



## نمونه‌ای متقدم از یک دستگاه عددنویسی ارزش مکانی غیردهی

اکبر امیری\*

گروه ریاضی، واحد تالش، دانشگاه آزاد اسلامی، تالش، ایران

[ak.amiri@iau.ac.ir](mailto:ak.amiri@iau.ac.ir)

چکیده. ایده دستگاه‌های عددنویسی غیردهی در طی سده هفدهم میلادی توسط شماری از ریاضی‌دانان، به‌ویژه توماس هریوت، گوتفرد ویلهلم لایبنیتس، خوان کارامونل لوبکوویتس و ارهارد وایگل بسط و توسعه یافت. با این حال، پیش از آن و در اواخر سده شانزدهم، یک ریاضی‌دان آلمانی به نام آنتون شولتسه، دستگاه عددنویسی ارزش مکانی در مبنای ۲۴ را شرح داده و اعمال اصلی حساب را در این دستگاه به نمایش گذاشته بود. شولتسه این الگو را در قالب مثالی در کتاب درسی خود با موضوع حساب بازرگانی که در سال ۱۵۸۴ منتشر گردید، گنجانده بود؛ وی سپس همین روش را با اندکی تغییرات در ویرایش بسط‌یافته کتاب مذکور که در سال ۱۶۰۰ به چاپ رسید، مجدداً ارائه کرد.

این مقاله ترجمه مقاله زیر می‌باشد:

L. Koudela, *An early example of a nondecimal positional number system*, Hist. Math. **72** (2025), 2–7.

2020 Mathematics Subject Classification. 01A40; 01A45; 11A99; 00A08

واژگان کلیدی. دستگاه‌های عددنویسی غیردهی، دستگاه مبنای بیست‌و‌چهار، آنتون شولتسه، حساب بازرگانی.  
تاریخ: دریافت ۱۴۰۵/۰۲/۱۱ بازنگری ۱۴۰۵/۰۲/۲۵ پذیرش ۱۴۰۵/۰۳/۳۱ انتشار برخط ۱۴۰۵/۰۳/۳۱  
نحوه ارجاع به این مقاله: ا. امیری، نمونه‌ای متقدم از یک دستگاه عددنویسی ارزش مکانی غیردهی، به سوی علوم ریاضی، ۶ (۱۴۰۵)، شماره ۱، ۳۹-۵۱.

© دانشگاه فردوسی مشهد.

## ۱. مقدمه

اعداد هندو-عربی حداکثر تا سده دهم میلادی از طریق اسپانیای تحت حاکمیت مورها<sup>۱</sup> به اروپا راه یافتند. ترجمه‌های لاتین کتب عربی در باب حساب، نقش بسزایی در پذیرش گسترده دستگاه ارزش مکانی دهدهی<sup>۲</sup> ایفا کردند. علی‌رغم مزایای انکارناپذیر این دستگاه نوین در اجرای عملگرهای بنیادین حساب، فرایند ورود آن به نظام آموزشی، تجارت و مالیه چندان سراسر و ساده نبود و در برخی حوزه‌ها، استفاده از اعداد رومی تا مدت‌ها تداوم یافت.

در طول سده هفدهم و اوایل سده هجدهم میلادی، امکان به‌کارگیری دستگاه‌های عددی ارزش مکانی با مبنایی غیر از عدد ۱۰ تدریجاً مورد پذیرش قرار گرفت. نقش پیشگام در توسعه دستگاه دودویی<sup>۳</sup> را گوتفرید ویلهلم لایبنیتس<sup>۴</sup> (۱۶۴۶-۱۷۱۶) ایفا نمود. وی در نیمه دوم دهه ۱۶۹۰ به حساب دودویی پرداخت و در نامه مشهور خود به دوک رودولف آگوست<sup>۵</sup> مورخ ۱۲ ژانویه ۱۶۹۷، دستگاه اعداد دودویی را توصیف کرد [۳، ص. ۳۱]. با این حال، دست‌نوشته‌های به‌جامانده از لایبنیتس نشان می‌دهد که ایده نمایش اعداد در قالب دستگاه دودویی، در طول دهه ۱۶۷۰ کانون توجه و علاقه شدید وی بوده است [۱۵]. در این راستا، اهمیتی کلیدی به رساله «در باب تصاعد دودویی»<sup>۶</sup> نگاشته‌شده در سال ۱۶۷۹ نسبت داده می‌شود. افزون بر این، احتمال می‌رود که لایبنیتس پیش‌تر و در دوران اقامتش در پاریس (۱۶۷۲-۱۶۷۶) نیز به کاوش در حساب دودویی پرداخته باشد.

لایبنیتس افزون بر دستگاه دودویی، به بررسی دستگاه‌هایی با سایر مبناها نیز پرداخت. برای نمونه، ایده دستگاه دوازدهدهی<sup>۷</sup> در رساله «گنجینه ریاضیات»<sup>۸</sup> مطرح گردید؛ با این وجود، لایبنیتس دلایل و توجیهات کافی برای اتخاذ آن نیافت. همچنین شواهدی دال بر علاقه لایبنیتس به دستگاه شانزدهدهی<sup>۹</sup> وجود دارد که از منظر او، از ظرفیت‌های کاربردی و عملی بیشتری برخوردار بود [۱۴]. انگیزه لایبنیتس برای معرفی دستگاه دودویی از دلایل صرفاً ریاضی تا مباحث متافیزیکی متغیر بود. او امیدوار بود که دستگاه دودویی بتواند روابطی را میان اعداد آشکار سازد که در سایر دستگاه‌ها پنهان مانده بودند. لایبنیتس همچنین دلیل استفاده از دستگاه دودویی را در قیاس آن با آموزه کلیسایی «آفرینش از عدم»<sup>۱۰</sup> می‌دید (بدین معنا که آفرینش همه چیز از هیچ، از طریق نمایش تمام اعداد به کمک یک و صفر اثبات می‌شود). این ایده که در یادداشت‌های او بر یکی از کتاب‌های وایگل<sup>۱۱</sup> به چشم می‌خورد [۱۵، ص. ۷۹]، به درون‌مایه مهمی در نامه پیش‌گفته به دوک رودولف آگوست بدل شد. واکنش یواخیم بووه<sup>۱۲</sup>، مبلغ مذهبی یسوعی<sup>۱۳</sup> در چین، انگیزه مضاعفی در این مسیر به لایبنیتس بخشید؛ بووه به امکان استفاده از دستگاه دودویی به‌عنوان کلیدی برای تفسیر ۶۴

<sup>1</sup>Moorish<sup>2</sup>decimal<sup>3</sup>binary<sup>4</sup>Gottfried Wilhelm Leibniz<sup>5</sup>Duke Rudolph August<sup>6</sup>De progressionem dyadica<sup>7</sup>duodecimal<sup>8</sup>Thesaurus mathematicus<sup>9</sup>hexadecima<sup>10</sup>creatio ex nihilo<sup>11</sup>Weigel<sup>12</sup>Joachim Bouvet<sup>13</sup>Jesuit

شش‌خطی<sup>۱۴</sup> در کتاب «ای چینگ»<sup>۱۵</sup> (کتاب دگرگونی‌ها) اشاره کرد. رساله لایبنتیس با عنوان «شرح حساب دودویی»<sup>۱۶</sup> که برای آکادمی پاریس نگاشته شده بود، در سال ۱۷۰۵ میلادی به چاپ رسید. این رساله هم به جنبه‌های محاسباتی دستگاه دودویی و هم به ارتباط احتمالی آن با شش‌خطی‌های چینی می‌پردازد [۱۷، ص. ۲۹۳].

ارهارد وایگل (۱۶۲۵-۱۶۹۹)، که به مدت یک نیم‌سال در ۱۶۶۳ میلادی در ینا<sup>۱۷</sup> استاد لایبنتیس بود، در رساله خود با نام تتراکتیس<sup>۱۸</sup> (۱۶۷۳) استفاده از دستگاه چهارچهارمی<sup>۱۹</sup> را پیشنهاد داد و بر این باور بود که مبنای این دستگاه در سرتاسر جهان آفرینش نهاده شده است. وایگل به آموزه فیثاغورثی تتراکتیس و اهمیت ویژه عدد ۴ استناد می‌کرد. افزون بر ماهیت چهارگانه جهان، وایگل کاربردپذیری عملی گسترده‌تر این دستگاه را دلیل دیگری برای استفاده از آن می‌دانست. او در سال‌های بعد، دستگاه ابداعی خود را در آثار دیگری که منتشر کرد، بسط و توسعه داد. میزان تأثیرگذاری وایگل بر لایبنتیس همچنان محل بحث و تبادل نظر است (برای نمونه: برانکاتو<sup>۲۰</sup> [۲]؛ استریکلند و لوئیس [۱۵]).

خوان کاراموئل ای لوبکویتس<sup>۲۱</sup> (۱۶۰۶-۱۶۸۲) در کتاب جامع و دوجلدی خود با عنوان «ریاضیات دوگانه قدیم و جدید»<sup>۲۲</sup> که در سال ۱۶۷۰ میلادی منتشر شد، به بررسی دستگاه‌های عددی بر پایه مبناهای ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۲ و ۶۰ می‌پردازد. او برای هر مبنا، شواهدی دال بر اهمیت طبیعی یا معنوی آن ارائه می‌دهد. کاراموئل فراتر از ارائه نمادگذاری اعداد در هر دستگاه، توجه چندانی به سایر ویژگی‌های حسابی آن‌ها نشان نمی‌دهد [۹].

بلز پاسکال<sup>۲۳</sup> (۱۶۲۳-۱۶۶۲) در اثر خود با نام «درباره مضارب اعداد»<sup>۲۴</sup> (که پس از مرگش در سال ۱۶۶۵ منتشر شد)، به طور حاشیه‌ای و گذرا به ایده استفاده از دستگاه‌های غیردهی (به‌ویژه دستگاه دوازده‌دهی) پرداخته است. در طول قرن هفدهم، امکانات کدگذاری دودویی در زمینه‌های گوناگونی توسط سایر دانشمندان مورد کاوش قرار گرفت. جان نپر<sup>۲۵</sup> (۱۵۵۰-۱۶۱۷) در حساب مکانی، که به عنوان پیوستی بر کتاب رابدولوژی<sup>۲۶</sup> (۱۶۱۷) وی به چاپ رسید، از حروف الفبای لاتین برای نمایش توان‌های عدد ۲ بهره برد. فرانسیس بیکن<sup>۲۷</sup> (۱۵۶۱-۱۶۲۶) در کتاب «درباره ارج و ارتقای علوم»<sup>۲۸</sup> (۱۶۲۳)، روشی را برای رمزنگاری حروف الفبای لاتین با استفاده از کدهای دودویی توصیف کرد [۱۶، صص. ۱۱-۱۲].

<sup>14</sup>hexagrams

<sup>15</sup>I Ching

<sup>16</sup>Explication de l'arithmétique binaire

<sup>17</sup>Jena

<sup>18</sup>Tetractys

<sup>19</sup>quaternary

<sup>20</sup>Brancato

<sup>21</sup>Juan Caramuel y Lobkowitz

<sup>22</sup>Mathesis biceps vetus et nova

<sup>23</sup>Blaise Pascal

<sup>24</sup>De numeris multiplicibus

<sup>25</sup>John Napier

<sup>26</sup>Rabdology

<sup>27</sup>Francis Bacon

<sup>28</sup>De dignitate et augmentis scientiarum

امروزه، فضل تقدم در کشف حساب غیردهی عموماً به توماس هریوت<sup>۲۹</sup> (۱۵۶۰-۱۶۲۱) نسبت داده می‌شود. همان‌طور که شرلی<sup>۳۰</sup> [۱۱] خاطرنشان کرده است، دست‌نوشته‌های هریوت که مدت‌ها به چاپ نرسیده بودند، حاوی توصیفی از دستگاه اعداد دودویی، از جمله یک جدول تبدیل و شرحی بر عملگرهای بنیادین هستند. ملاحظات هریوت پیرامون حساب دودویی احتمالاً با آزمایش‌های توزین وی در ارتباط بوده‌اند و قدمت آن‌ها به بازه زمانی ۱۶۰۱ تا ۱۶۰۵ میلادی بازمی‌گردد (کنوت<sup>۳۱</sup> [۵]؛ استریکلند [۱۳]).

با این حال، حتی پیش از هریوت نیز نمونه‌ای از کاربرد یک دستگاه اعداد ارزش مکانی غیردهی در ادبیات مکتوب اروپا ظاهر شده بود. مؤلف این اثر، آنتون شولتسه<sup>۳۲</sup> بود.

## ۲. آنتون شولتسه و کتاب‌های درسی حساب او

آنتون شولتسه در حدود سال ۱۵۶۰ میلادی در شهر لگنیتس<sup>۳۳</sup> (به آلمانی: Liegnitz) واقع در منطقه سیلیزیای سفلی<sup>۳۴</sup> (که امروزه در جنوب غربی لهستان قرار دارد) چشم به جهان گشود؛ منطقه‌ای که در سده شانزدهم میلادی به یکی از کانون‌های فرهنگ پروتستان آلمانی بدل شد. او در سال ۱۵۸۴ میلادی، یک کتاب درسی در زمینه حساب مقدماتی با عنوان «کتاب حساب روی سکه و وزن در سیلیزیای»<sup>۳۵</sup> برای دانش‌آموزان مدرسه خود در لگنیتس منتشر کرد [۷]. وی دلیل اصلی نگارش این اثر را فقدان واحدهای مناسب وزن و پول در کتاب‌های درسی موجود عنوان کرد. از آنجا که در آن زمان هیچ چاپخانه‌ای در لگنیتس وجود نداشت، این کتاب توسط آندریاس آیشهورن<sup>۳۶</sup> در شهر فرانکفورت اودر<sup>۳۷</sup> به چاپ رسید.

محتوای نخستین کتاب حساب شولتسه (یا به تعبیر بعدی خود نویسنده، کتابچه حساب یا Rechenbüchlein) به سه بخش تقسیم می‌شود. بخش نخست به توصیف عددنویسی دهدهی می‌پردازد و عملگرهای بنیادین حساب، تصاعدها و قاعده سه یا قاعده ثلاث را شرح می‌دهد. مفاهیم حسابی با بهره‌گیری از مثال‌های کاربردی و انبوهی از تمرین‌های حل‌نشده — که تنها پاسخ نهایی آن‌ها درج شده است — تبیین شده‌اند. بخش دوم دربردارنده محاسبه با کسرها و مثال‌های عملی متعددی از حوزه‌های گوناگون است و روش‌های دیگری نظیر قاعده سه معکوس، قاعده پنج، محاسبه بهره، حق‌العمل، نسبت‌های اختلاط و موارد مشابه را توصیف می‌کند. در این بخش، تلاش برای به‌حداکثر رساندن فایده عملی کتاب کاملاً مشهود است. بخش سوم اثر که رویکردی جبری دارد، به روش‌های پیشرفته‌تری همچون قاعده خطایین یا تنظیم کاذب و قاعده سسیس<sup>۳۸</sup> اختصاص یافته و قاعده کاس<sup>۳۹</sup> را به‌اجمال معرفی می‌کند (برای بررسی جزئیات این روش‌ها، برای نمونه تروپفکه [۱۶]).

<sup>29</sup>Thomas Harriot

<sup>30</sup>Shirley

<sup>31</sup>Knuth

<sup>32</sup>Anton Schultze

<sup>33</sup>Legnice

<sup>34</sup>Lower Silesia

<sup>35</sup>Rechenbuch auf Müntz vnd gewicht in Schlesien

<sup>36</sup>Andreas Eichhorn

<sup>37</sup>Frankfurt (Oder)

<sup>38</sup>Regula cecis

<sup>39</sup>rule of coss

هرچند تردیدهایی درباره محتوای کتاب، احتمالاً بعدها مؤلف را بر آن داشت تا روی کتاب درسی جدیدی کار کند، با این حال باید خاطرنشان کرد که در پیوست‌های کتاب رارا آریتمتیکا<sup>۴۰</sup>، این اثر به عنوان «یکی از بهترین آثار حساب تجاری عصر خود» توصیف شده است [۱۲، ص. ۴۱].

در سال‌های بعد، شولتسه مناصب گوناگونی را در دربار دوک لگنیتس بر عهده گرفت و در سال ۱۵۹۶ میلادی به مقام اشراف‌زادگی نائل آمد [۱۰]. او همچنین یکی از سخاوتمندترین حامیان چاپخانه لگنیتس متعلق به نیکولاس اشنایدر<sup>۴۱</sup> بود که بدون حمایت‌های وی، بسیاری از آثار مهم هرگز مجال انتشار نمی‌یافتند [۱، ص. ۳۲]. شایان ذکر است که نوۀ او، ماریا کانیتس<sup>۴۲</sup> (۱۶۱۰-۱۶۶۴)، بعدها به یکی از زنان برجسته در عرصۀ ریاضیات و نجوم بدل شد.

علاقۀ شولتسه به ریاضیات حتی در زمانی که مناصب مهمی در دربار دوک بر عهده داشت، همچنان پابرجا ماند. از آنجا که کتاب نخست او دیگر در کتاب‌فروشی‌ها یافت نمی‌شد، وی تصمیم گرفت ویرایش جدیدی از آن را آماده کند. ویرایشی بازنگری‌شده، بازنویسی‌شده و بسط‌یافته از کتاب درسی او توسط نیکولاس اشنایدر در سال ۱۶۰۰ میلادی با عنوان «حساب یا کتاب محاسبه»<sup>۴۳</sup> منتشر شد [۸]. در صفحه عنوان قید شده است که محتوای اثر بدون نیاز به آموزش شفاهی قابل فهم است. از این رو، هدف اصلی کتاب، خودآموزی بود؛ چرا که شولتسه در آن زمان دیگر ارتباط مستقیمی با دانش‌آموزان نداشت. محاسبات موجود در مسائل حل‌شده به تفصیل مورد بحث و تفسیر قرار گرفته‌اند. محتوای ریاضی کتاب با قافیه‌ها و عبارات یادیار متعددی همراه شده است تا فهم و به‌خاطر سپاری آن‌ها تسهیل گردد [۱۰].

ساختار این کتاب تقریباً با محتوای کتاب نخست مطابقت دارد و به چهار بخش تقسیم شده است. بخش اول مشتمل بر شرحی از عددنویسی و عملگرهای بنیادین حساب است که هم به روش «قلم و کاغذ» و هم با استفاده از خطوط و ژتون‌های شمارشی (یا محاسبه روی خطوط) — که در کتاب اول مطرح نشده بود — انجام می‌پذیرد؛ این بخش همچنین شامل محاسبه با کسرهاست. بخش دوم دربردارندۀ مسائل و تمرین‌های بسیاری از رویه‌های تجاری است. این بخش با توضیحی درباره قاعدۀ سه آغاز می‌شود و دامنه وسیعی از محاسبات تجاری و رویه‌های دیگر (از جمله قاعدۀ خطایی و قاعدۀ سسیس) را پوشش می‌دهد. بخش سوم اثر تماماً به قاعدۀ کاس اختصاص دارد که در مقایسه با کتاب درسی سال ۱۵۸۴ تأکید بیشتری بر آن شده و مجدداً با مثال‌های فراوانی تبیین شده است. کوتاه‌ترین و آخرین بخش کتاب نیز به حسابداری (دفتر روزنامه یا Jorna) می‌پردازد.

### ۳. خداوند، ما را از هر تنگنایی برهان

دایرةالمعارف عظیم تسدلر<sup>۴۴</sup>، که حدفاصل سال‌های ۱۷۳۱ تا ۱۷۵۴ به چاپ رسید، دربردارندۀ مدخلی با عنوان «شولتسه (آنتون)» است. در این مدخل، افزون بر اطلاعاتی کوتاه پیرامون زندگی‌نامۀ شولتسه، تنها دستاورد علمی منتسب به وی، یعنی تخصیص ارزش‌های عددی به حروف الفبای آلمانی، چنین ذکر شده است [۱۸، col. 1619]: «او ریاضی‌دان زبده‌ای بود و در هنر حساب الفبایی به پیشرفت‌های درخوری دست یافت؛ بدان‌گونه که حروف آلمانی را جایگزین اعداد رایج ساخت و به هر یک ارزش حسابی اختصاص داد.» در ادامه این گزاره، جدولی از ارزش‌های عددی هر حرف ارائه شده است. در این مدخل هیچ نامی

<sup>40</sup>Addenda to Rara arithmetica

<sup>41</sup>Nikolaus Schneider

<sup>42</sup>Maria Cunitz

<sup>43</sup>Arithmetica oder Rechenbuch

<sup>44</sup>Zedler

از کتاب‌های شولتسه به میان نیامده و در پایان، تنها به مجموعه «لذات ریاضی و فیزیکی»<sup>۴۵</sup> اثر هارسدورفر<sup>۴۶</sup> [۴] به عنوان منبع استناد اشاره شده است.

جدول و نمونه حساب الفبایی که هارسدورفر [۴، ص. ۳۶] ارائه کرده است، در اصل در انتهای بخش سوم کتاب درسی شولتسه، که در سال ۱۶۰۰ منتشر شد، ظاهر شده بود. شولتسه از ۲۴ حرف الفبای آلمانی به عنوان ارقام در دستگاه عددی مبنای بیست و چهار<sup>۴۷</sup> بهره جست (جدول ۱).

جدول ۱: ارقام دستگاه مبنای بیست و چهار [۸].

| ارزش عددی در مبنای ده | حرف معادل (رقم) | ارزش عددی در مبنای ده | حرف معادل (رقم) |
|-----------------------|-----------------|-----------------------|-----------------|
| ۱                     | a               | ۱۳                    | n               |
| ۲                     | b               | ۱۴                    | o               |
| ۳                     | c               | ۱۵                    | p               |
| ۴                     | d               | ۱۶                    | q               |
| ۵                     | e               | ۱۷                    | r               |
| ۶                     | f               | ۱۹                    | s               |
| ۱۸                    | t               | ۲۰                    | v               |
| ۹                     | i               | ۲۱                    | w               |
| ۱۰                    | k               | ۲۲                    | x               |
| ۱۱                    | l               | ۲۳                    | y               |
| ۱۲                    | m               |                       | z               |

حرف «o» در این دستگاه، کارکردی دقیقاً معادل صفر در دستگاه دهدهی دارد: هرگاه این حرف در سمت راست حرف دیگری قرار گیرد، ارزش آن را ۲۴ برابر افزایش می‌دهد.

کارکرد این دستگاه با یک نمونه از رویه‌های تجاری بدین گونه نشان داده شده است:

«برای مثال، شخصی در لگنیتس. apkt. سنتنر، c. سنگ، f. پوند موم را به قیمت. drm. تالر و t. گروشن می‌خرد. شخص دیگری می‌خواهد در این معامله. g. سنتنر، e. سنگ، e. پوند از این موم را شریک شود. با این حال، خریدار دوم پیش‌تر <sup>dtvkwikxk</sup> <sub>hulff</sub>. تالر به فروشنده بدهکار است. اکنون پرسش این است: او در قبال این موم و با احتساب بدهی پیشین خود، مجموعاً چه مبلغی باید بپردازد؟» (توضیح: در این متن، حروفی نظیر apkt یا drm نمایانگر اعداد در دستگاه مبنای ۲۴ شولتسه هستند، و واحدهایی چون سنتنر، سنگ، تالر و گروشن از واحدهای وزن و پول رایج در آن دوران بوده‌اند).

نماد Pfund نمایانگر پوند است که از یکاهای رایج جرم در آن دوران به شمار می‌رفت. جدول ۲ مقادیر بیان شده در دستگاه مبنای بیست و چهار و معادل‌های آن‌ها را در دستگاه دهدهی به نمایش می‌گذارد.

از آنجا که روابط

$$1 \text{ Centner} = 132 \text{ Pfund}$$

<sup>45</sup>Delitiae mathematicae et physicae

<sup>46</sup>Harsdörffer

<sup>47</sup>quadrivigesimal

جدول ۲: مقادیر مفروض

| بخش          | مبنای ۲۴ | مبنای ۱۰ | یکا              |
|--------------|----------|----------|------------------|
| مشتری اول    |          |          |                  |
|              | apkt     | ۲۲۱۴۶    | سنتنر (Centner)  |
|              | c        | ۳        | سنگ (Stein)      |
|              | f        | ۶        | پوند (Pfund)     |
| قیمت (Price) |          |          |                  |
|              | drm      | ۲۷۰۰     | تالر (Taler)     |
|              | t        | ۱۸       | گروشن (Groschen) |
| مشتری دوم    |          |          |                  |
|              | g        | ۷        | سنتنر (Centner)  |
|              | e        | ۵        | سنگ (Stein)      |
|              | e        | ۵        | پوند (Pfund)     |

و

$$1 \text{ Stein} = 24 \text{ Pfund}$$

برقرار است، کمیت بیان شده به صورت «apkt. سنتنر، c. سنگ، f. [پوند]» برابر با مقدار «hulff» پوند خواهد بود؛<sup>۴۸</sup> به بیان دیگر، معادل با ۲۹۲۳۳۵۰ پوند در دستگاه ددهی است. همچنین، کمیت «g. سنتنر، e. سنگ، e. پوند» برابر با «aus» پوند، یعنی معادل با ۱۰۴۹ پوند است. همچنین، با توجه به اینکه

$$1 \text{ Taler} = 36 \text{ Groschen}$$

است، مبلغ بیان شده به صورت «drm. تالر، t. گروشن» با مقدار «gott» گروشن برابری می‌کند؛ بدین معنا که در دستگاه ددهی معادل با ۹۷۲۱۸ گروشن خواهد بود. (به جدول ۳ رجوع کنید).

جدول ۳: مسئله‌ای که باید از طریق قاعده سه حل شود.

| مقدار برحسب پوند (Pfund) | بها برحسب گروشن (Groschen) |      |
|--------------------------|----------------------------|------|
| مشتری اول                | hulff                      | gott |
| مشتری دوم                | aus                        | ؟    |

<sup>۴۸</sup> مگر در مواردی که عین عبارتی نقل قول شده باشد، نگارنده اعدادی را که در دستگاه مبنای ۲۴ بیان شده‌اند، در میان گیومه‌های تکی قرار خواهد داد تا بدین طریق، از بافتار معمول متن متمایز گردند.

راه حل این مسئله، کاربست قاعده<sup>۴۹</sup> به منظور محاسبه بهای مومی است که مشتری دوم خریداری می کند؛ پس از آن، باید مقدار بدهی را نیز به آن افزود. این محاسبه به چند گام تقسیم می شود [۸]:

۱- عدد «aus» با استفاده از رویه استاندارد ضرب در عدد «gott» ضرب می شود؛ بدین معنا که مضروب «aus» در تک تک ارقام مضروب فیه «gott» ضرب شده و، همان گونه که در دستگاه ددهمی مرسوم است، حاصل ضرب های جابه جاشده با یکدیگر جمع می گردند (به حروف «u» و «v» ارزش عددی یکسانی اختصاص یافته است):

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 & a & u & s \\
 & g & o & t \quad t \\
 \hline
 & a & h & t \quad t \\
 & a & h & t \quad t \\
 m & s & z & o \\
 \hline
 m & v & i & c \quad m \quad t
 \end{array}
 \end{array}$$

۲- عدد «dtvkwixk»، که در بیان میزان بدهی به کار رفته است، به حاصل ضرب دست آمده افزوده می شود و حاصل جمع «dtvzqtpkd» را به دست می دهد.<sup>۵۰</sup>

۳- این حاصل جمع بر «hulff» تقسیم می شود. این محاسبه با استفاده از روش گالی (که در سراسر کتاب به وفور کاربرد دارد) انجام می پذیرد.

<sup>۴۹</sup> این رویه، روشی متداول برای یافتن متناسب چهارم در شرایطی است که سه مقدار دیگر معلوم باشند. اساس این روش بر این اصل ریاضی استوار است که در صورت برابری دو نسبت، حاصل ضرب طرفین و وسطین آنها نیز با یکدیگر برابر خواهد بود. در مسئله مورد بحث، بهای مجهول از طریق رابطه  $aus \times gott/hulff$  محاسبه می گردد.  
<sup>۵۰</sup> روش گالی (galley method) یک تکنیک دستی برای عمل تقسیم است که در حوالی سال ۱۶۰۰ میلادی رواج گسترده ای داشت. در این روش، مقسوم علیه در زیر مقسوم نوشته می شود و یک کمان، محل قرارگیری ارقام خارج قسمت را مشخص می کند. نتایج جزئی در بالای مقسوم نوشته می شوند، در حالی که خط زدن ارقام استفاده شده، به پیگیری روند محاسبه کمک می کند.  
در مثال فوق، قرار است عدد «dtvzqtpkd» بر «hulff» تقسیم شود. مراحل اولیه این رویه به شرح زیر است: حرف «n» (معادل عدد ۱۳ در دستگاه ددهمی) را در جایگاه خارج قسمت بنویسید و با ضرب کردن هر حرف مقسوم علیه در این مقدار، کار را ادامه دهید. از آنجا که  $n \times h = dh$  (یعنی ۱۰۴) است، و تفاضل میان «dt» (یعنی ۱۱۴) و «dh» برابر با «k» (یعنی ۱۰) می شود، حرف «k» را بالای «dt» بنویسید. در حالت معمول، حروف «dt» از مقسوم و حرف «h» از مقسوم علیه باید خط بخورند (که این امر در مثال شولتسه نشان داده نشده است). حرف «v» از مقسوم نیز (به طور حشو و اضافی) در قسمت بالا نوشته می شود. اکنون،  $n \times v = kv$  (یعنی ۲۴۷) است و تفاضل میان «kv» و «kg» برابر با «m» (یعنی ۱۲) می شود. با تصور اینکه «kv» از سطح بالای مقسوم و «v» از مقسوم علیه خط خورده اند، حرف «m» را در بالا بنویسید. در هر مرحله، عدد باقی مانده تقلیل می یابد تا در نهایت، خارج قسمت نهایی و باقی مانده به دست آیند.

شکل نهایی حاصل از این محاسبه، به پیکره یک کشتی گالی شباهت دارد (و وجه تسمیه این روش نیز از همین جا نشأت می گیرد). ارقام نشان دهنده باقی مانده در لبه بالایی نوشته می شوند. در این مثال، رویه معمول خط زدن ارقام استفاده شده حذف گردیده و پیکربندی و ساختار کلی کمی فشرده شده است (ارقام تکراری در ستون ها تنها یک بار نوشته شده اند).

$l$   
 $a \quad v \quad l$   
 $f \quad f \quad r \quad a \quad q$   
 $g \quad g \quad o \quad b \quad x \quad e$   
 $m \quad x \quad f \quad f \quad x \quad k$   
 $k \quad v \quad o \quad i \quad m \quad b \quad y \quad r$   
 $d \quad t \quad v \quad z \quad q \quad t \quad p \quad k \quad d \quad ( \quad n \quad o \quad t \quad t$   
 $h \quad u \quad l \quad f \quad f \quad f \quad f \quad f$   
 $h \quad u \quad l \quad f \quad f \quad f$   
 $h \quad u \quad l \quad l$   
 $h \quad u$

خارج قسمت این عملیات، کلمه «nott» و باقی مانده آن «aller» است. پرواضح است که در اینجا، بازی با کلمات از دلالت کاربردی مثال اهمیت بیشتری دارد. با این وجود، این محاسبه فرصتی را فراهم آورد تا نشان داده شود که عملگرهای بنیادین حساب در یک دستگاه اعداد ارزش مکانی با مبنایی غیر از ۱۰ نیز قابل اجرا هستند. جالب توجه است که شولتسه، فارغ از جدول اعداد (جدول ۱)، نیازی به توضیح چگونگی تبدیل اعداد میان دستگاه‌های مبنای ۲۴ و دهدهی ندیده است و مثال او صرفاً با استفاده از دستگاه الفبایی ابداعی خودش طرح و حل می‌شود.

همین مثال در کتاب درسی سال ۱۵۸۴ شولتسه نیز یافت می‌شود، اما در صورت مسئله و محاسبات آن خطاهایی به چشم می‌خورد<sup>۵۱</sup> که در چاپ ۱۶۰۰ اصلاح شده‌اند. مراحل این رویه در نسخه پیشین در قالب یک منظومه بیان شده‌اند، در حالی که این شعر در چاپ متأخرتر حذف شده است [۷]:

«هر مسئله‌ای را به شیوه قاعده سه حل کن / تا پاسخ بر تو آشکار گردد.

جملات پسین و میانی را با یکدیگر ضرب کن / و بدهی پیشین را بر آن بیفزای.

سپس آن را آزادانه بر جمله نخستین تقسیم کن؛ / در باقی مانده کلمه «aller» ظاهر خواهد شد، و در خارج قسمت کلمه «not».

اکنون عبارت چنین خوانده می‌شود: خداوندا، ما را از هر تنگنایی برهان.

در اینجا به روشنی می‌توانی نظاره کنی / که ضرب و تقسیم چگونه انجام می‌پذیرند.»<sup>۵۲</sup>

<sup>۵۱</sup> مقدار موم برای نخستین مشتری برابر با «anda. سنتنر، c. اشتاین، f. پوند» فرض شده است؛ مقداری که در محاسبات، عملاً معادل hmkge پوند می‌شود و نه hulff پوند مورد انتظار. تناقض‌های دیگری نیز در عملیات ضرب و جمع به چشم می‌خورد که با توجه به جابه‌جایی سطرها در روش تقسیم گالی، احتمالاً می‌توان آن‌ها را به خطاهای چاپی نسبت داد. با این وجود، نتیجه نهایی دقیقاً همان چیزی است که ظاهراً مد نظر مؤلف بوده است.

<sup>۵۲</sup> این یک شعر قدیمی آلمانی درباره قاعده سه است. متن اصلی:

Nach art der de Tri resolver/

Ein jed satzung/ so kömpt es dir.

Hinden und mit/ zasammen mir/

Vorige schuldt/ darzu adder.

Und teil denn in das förder frey/

علی‌رغم خطاهای یادشده، کتاب درسی سال ۱۵۸۴ شولتسه، به‌احتمال قوی، نخستین اثر چاپ‌شده‌ای است که در آن محاسبه در یک دستگاه ارزش مکانی با مبنایی غیر از ۱۰ به چشم می‌خورد.

#### ۴. اهمیت اثر شولتسه

همان‌گونه که پیش‌تر اشاره شد، ملاحظات متافیزیکی نقش مشخصی در معرفی دستگاه‌های غیردهی در قرن هفدهم ایفا کردند. این پرسش مورد بحث قرار می‌گرفت که آیا هیچ مبنای خاصی در یک دستگاه ارزش مکانی وجود دارد که بتواند اهمیت اعداد را در ساختار جهان بهتر بازتاب دهد. شولتسه با دقت میان خود اعداد و بیان انضمامی آن‌ها تمایز قائل می‌شد: «طبیعت و تجربه روزمره به ما می‌آموزند که ما به اعداد معینی پیوند خورده‌ایم، اما نه به نمادها یا ارقام یکنواخت و همسان» [۸]. برای نمایش یک عدد راه‌های بسیاری وجود دارد؛ از رسم ساده خطوط یا دیگر نشانه‌ها گرفته تا استفاده از اعداد رومی یا یک دستگاه ارزش مکانی. از دیدگاه شولتسه، دستگاه دهدهی از منظر کاربردی، راحت‌ترین و کارآمدترین دستگاه ثابت شده است.

مثال او عمدتاً در پی آن بود که نشان دهد در دستگاهی با مبنای غیردهی نیز انجام محاسباتی مشابه با دستگاه دهدهی امکان‌پذیر است. باید تأکید کرد که شمارش در مبناهایی غیر از ۱۰ در آن زمان کاملاً نامرسوم بوده است. این احتمال وجود دارد که خوانندگان، مثال ارائه‌شده را صرفاً به‌عنوان یک شگفتی و موضوعی کنجکاوی‌برانگیز تلقی کرده باشند.

کتاب درسی شولتسه بار دیگر در سال ۱۶۱۱ منتشر شد. در سال ۱۶۳۶، مجموعه جامعی از مسائل گوناگون ریاضی و فیزیک تحت عنوان لاتین «لطایف و سرگرمی‌های فیزیکی-ریاضی»<sup>۵۳</sup> به چاپ رسید. نویسنده آن، دانیل شونت<sup>۵۴</sup>، استاد زبان‌های شرقی و ریاضیات در دانشگاه آلتدورف<sup>۵۵</sup> بود. گئورگ فیلیپ هارسدورفر، شاعر اهل نورنبرگ، مجموعه شونت را با افزودن دو مجلد دیگر بسط داد و کل این اثر طی دو ویرایش دیگر در سال‌های ۱۶۵۱-۱۶۵۳ و ۱۶۷۷ منتشر گردید.

مسئله شماره ۳۵ که در جلد دوم منتشر شد [۴، ص. ۳۶]، همان مسئله‌ای بود که در بالا شرح داده شد و عیناً از کتاب درسی سال ۱۶۰۰ شولتسه [۸] اقتباس شده بود. اگرچه مجموعه شونت و هارسدورفر از محبوبیت قابل توجهی برخوردار بود، اما مثال شولتسه بازخورد چندانی دریافت نکرد. ریاضی‌دانان قرن هفدهم که با دستگاه‌های اعداد غیردهی سروکار داشتند، احتمالاً از کارهای شولتسه بی‌اطلاع بوده‌اند.

---

Am Rest wird das wort aller sein/  
 Zum Quotient/ das wörtlein not/  
 Nun heists/ hilff Gott aus aller not.  
 Kanst es hierunden klerlich sehn/  
 Wie mehren und teilen geschehn.

<sup>53</sup>Deliciae Physico-Mathematicae

<sup>54</sup>Daniel Schwenter

<sup>55</sup>Altdorf

یکی از کسانی که با آثار شولتسه آشنایی داشت، یوهان کریستیان لانگه<sup>۵۶</sup> (۱۶۶۹-۱۷۵۶)، استاد فلسفه اخلاق در دانشگاه گیسن<sup>۵۷</sup> و پیرو مکتب پیه‌تیسیم<sup>۵۸</sup>، بود که در سال ۱۷۰۲ با نام مستعار ایزیدوروس کاریزیوس لوگوتتا<sup>۵۹</sup> کتابی قابل‌توجه با عنوان «الهیات مسیحی در اعداد»<sup>۶۰</sup> منتشر کرد. هدف لانگه نشان‌دادن اهمیت نمادگرایی عددی در الهیات بود. روش او مبتنی بر تقلیل اعداد چندرقمی به یک‌رقمی از طریق محاسبه مجموع ارقام بود. ایراد اساسی به این روش آن است که آیا بیان اعداد در دستگاه دهدهی، که صرفاً یک قرارداد است، می‌تواند به‌عنوان شالوده‌ای برای بیان حقایق الهی عمل کند یا خیر. لانگه [۶]، ص. ۵۰ از آثار وایگل و شولتسه [۸] در زمینه دستگاه‌های اعداد غیردهی آگاه بود؛ با این وجود، او برخلاف وایگل و شولتسه، به جایگاه ممتاز دستگاه دهدهی متقاعد شده بود.

بنابراین، هرچند آثار شولتسه (همانند مورد هریوت) کاملاً ناشناخته نبود، اما احتمالاً تأثیری بر توسعه بعدی ریاضیات نگذاشته است. با این حال، او سزاوار است در زمره پیشگامانی قرار گیرد که برای نخستین‌بار اندیشه امکان بیان اعداد را در دستگاه‌های غیردهی مطرح کردند.

### سپاس‌گزاری

از داوران محترم این مقاله به‌خاطر نقدهای سودمند و پیشنهادهای ارزشمندشان که به بهبود کیفیت این اثر کمک شایانی کردند، صمیمانه سپاس‌گزاری می‌شود.

مترجم اعلام می‌دارد که در تهیه پیش‌نویس و ویرایش زبانی نسخه اولیه این مقاله، از ابزارهای هوش مصنوعی ChatGPT استفاده کرده است. با این حال، محتوای نهایی به‌دقت توسط وی بازبینی، ویرایش و تأیید شده است تا از دقت و صحت علمی متن اطمینان حاصل شود.

### مراجع

1. H. Bahlow, *Die Anfänge des Buchdrucks zu Liegnitz*, Mitt. Geschichts.- Altertums-Ver. Liegnitz **11** (1926), 1-40.
2. M. Brancato, *Leibniz, Weigel and the birth of binary arithmetic*, Lexicon Philosophicum **4** (2016) 152-172.
3. A. Glaser, *History of binary and other nondecimal numeration*, Tomash Publishers, 1981.
4. G.P. Harsdörffer, *Delitiae mathematicae et physicae*, Vol. 2, Jeremia Dümmler, 1651.
5. D.E. Knuth, *Review of History of binary and other nondecimal numeration*, by Anton Glaser, *Historia Math.* **10** (1983), 236-243.
6. J.C. Lange, *Theologia christiana in numeris*, Frankfurt am Main and Leipzig, 1702.
7. A. Schultze, *Rechenbuch auf Müntz vnd gewicht in Schlesien*, Andreas Eichhorn, 1584.
8. A. Schultze, *Arithmetica oder Rechenbuch*, Nikolaus Schneider, 1600.

<sup>56</sup>Johann Christian Lange

<sup>57</sup>Gießen

<sup>58</sup>pietist

<sup>59</sup>Isidorus Charisius Logotheta

<sup>60</sup>Theologia christiana in numeris

9. G. Schuppener, *Intellectus igitur, non reperit, sed facit Numeros. Caramuels Reflexionen über das Zahlensystem*, in P. Dvořák and J. Schmutz (eds.), *Juan Caramuel Lobkowitz: The last scholastic polymath*, Filosofia, 2008, 219–234.
10. G. Schuppener, *Anthonius Schultzes “Arithmetica Oder Rechenbuch”*, in R. Gebhardt (ed.), *Kaufmanns-Rechenbücher und mathematische Schriften der frühen Neuzeit*, Annaberg-Buchholz, 2011, 141–152.
11. J.W. Shirley, *Binary numeration before Leibniz*, Amer. J. Phys. **19** (1951), 452–454.
12. D.E. Smith, *Addenda to Rara Arithmetica*, Ginn and Company, 1939.
13. L. Strickland, *Why did Thomas Harriot invent binary?*, Math. Intelligencer **46** (2023), no. 4, 1–6.
14. L. Strickland, *Leibniz on number systems*, in B. Sriraman (ed.), *Handbook of the history and philosophy of mathematical practice*, Springer, 2024, 167–197.
15. L. Strickland and H. R. Lewis, *Leibniz on binary: The invention of computer arithmetic*, The MIT Press, 2022.
16. J. Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik. Band 1: Arithmetik und Algebra*, 4. Aufl., De Gruyter, 1980.
17. H.J. Zacher, *Die Hauptschriften zur Dyadik von G. W. Leibniz. Ein Beitrag zur Geschichte des binären Zahlensystems*, V. Klostermann, 1973.
18. J. H. Zedler, *Grosses vollständiges Universal-Lexicon aller Wissenschaften und Künste*, Vol. 35, Leipzig, 1743.



## AN EARLY EXAMPLE OF A NONDECIMAL POSITIONAL NUMBER SYSTEM

AKBAR AMIRI

<sup>1,2</sup>Department of Mathematics, Tal.C., Islamic Azad University, Talesh, Iran.  
ak.amiri@iau.ac.ir

**Abstract.** The idea of nondecimal number systems was developed during the 17th century by several mathematicians, especially by Thomas Harriot, Gottfried Wilhelm Leibniz, Juan Caramuel y Lobkowitz and Erhard Weigel. Already at the end of the 16th century, a German mathematician Anton Schultze described the base-24 positional number system and showed the basic arithmetic operations in this system. Schultze did so in an example that he included in his textbook of commercial arithmetic published in 1584 and -in a slightly modified form -in an extended version of the textbook that appeared in 1600.

---

2020 Mathematics Subject Classification. 01A40; 01A45; 11A99; 00A08

Keywords. Nondecimal number systems; Quadrivigesimal system; Anton Schultze; Commercial arithmetics

Date: Received 01-05-2026 Revised 15-05-2026 Accepted 21-06-2026 Available Online 21-06-2026

©Ferdowsi University of Mashhad.