{ij}} &\leq 1, \quad j = 1, \dots, n \\
 u_{rj_0}, v_{ij_0} &\geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{۱۰.۲}$$

در رابطه‌ی (۱۰.۲)، h_{j0} اندازه‌ی کارایی است، x و y به ترتیب بردارهای خروجی و ورودی هستند، با s خروجی و m ورودی، تعداد واحدها n است، و u_{rj0} و v_{ij0} به ترتیب وزن‌های مرتبط با خروجی‌ها و ورودی‌ها هستند.^{۱۷}

نخستین عبارت نسبت‌محور در (۱۰.۲) که کارایی را تعریف می‌کند، همان چیزی است که در اقتصاد بهره‌وری نامیده می‌شود. ساخت شاخص‌های بهره‌وری در اقتصاد یک مسأله‌ی شناخته‌شده در حوزه‌ی تجميع است. شاخص بهره‌وری ارتباط نزدیکی با شاخص کارایی دارد. اگر شاخص بهره‌وری یک واحد با شاخص بهره‌وری بهره‌ورترین واحد مقایسه شود و از تقسیم این دو، نسبتی تشکیل گردد، این نسبت یک شاخص کارایی است که واحد بهره‌ورتر به عنوان الگو عمل می‌کند. این دقیقاً همان چیزی است که قیده‌ای اعمال شده بر شاخص بهره‌وری در تعریف چارنز و همکاران [۴] تحمیل می‌کنند.

۳. تفسیر قیمت‌های سایه

همان‌طور که در بخش ۱ اشاره شد، اصطلاح «تحلیل پوششی داده‌ها» (DEA) نخستین بار در چارنز و همکاران [۴] معرفی شد و اکنون معرف مدلی است که برای برآورد اندازه‌های کارایی مانند روابط (۴.۲) و (۵.۲) به کار می‌رود. روش استاندارد به دست آوردن نمرات کارایی، استفاده از برنامه‌ریزی خطی است.

۱.۳. مدل غیرپارامتری کارایی DEA. بنکر^{۱۸} و همکاران [۱] مدل‌های بازدهی ثابت نسبت به مقیاس فارل و فیلدهوس [۹] و چارنز و همکاران [۴] را با حفظ قابلیت حل شدن از طریق برنامه‌ریزی خطی، به بازدهی متغیر نسبت به مقیاس تعمیم دادند. مجموعه‌ی امکان تولید در مدل غیرپارامتری کارایی DEA می‌تواند به صورت زیر نمایش داده شود:

$$T = \left\{ Y, X : Y \leq \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j, X \geq \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n \right\}. \quad (۱.۳)$$

برای این رابطه، فرض می‌شود که اصول تحدب^{۱۹} و امکان‌پذیری آزاد^{۲۰} که در بنکر و همکاران [۱] بیان شده‌اند برقرار باشد. ضرایب اسکالر λ_j در ادبیات DEA «وزن‌های شدت» نامیده می‌شوند. تمام مقادیر باید نامنفی باشند و حداقل یک خروجی، یک ورودی و یک وزن شدت باید به طور اکیداً مثبت باشد. اگر شرط مجموع وزن‌ها برابر ۱ حذف شود، آنگاه بازدهی ثابت نسبت به مقیاس برقرار می‌شود (در این حالت فرض مخروط بودن مجموعه‌ی T مطرح می‌شود).

مجموعه‌ی T یک مجموعه‌ی چندوجهی است که نقاط $(\sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j, \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j)$ تمام ترکیب‌های ممکن بر اساس n مشاهده را نمایش می‌دهند. نقاط رأس، نقاط کارا هستند که مرز مجموعه‌ی امکان تولید را تشکیل می‌دهند. وزن‌های λ_j باید

^{۱۷} در ادامه‌ی مقاله، برای جلوگیری از صفر شدن وزن‌ها، مجموع اسلک‌ها به تابع هدف مدل ضربی افزوده می‌شود، به طوری که این مجموع با معکوس یک عدد نامتناهی غیرارشمیدسی بسیار بزرگ M وزن‌دهی می‌گردد (نگاه کنید به استفاده‌ی فارل از نقاط مصنوعی صفر و بی‌نهایت که پیش‌تر اشاره شد). در مقاله‌ی چارنز و همکاران [۵] بیان شده است که در صورت دوگان، این افزوده شدن به این معناست که $\varepsilon = 1/M$ به عنوان کران پایین وزن‌ها در رابطه‌ی (۱۰.۲) استفاده می‌شود. با این حال، از آنجا که این مقدار می‌تواند به طور دلخواه به صفر نزدیک شود، در عمل ممکن است نرخ‌های اقتصادی را در صفر یا بی‌نهایت باقی بگذارد، و این ساختار امروزه در مطالعات کاربردی تقریباً دیگر استفاده نمی‌شود. در حال حاضر، مدل در دو مرحله حل می‌شود تا واحدهای کارا و ناکارا از هم تفکیک شوند [۶]. همچنین دلایل رسمی‌تری نیز برای عدم استفاده از مقادیر غیرارشمیدسی وجود دارد [۱۶].

^{۱۸}Banker.

^{۱۹}Convexity.

^{۲۰}Free disposability.

به‌گونه‌ای برآورد شوند که با اصل «نزدیک‌ترین مجموعه‌ی محدب پوشاننده‌ی داده‌ها» سازگار باشند. با به‌دست‌آوردن مقادیر بهینه‌ی این وزن‌ها، تخمینی از مجموعه‌ی امکان تولید و نیز مرز آن—که اغلب «تابع تولید مرزی» نامیده می‌شود—به‌دست می‌آید. هنگامی که برای برآورد مرز و اندازه‌های کارایی از برنامه‌ریزی خطی استفاده می‌کنیم، یک رابطه‌ی بنیادی میان جواب اولیه و جواب دوگان یک جواب بهینه وجود دارد. از منظر فنی می‌توان گفت که این‌که کارایی بر مبنای مدل اولیه تعریف شود یا مدل دوگان، تفاوتی ایجاد نمی‌کند. با این حال، نباید فراموش کرد که تعریف بنیادی یک اندازه‌ی کارایی در اقتصاد بر مفهوم تابع تولید مرزی استوار است و در فضای ورودی-خروجی صورت‌بندی می‌شود. بنابراین، دست‌کم برای اقتصاددانان، طبیعی است که مسأله‌ی موسوم به مسأله‌ی پوششی در تحقیق در عملیات را برای مدل اولیه، و مسأله‌ی صورت‌بندی‌شده در فضای قیمت‌های سایه را برای مدل دوگان (که در ادبیات تحقیق در عملیات «مسأله‌ی ضرایب» خوانده می‌شود) در نظر بگیرند.

امروزه رایج‌تر آن است که صورت‌بندی که داده‌ها را—مانند نمایش شکل ۲—پوشش می‌دهد، مسأله‌ی اولیه نامیده شود. مسأله‌ی دوگان از نظریه‌ی برنامه‌ریزی خطی نتیجه می‌شود. تفسیر متغیرهای دوگان (که همچنین «وزن‌ها»، «ضرایب»، یا «قیمت‌های سایه»—که در اقتصاد اصطلاح رایج‌تری است—نامیده می‌شوند) برای درک مدل کارایی DEA اهمیت کلیدی دارد. متأسفانه، چنین درکی چندان به‌صراحت در مقالات مربوط به DEA بیان نمی‌شود.

۲.۳. قیمت‌های سایه. اصطلاح قیمت‌های سایه در زمینه‌های مختلفی به‌کار می‌رود؛ با این حال، این مفهوم نباید با هزینه‌های فرصت اشتباه گرفته شود. به‌عنوان مثال، هنگام محاسبه‌ی هزینه‌ی اجتماعی یک ارتش مبتنی بر سربازی اجباری، مفهوم هزینه، قیمت سایه نیست؛ بلکه هزینه‌ی فرصت است، به این معنا که سرباز اگر شغل بازاری پذیر متناسب با مهارت‌هایش داشت، چه میزان درآمد می‌توانست کسب کند. در تحلیل کارایی، قیمت‌های سایه ارتباطی اکیداً وابسته به مسأله‌ی برنامه‌ریزی مورد استفاده برای محاسبه‌ی نمره‌های کارایی دارند. مفهوم فنی/ریاضی قیمت سایه از تکنیک لاگرانژ در حل مسائل بهینه‌سازی با قیدها ناشی می‌شود. مسأله‌ی استاندارد اولیه در ادبیات معاصر DEA که از مدل بنکر و همکاران [۱] و مجموعه‌ی T در رابطه‌ی (۱.۳) برای برآورد نمره‌های کارایی فنی فارل برای واحد j_0 استفاده می‌کند—در حالت بازدهی متغیر نسبت به مقیاس و خروجی‌محور—به صورت زیر است (با استفاده از برنامه‌ریزی خطی)^{۲۱}:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_{yj_0}} &= \max_{\lambda, \theta} \theta_{j_0} \\ \text{s.t.} \quad &\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \theta_{j_0} y_{rj_0}, \quad r = 1, \dots, s \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{ij_0}, \quad i = 1, \dots, m \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \theta_{j_0} \text{ sign free.} \end{aligned} \quad (2.3)$$

در اینجا مقیاس‌گذاری تناسبی (یا شعاعی) خروجی‌های فارل—مانند آنچه در رابطه‌ی (۵.۲) دیده می‌شود—برای تصویرکردن یک واحد ناکارا بر روی مرز استفاده شده است.

مسأله‌ی دوگان متناظر با (۲.۳) عبارت است از:

^{۲۱} در فورسوند [۱۴] از یک مدل ورودی‌محور استفاده شده است.

$$\begin{aligned}
& \min \left(\sum_{i=1}^m v_{ij_0} x_{ij_0} + u_{j_0} \right) \\
& \text{s.t.} \quad \sum_{r=1}^s u_{rj_0} y_{rj_0} = 1 \\
& \quad - \sum_{r=1}^s u_{rj_0} y_{rj} + \sum_{i=1}^m v_{ij_0} x_{ij} + u_{j_0} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \\
& \quad v_{ij_0}, u_{rj_0} \geq 0, \quad u_{j_0} \text{ sign free.}
\end{aligned} \tag{۳.۳}$$

متغیرهای u_{j_0} ، u_{rj_0} و v_{ij_0} قیمت‌های سایه روی قیدهای (۲.۳) هستند—به ترتیب، قیدهای ورودی، قیدهای خروجی و قید تحذب. در DEA معمولاً این متغیرها را ضرایب یا وزن‌ها نیز می‌نامند. نتیجه‌ی بنیادی دوگانگی برای یک جواب بهینه‌ی یکتا بیان می‌کند:

$$\theta_{j_0} = \sum_{i=1}^m v_{ij_0} x_{ij_0} + u_{j_0}. \tag{۴.۳}$$

علاوه بر مجموع وزنی ورودی‌ها—که در واحدهای بدون بعدِ اندازه‌ی کارایی بیان می‌شود—قیمت سایه‌ی u_{j_0} روی قید تحذب در حالت بازدهی متغیر به مقیاس ظاهر می‌شود. تفسیر متغیرهای دوگان بر پایه‌ی صورت‌بندی تابع لاگرانژ برای مسأله‌ی اولیه صورت می‌گیرد. با تنظیم تابع لاگرانژ برای مسأله‌ی بهینه‌سازی با قیدهای (۲.۳) برای واحد j_0 داریم:

$$\begin{aligned}
L = & \theta_{j_0} - \sum_{r=1}^s u_{rj_0} \left(\theta_{j_0} y_{rj_0} - \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \right) \\
& - \sum_{i=1}^m v_{ij_0} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} - x_{ij_0} \right) - u_{j_0} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j - 1 \right).
\end{aligned} \tag{۵.۳}$$

شرایط لازم مرتبه‌ی اول برای وجود یک جواب عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} &= \sum_{r=1}^s u_{rj_0} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{ij_0} x_{ij} - u_{j_0} \leq 0 \quad (= 0 \text{ for } \lambda_j > 0), \quad j = 1, \dots, n, \\
\frac{\partial L}{\partial \theta_{j_0}} &= 1 - \sum_{r=1}^s u_{rj_0} y_{rj_0} = 0, \\
u_{rj_0} &\geq 0 \quad (= 0 \text{ for } \theta_{j_0} y_{rj_0} < \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}), \quad r = 1, \dots, s, \\
v_{ij_0} &\geq 0 \quad (= 0 \text{ for } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} < x_{ij_0}), \quad i = 1, \dots, m.
\end{aligned} \tag{۶.۳}$$

از شرط اول نتیجه می‌شود که وزن شدت λ_{j_0} برای واحد j_0 در صورتی که واحد ناکارا باشد (یعنی $\theta_{j_0} > 1$) برابر صفر خواهد بود. با استفاده از نتیجه‌ی دوگانگی—یعنی برابری مقادیر هدف در (۲.۳) و (۳.۳)—داریم:

$$\sum_{r=1}^s u_{rj_0} y_{rj} = 1 \leq \sum_{i=1}^m v_{ij_0} x_{ij} + u_{j_0} = \theta_{j_0} \quad (۷.۳)$$

که نشان می‌دهد شرط اول در (۶.۳) با نامساوی اکید برقرار است. شرط دوم با تساوی برقرار می‌شود، زیرا ضریب گسترش آزاد است. مقدار غیرمثبت برای ضریب گسترش پذیرفتنی نیست، زیرا فرض می‌کنیم حداقل یک ورودی و یک خروجی اکیداً مثبت‌اند و حداقل یک وزن شدت باید مثبت باشد. همچنین، نمره‌ی کارایی ($1/\theta_{j_0}$) نمی‌تواند در جواب بهینه از یک بیشتر شود؛ خروجی‌ها باید برای واحدهای ناکارا افزایش یابند و برای واحدهای کارا ثابت بمانند، زیرا ماهیت مسأله، بیشینه‌سازی است. از دو شرط آخر مکمل بودن، نتیجه می‌شود که قیمت سایه برای متغیرهایی که اسلک نامنفی دارند، صفر می‌شود. فرم دوگان در (۳.۳) نشان می‌دهد که چنین متغیرهایی تأثیر مستقیمی بر واحد j_0 مورد ارزیابی ندارند. اگر این واحد درون یک وجه^{۲۲} قرار داشته باشد، آن وجه از بُعد کامل برخوردار نخواهد بود.

اگر برای مسأله‌ی (۲.۳) یک جواب یکتا داشته باشیم، آنگاه می‌توان قیمت‌های سایه‌ی قیدهای ورودی و خروجی را با به‌کارگیری قضیه‌ی پوشش برای یک واحد ناکارا تفسیر کرد. درباره‌ی تغییر در یک متغیر برون‌زا، طبق این قضیه قیمت سایه روی قید مربوطه برای یک واحد ناکارا، اثر افزایش حاشیه‌ای آن متغیر را بر تابع هدف—معکوس نمره‌ی کارایی—اندازه‌گیری می‌کند. با این حال، می‌دانیم که معمولاً ممکن است جواب‌های متعددی وجود داشته باشد، به‌ویژه برای قیمت‌های سایه. بنابراین فرض می‌کنیم برای واحدهای ناکارا که نقطه‌ی تصویرشان روی مرز در درون نسبی یک وجه قرار دارد، برای متغیرهای درون‌زا جواب‌های یکتا داریم. از این رو، با در نظر گرفتن واحد j_0 و با فرض داشتن یک جواب بهینه برای مسأله‌ی (۲.۳)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{j_0}}{\partial x_{ij_0}} &= \frac{\partial L}{\partial x_{ij_0}} = v_{ij_0} (1 - \lambda_{j_0}) = v_{ij_0}, \quad i = 1, \dots, m, \\ \frac{\partial \theta_{j_0}}{\partial y_{rj_0}} &= \frac{\partial L}{\partial y_{rj_0}} = -u_{rj_0} (\theta_{j_0} - \lambda_{j_0}) = -u_{rj_0} \theta_{j_0}, \\ \Rightarrow \frac{\partial \theta_{j_0}}{\partial (\theta_{j_0} y_{rj_0})} &= -u_{rj_0}, \quad r = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (۸.۳)$$

در بررسی تغییر ورودی i برای واحد j_0 در خط اول رابطه‌ی (۸.۳) داریم $\lambda_{j_0} = 0$. زیرا این واحد ناکاراست؛ این نتیجه از اولین شرط لازم در (۶.۳) حاصل می‌شود. با افزایش ورودی واحد j_0 ، ضریب گسترش افزایش می‌یابد؛ یعنی ناکارایی بیشتر می‌شود (نمره‌ی کارایی کوچک‌تر می‌گردد). طبق تعریف اندازه‌ی کارایی خروجی‌محور، بردار ورودی واحد j_0 روی مرز قرار دارد. واحد اندازه‌گیری قیمت سایه‌ی ورودی، «واحد ضریب گسترش به ازای واحد اندازه‌گیری ورودی» است.

در تفسیر رابطه‌ی (۸.۳) برای خروجی، پیش از پیکان نتیجه‌گیری، قیمت سایه‌ی قید خروجی در ضریب گسترش ضرب شده است. اما چون ضریب گسترش مقدار بهینه‌ی خود را دارد و می‌توان آن را ثابت در نظر گرفت، می‌توان اثر تغییر در قید خروجی را با ارزیابی تغییر در مقدار $(\theta_{j_0} y_{rj_0})$ که روی مرز قرار دارد، بررسی کرد. ضریب گسترش زمانی کاهش می‌یابد که خروجی یک واحد ناکارا افزایش یابد؛ یعنی نمره‌ی کارایی افزایش می‌یابد (واحد کارا تر می‌شود).

برای یک واحد ناکارا، قیمت سایه روی قید خروجی را می‌توان به صورت «میزان کاهش ضریب گسترش بر اثر افزایش حاشیه‌ای متغیر خروجی مورد نظر، ارزیابی شده در یک نقطه‌ی مرزی» تفسیر کرد. واحد اندازه‌گیری قیمت سایه، «واحد ضریب گسترش (بی‌بعد) به ازای یک واحد اندازه‌گیری خروجی» است.

^{۲۲}Face.

در ادبیات DEA، حاصل ضرب قیمت سایه و یک ورودی، یعنی $v_{ij_0} x_{ij_0}$ ، «ورودی مجازی» نامیده می‌شود؛ و به‌طور مشابه حاصل ضرب قیمت سایه و یک خروجی، یعنی $u_{rj_0} y_{rj_0}$ ، «خروجی مجازی» نام دارد. همان‌گونه که از تابع هدف مسأله‌ی دوگان در رابطه‌ی (۳.۳) دیده می‌شود، ورودی مجازی فقط سهم متغیر مربوطه را در نمره‌ی کارایی جواب بهینه بیان می‌کند. با این حال طبق اولین قید مسأله‌ی دوگان در (۳.۳)، خروجی مجازی تنها سهم خود را در مقدار ۱ بیان می‌کند و بی‌بعد است. برای به‌دست آوردن سهم آن در نمره‌ی کارایی، باید متغیر دوگان را در نمره‌ی کارایی ضرب کرد، همان‌گونه که در عبارت پیش از پیکان نتیجه‌گیری در خط سوم رابطه‌ی (۸.۳) دیده می‌شود.

تفسیر قیمت‌های سایه به‌صورت مفاهیم مرسوم تابع تولید را می‌توان به‌طور مستقیم با استفاده از مسأله‌ی دوگان (۳.۳) ارائه داد. قید دوم در جواب بهینه برای واحد j_0 با تساوی برقرار خواهد بود و معادله‌ی ابرصفحه‌ی وجه متناظر را تشکیل می‌دهد (اگر وجه از بعد کامل $m + s - 1$ باشد به آن رویه^{۲۳} گفته می‌شود). اگر واحد j را یک واحد کارا فرض کنیم، با مشتق‌گیری از معادله‌ی اول زیر به دست می‌آوریم:

$$-\sum_{r=1}^s u_{rj_0} y_{rj} + \sum_{i=1}^m v_{ij_0} x_{ij} + u_{j_0} = 0 \quad (9.3)$$

$$-u_{rj_0} dy_{rj} + v_{ij_0} dx_{ij} = 0 \Rightarrow \frac{dy_{rj}}{dx_{ij}} = \frac{v_{ij_0}}{u_{rj_0}}.$$

این همان مفهوم اقتصادی بهره‌وری نهایی ورودی i برحسب خروجی از نوع r است که در نقطه‌ای بر روی وجهی ارزیابی شده است که تصویر واحد ناکارای j_0 روی آن قرار دارد. (این نتیجه در مرجع [۴، ص. ۴۴۰]، بیان شده است). با استفاده از نوع خروجی r' و ورودی i' نیز به‌طور مشابه عبارات زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$-u_{rj_0} dy_{rj} - u_{r'j_0} dy_{r'j} = 0 \Rightarrow \frac{dy_{rj}}{dy_{r'j}} = -\frac{u_{r'j_0}}{u_{rj_0}}, \quad (10.3)$$

$$v_{ij_0} dx_{ij} + v_{i'j_0} dx_{i'j} = 0 \Rightarrow \frac{dx_{ij}}{dx_{i'j}} = -\frac{v_{i'j_0}}{v_{ij_0}}.$$

عبارت اول نرخ تبدیل حاشیه‌ای بین خروجی r' و r است و عبارت دوم نرخ جانشینی حاشیه‌ای بین ورودی i' و i . صورت «چندرویه‌ای» تابع تولید مرزی بدین معناست که این سه مفهوم بنیادی اقتصادی بر روی یک وجه ثابت‌اند اما از وجهی به وجه دیگر تغییر می‌کنند.

می‌دانیم که نقاط رأس، واحدهای کارای رأسی (واحدهای کارا با اسلک صفر) هستند؛ بنابراین جواب قیمت‌های سایه برای این واحدها لزوماً یکتا نخواهد بود، زیرا این واحدها به بیش از یک وجه در سطح تابع تولید مرزی تعلق دارند. از آنجا که شرط صلاحیت قید^{۲۴} برای واحدهای رأس برقرار نیست، نمی‌توانیم از قضیه‌ی پوشش برای بررسی اثر تغییر داده‌ها بر چنین واحدهایی استفاده کنیم. در ادبیات DEA گاهی اوقات قیمت‌های سایه به‌معنای متغیرهای دوگان u و v با قیمت‌های بازار هم‌معنا گرفته شده‌اند؛ اما در این‌جا باید محتاط باشیم. اگر واحدهایی را که در درون مرز قرار دارند فرض کنیم که راهبردهای اقتصادی مانند حداقل‌سازی هزینه یا بیشینه‌سازی سود را دنبال می‌کنند، آنگاه نسبت‌های قیمت‌های بازار با نسبت‌های متغیرهای دوگان در روابط (۹.۳) و (۱۰.۳) متناظر خواهند بود—به‌طوری‌که قیمت بازار یک ورودی می‌تواند جایگزین متغیر دوگان متناظر قید ورودی و قیمت بازار یک خروجی می‌تواند جایگزین متغیر دوگان قید خروجی شود. اما توجه داشته باشید که بدون اطلاعات بیشتر، نمی‌توانیم یک تناظر

²³Facet.

²⁴Constraint qualification.

میان یک متغیر دوگان و یک قیمت برقرار کنیم. افزون بر این، نمی‌توان درباره‌ی سازگاری اقتصادی یک واحد ناکارا چیز چندانی گفت؛ اگر برای این واحد اهداف عقلانی حداقل‌سازی هزینه یا حداکثرسازی سود در نظر بگیریم، لازم است توضیحاتی ارائه شود تا بتوان چنین واحدی را ناکارا اندازه‌گیری کرد.

از روابط (۹.۳) و (۱۰.۳) نتیجه می‌شود که مفاهیم اقتصادی بهره‌وری نهایی و نرخ‌های تبدیل و جانشینی حاشیه‌ای هنگامی قابل تدوین نیستند که متغیرهای دوگان برای ورودی‌ها یا خروجی‌ها روی وجه مربوطه صفر باشند؛ در این حالت مقادیر صفر یا (بعلاوه/منهای) بی‌نهایت به دست می‌آید. همه‌ی مفاهیم اقتصادی تنها برای وجه‌هایی با بعد کامل دارای تفسیر اقتصادی معنادار هستند. افزون بر این، صفر بودن یک متغیر دوگان مربوط به یک خروجی در مسأله‌ی (۳.۳) به این معناست که آن متغیر در شرط جمع‌شدن تا یک، مشارکتی ندارد. صفر بودن یک متغیر دوگان مربوط به یک ورودی بدان معناست که آن ورودی به‌طور مستقیم در نمره‌ی کارایی مشارکت نمی‌کند (نقش‌ها برای مسأله‌ی ورودی‌محور معکوس خواهند شد؛ رجوع کنید به مرجع [۱۴]). شیوع مقادیر صفر برای متغیرهای دوگان منجر به توسعه‌ی رویکردهایی شده است که آن‌ها را مقید به مثبت بودن کنند. با این حال، این رویکرد ما را با مسأله‌ی تعیین جواب‌ها توسط تحلیل‌گر در صورت قیدهای الزام‌آور مواجه می‌سازد [۱۴].

۳.۳. محاسبه‌ی قیمت‌های سایه. در ادبیات کارایی، علاقه‌ای به محاسبه‌ی قیمت‌های سایه وجود دارد. مرور جامعی در ژو^{۲۵} و همکاران [۲۰] ارائه شده است. یکی از مقالات اولیه، مقاله‌ی فره^{۲۶} و همکاران [۷] است که از روابط موجود در (۱۳) بر روی یک تابع فاصله‌ی پارامتریک برآوردشده استفاده می‌کند. با این حال، رویه‌ی یافتن قیمت‌های سایه دارای چالش‌هایی است. همان‌طور که گفته شد، قیمت‌های سایه در یک نقطه‌ی مرزی ارزیابی می‌شوند. اما همان‌طور که در بخش ۲ بیان شد، در DEA هیچ فروضی در مورد رفتار اقتصادی واحدها مطرح نیست. بنابراین، نقطه‌ی تصویر یک واحد ناکارا و ارزیابی قیمت‌های سایه در آن نقطه توسط تحلیل‌گر انجام می‌شود، و طبق فرض، هیچ واحد مشاهده‌شده‌ای وجود ندارد که در حال انجام بهینه‌سازی باشد. واحدهایی که در نهایت کارا شناخته می‌شوند عمدتاً در نقاط رأس قرار دارند، اما همان‌طور که پیش‌تر ذکر شد قیمت‌های سایه در این نقاط یکتا نیستند. علاوه بر این، اگر مدیر یک واحد ناگهان به درکی تازه از مرز تولید و چگونگی دستیابی به یک نقطه‌ی واقع بر مرز برسد، آنگاه نقطه‌ی تصویر صرفاً یکی از بسیار نقاطی خواهد بود که مدیر ممکن است به‌واسطه‌ی این بینش‌های جدید بخواهد به آن‌ها حرکت کند. گاهی نقاط تصویر به‌عنوان هدف (توسط تحلیل‌گر) برای واحدها به‌کار می‌روند، اما این ایده از همان ضعفی رنج می‌برد که نقطه‌ی تصویر تنها یکی از بسیاری نقاط ممکن برای تلاش جهت رسیدن است. یک نقطه‌ی تصویر شعاعی لزوماً تابع هدفی مانند مثلاً بیشینه‌سازی سود را نمایش نمی‌دهد.

به‌عنوان مثال، فرض کنیم تنها یک خروجی و دو ورودی داشته باشیم و نقطه‌ی Q' در شکل ۱ متناظر با یک نقطه‌ی گوشه‌ای در شکل ۲ باشد. اگر قیمت q_2 یکی از ورودی‌ها را بدانیم، می‌توانیم تلاش کنیم تا قیمت دیگر q_1 را با استفاده از رابطه‌ی دوم در (۱۰.۳) و با وارد کردن شرط حداقل‌سازی هزینه برآورد کنیم: $q_1 = q_2 v_1 / v_2$. با این حال، در نقاط گوشه‌ای قیمت‌های سایه تعریف‌شده نیستند و لذا باید از مقادیر سمت چپ یا سمت راست استفاده شود. همان‌طور که از شکل ۲ مشهود است، با فرض معلوم بودن قیمت q_2 ، برای نقاط گوشه‌ای مختلف که به‌عنوان معیارهای حداقل‌کننده‌ی هزینه برای مشاهدات عمل می‌کنند، برآوردهای متفاوتی برای q_1 به دست می‌آید.

²⁵Zhou.

²⁶Färe.

۴. پیشرفت‌های بیشتر در DEA

دو پیشرفت مهم در DEA عبارت‌اند از: توسعه‌ی تفسیر آماری برآوردهای نمره‌ی کارایی و به‌کارگیری روش‌های برآورد دومرحله‌ای برای رگرسیون نمرات کارایی بر متغیرهای توضیحی^{۲۷}. هر دو پیشرفت برای استفاده‌ی سیاست‌گذاران از تحلیل‌های DEA اهمیت دارند.

پیشرفت نخست، از بوت‌استرپینگ^{۲۸} برای کنترل واریانس نمونه استفاده می‌کند. حتی اگر تمام واحدهای مورد مطالعه مشاهده شده باشند، فرآیند استاندارد تولید داده معمولاً چنین فرض می‌کند که مشاهدات وابسته به تحقق‌های متغیرهای تصادفی هستند. بوت‌استرپینگ یک تکنیک آماری است که بر پایه‌ی تولید تعداد زیادی شبه‌مشاهده^{۲۹} بر اساس فرآیند تولید داده‌ی فرض‌شده بنا شده است (نگاه کنید به منبع [۱۹]). در این روش می‌توان سوگیری نمونه‌گیری را برآورد کرد و فواصل اطمینان را به‌گونه‌ای برقرار نمود که معیاری از میزان اتکاپذیری نمرات کارایی به‌دست دهد.

همان‌گونه که در بخش ۲ اشاره شد، دلایل ناکارایی به آسانی قابل شناسایی نیستند. یک مشکل روش‌شناختی نیز این است که به‌دلیل محدودیت درجه‌ی آزادی ناشی از تعداد مشاهدات، باید تعداد متغیرهای استفاده‌شده در تحلیل DEA محدود نگه داشته شود. از این رو، یک روش دومرحله‌ای به‌کار گرفته شده است که در آن نمرات کارایی بر مجموعه‌ای از متغیرها (که در تحلیل DEA استفاده نشده‌اند) و ارتباط آن‌ها با ناکارایی معقول به‌نظر می‌رسد، رگرسیون می‌شود. با این حال، استفاده از روش‌های دومرحله‌ای برای یافتن متغیرهایی که با نمرات کارایی هم‌بسته‌اند، بیشتر اکتشافی است تا مبتنی بر نظریه. یک مسأله‌ی کلیدی این است که آیا چنین متغیرهای موسوم به متغیرهای محیطی تنها بر نمره‌ی کارایی اثر می‌گذارند یا اینکه مجموعه‌ی امکان تولید را نیز تحت‌تأثیر قرار می‌دهند. مشکل روش‌شناختی اینجاست که این متغیرهای توضیحی ممکن است باعث ایجاد سوگیری شوند، زیرا می‌توانند بر مجموعه‌ی امکان تولید در روابط (۲.۲) یا (۱.۳) تأثیر بگذارند. تنها زمانی برآوردهای مرحله‌ی دوم بدون سوگیری هستند که متغیرهای توضیحی تنها بر نمره‌ی کارایی اثر بگذارند و مرز این مجموعه (یعنی تابع مرزی) را تغییر ندهند. با این حال، آزمودن آماری این‌که آیا بین مرز مجموعه و متغیرهای توضیحی وابستگی وجود دارد یا خیر، مسأله‌ی دشوار است.

۵. نتیجه‌گیری

اندازه‌های کارایی فنی فارل [۸] ستون فقرات تحلیل‌های کارایی را شکل می‌دهند. تصویرسازی‌های ارائه‌شده برای اندازه‌های کارایی در آن مرجع باید به خواننده‌ای که با تحلیل کارایی ناآشناست، درک فوری از مفاهیم کلیدی بدهد. همچنین رویکرد غیرپارامتری پوشاندن مشاهدات مربوط به بهترین عملکرد در مرجع [۸] روزه‌ای از فلسفه‌های برآوردی ارائه می‌کند که طی سال‌ها به‌طور گسترده مورد بررسی قرار گرفته‌اند؛ چه بر پایه‌ی برنامه‌ریزی خطی در حالت غیرپارامتری و چه با استفاده از مرزهای پارامتری مبتنی بر روش‌های اقتصادسنجی. فرم نسبت‌محور مقاله‌ی بنیادین چارلز و همکاران [۴] که مبتنی بر یک مفهوم بهره‌وری است، امروزه چندان مورد استفاده قرار نمی‌گیرد. با این حال، صورت‌بندی مدل برنامه‌ریزی خطی DEA در مقاله‌ی بنکر و همکاران [۱] که بازده به مقیاس متغیر را نمایش می‌دهد، بر بهترین نکات هر دو مقاله‌ی بنیادین تکیه دارد.

مفهوم قیمت‌های سایه به‌طور کلی توسط اقتصاددانان به‌عنوان نامی برای پارامترهای لاگرانژی به‌کار می‌رود که برای قیده‌های یک مسأله‌ی بهینه‌سازی هنگام استفاده از لاگرانژی به کار گرفته می‌شوند. با استفاده از مدل DEA ارائه‌شده در بنکر و همکاران [۱]، قیده‌های موجود در مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی که برای برآورد نمرات کارایی ایجاد می‌شود، شامل خروجی‌ها، ورودی‌ها، و تأمین تحذب است. برای فهمیدن جواب، حیاتی است که تفسیرهای مربوط به قیمت‌های سایه (که گاه وزن‌ها یا ضرایب نیز نامیده می‌شوند) روشن

²⁷Explanatory variables.

²⁸Bootstrapping.

²⁹Pseudo-observations.

باشند. در ادبیات DEA اغلب پیش می‌آید که این تفسیرها صریح بیان نمی‌شوند. تابع هدف، نمره‌ی کارایی برای مدل ورودی‌محور یا معکوس آن برای مدل خروجی‌محور است. قیمت‌های سایه در یک جواب بهینه بیانگر تغییر در تابع هدف، یعنی نمره‌ی کارایی، به دلیل تغییری در قید ناشی از تغییر در مشاهدات برون‌زای ورودی یا خروجی هستند. ارزیابی مشتق‌های تابع ارزش (با فرض وجود جواب‌های بهینه‌ی یکتا که در تابع هدف جای‌گذاری شده‌اند) با استفاده از قضیه‌ی پوشش نشان می‌دهد که قیمت‌های سایه، تغییرات نهایی در نمره‌ی کارایی (در ورودی‌محور یا ضریب گسترش در خروجی‌محور) برای یک واحد ناکارا با نقطه‌ی تصویر روی مرز درون یک وجه را از تغییرات نهایی خروجی‌ها و ورودی‌ها بیان می‌کنند. این امر پیوندی با مفاهیم اقتصادی نظیر نرخ‌های نهایی تبدیل میان خروجی‌ها، نرخ‌های نهایی جانشینی میان ورودی‌ها، و بهره‌وری‌های نهایی برقرار می‌کند. همه‌ی این مفاهیم از نسبت‌های مناسب قیمت‌های سایه به دست می‌آیند. استفاده از شرایط اقتصادی بهینگی برای استخراج اصطلاحاً قیمت‌های سایه، مسأله‌ساز است. یکی از مشکلات این است که یک نقطه‌ی گوشه‌ای هیچ جواب یکتایی برای قیمت‌های سایه ندارد. مشکل دیگر اینکه اگر قیمت یکی از ورودی‌ها یا خروجی‌ها معلوم باشد، برآورد قیمت‌های دیگر با تغییر مشاهده تغییر می‌کند؛ چیزی که احتمالاً با فرض استاندارد وجود قیمت‌های مشترک برای همه‌ی واحدها در تضاد است.

سپاس‌گزاری

این مقاله در چارچوب برنامه‌ی پژوهشی «Kostnadseffektiv drift av Forsvaret (KOSTER IV)» با عنوان (کارایی هزینه‌ای در دفاع) در سازمان پژوهش‌های دفاعی نروژ (FFI) نوشته شده است و بر بخش‌های ۲ و ۳ فورسوند [۱۵] بنا دارد. من قدردان توربیورن هانسن (Torbjørn Hanson) و کِنت لَوُلْد رُدهِست (Kenneth Løvold Rødseth) برای دیدگاه‌ها و نظرات ارزشمندشان هستم.

مترجم اعلام می‌دارد که در تهیه‌ی پیش‌نویس و ویرایش زبانی نسخه‌ی اولیه‌ی این مقاله، از ابزارهای هوش مصنوعی ChatGPT استفاده کرده است. با این حال، محتوای نهایی به دقت توسط وی بازبینی، ویرایش و تأیید شده است تا از دقت و صحت علمی متن اطمینان حاصل شود.

مراجع

1. R.D. Banker, A. Charnes and W.W. Cooper, *Some models for estimating technical and scale inefficiency in data envelopment analysis*, Manag. Sci. **30** (1984), no. 9, 1078–1092.
2. J.N. Boles, *Efficiency squared-efficient computation of efficiency indexes*, West. Farm Econ. Assoc. Proc. **1966** (1967), 137–142.
3. J.N. Boles, *The 1130 Farrell efficiency system - multiple products, multiple factors*, Giannini Found. Agric. Econ. (February 1971).
4. A. Charnes, W.W. Cooper and E. Rhodes, *Measuring the efficiency of decision making units*, Eur. J. Oper. Res. **2** (1978), 429–444.
5. A. Charnes, W.W. Cooper and E. Rhodes, *Short communication: Measuring the efficiency of decision making units*, Eur. J. Oper. Res. **3** (1979), 339.
6. W.W. Cooper, L.M. Seiford and K. Tone, *Introduction to data envelopment analysis and its uses: With DEA-solver software and references*, New York: Springer Science + Business Media, 2006.

7. R. Färe, S. Grosskopf, D.-W. Noh and S. Yaisawarng, *Derivation of shadow prices for undesirable outputs: a distance function approach*, Rev. Econ. Stat. **75** (1993), no. 2, 374–380.
8. M.J. Farrell, *The measurement of productive efficiency*, J. R. Stat. Soc. Ser. A (Gen.) **120** (1957), no. 3, 253–281.
9. M.J. Farrell and M. Fieldhouse, *Estimating efficient production functions under increasing returns to scale*, J. R. Stat. Soc. Ser. A (Gen.) **125** (1962), no. 2, 252–267.
10. F.R. Førsund and N. Sarafoglou, *On the origins of data envelopment analysis*, J. Prod. Anal. **17** (2002), 23–40.
11. F.R. Førsund and N. Sarafoglou, *The tale of two research communities: the diffusion of research on productive efficiency*, Int. J. Prod. Econ. **98** (2005), no. 1, 17–40.
12. F.R. Førsund, S.A.C. Kittelsen and V. E. Krivonozhko, *Farrell revisited-visualising properties of DEA production frontiers*, J. Oper. Res. Soc. **60** (2009), 1535–1545.
13. F.R. Førsund, *Dynamic efficiency measurement*, Indian Econ. Rev. **45** (2010), no. 2, 125–159.
14. F.R. Førsund, *Weight restrictions in DEA: misplaced emphasis?*, J. Prod. Anal. **40** (2013), no. 3, 271–283.
15. F.R. Førsund, *Economic Perspectives on DEA*, Memorandum No. 10/ 2015, Department of Economics, University of Oslo, 2015.
16. V.V. Podinovski, *Suitability and redundancy of non-homogeneous weight restrictions for measuring the relative efficiency in DEA*, Eur. J. Oper. Res. **154** (2004), 380–395.
17. R.W. Shephard, *Cost and production functions*, Princeton: Princeton University Press, 1953.
18. R.W. Shephard, *Theory of cost and production functions*, Princeton NJ: Princeton University Press, 1970.
19. L. Simar and P.W. Wilson, *Statistical inference in nonparametric frontier models: the state of the art*, J. Prod. Anal. **13** (2000), no. 1, 49–78.
20. P. Zhou, X. Zhou and L.W. Fan, *On estimating shadow prices of undesirable outputs with efficiency models: a literature review*, Appl. Energy **130** (2014), 799–806.



ECONOMIC INTERPRETATIONS OF DEA

HOSSEIN AZIZI

¹*Department of Applied Mathematics, PaM.C., Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran
azizhossein@gmail.com*

Abstract. Research on productive efficiency at the firm level has developed as an important and active strand of research the last decades, both within operations research, management science and economics. Two apparently different definitions of efficiency are examined, but it is shown that when both estimation methods are based on solving linear programming problems the definitions of efficiency are identical. The purpose of the paper is to give the basic ideas of efficiency analyses using DEA as a tool for researchers not so familiar with efficiency analysis and DEA. The concept of shadow prices is given special attention.

2020 Mathematics Subject Classification. 90B50, 90C05

Keywords. Efficiency measures, Data envelopment analysis, Linear programming, Shadow prices

Date: Received 2025-11-26 Revised 2026-02-13 Accepted 2026-04-13 Available Online 2026-06-21

©Ferdowsi University of Mashhad.