به سوی علوم ریاضی

دوره ۶، شماره ۲ پاییز و زمستان ۱۴۰۵ ، صص. ۸۴–۹۴

DOI. 10.22067/tmsj.2026.99357.1095

مقاله علمی–ترویجی

https://tmsj.um.ac.ir

بازنمایی مشتق در سه جهان تفکر ریاضی

نوروز هاشمی

گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان تهران ایران.

h.nourooz@cfu.ac.ir

چکیده. مفهوم مشتق از بنیادی‌ترین مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال است که نقش مهمی در یادگیری مباحث پیشرفته ریاضی و کاربردهای آن در علوم مختلف ایفا می‌کند. با وجود اهمیت این مفهوم، بسیاری از دانش‌آموزان و دانشجویان در درک مفهومی آن با چالش‌هایی مواجه هستند. بسیاری از دشواری‌های یادگیری مشتق ناشی از ناتوانی یادگیرندگان در برقراری ارتباط میان نمایش‌های هندسی، جبری و اثباتی این مفهوم است. پژوهش حاضر با هدف تبیین مفهوم مشتق در چارچوب نظریه سه جهان تفکر ریاضی انجام شده است. این نظریه، تفکر ریاضی را در سه جهان تجسمی، نمادین و اثبات مورد بررسی قرار می‌دهد و بر ارتباط میان این جهان‌ها در شکل‌گیری یادگیری عمیق تأکید دارد. در این مقاله، ابتدا مبانی نظری سه جهان تفکر ریاضی معرفی شده و سپس بازنمایی‌های مختلف مفهوم مشتق در هر یک از این جهان‌ها نمایش و شرح داده شده است. همچنین، بهره‌گیری از چارچوب سه جهان تفکر ریاضی می‌تواند به شناسایی موانع یادگیری و طراحی راهبردهای آموزشی مؤثر برای ارتقای درک مفهومی مشتق کمک کند. بر این اساس، توجه هم‌زمان به ابعاد تجسمی، نمادین و اثباتی در آموزش مشتق می‌تواند زمینه‌ساز یادگیری عمیق‌تر و پایدارتر این مفهوم در دانش‌آموزان و دانشجویان باشد.

2020 Mathematics Subject Classification. 97C30, 97C70, 97D60.

واژگان کلیدی. مشتق، تفکر ریاضی، نظریه سه جهان ریاضی، یادگیری مفهومی .

تاریخ: دریافت ۱۴۰۵/۰۳/۲۴ بازنگری ۱۴۰۵/۰۶/۳۰ پذیرش ۱۴۰۵/۰۸/۰۵ انتشار برخط ۱۴۰۵/۰۸/۱۴

نحوه ارجاع به این مقاله: ن. هاشمی، بازنمایی مشتق در سه جهان تفکر ریاضی ، به سوی علوم ریاضی، ۶ (۱۴۰۵)، شماره ۲، ۸۴–۹۵.

©دانشگاه فردوسی مشهد.

۱. مقدمه

حساب دیفرانسیل و انتگرال، به عنوان شاخه‌ای اساسی از ریاضیات، نقش مهمی در درک تغییر و نرخ تغییر ایفا می‌کند و مشتق یکی از مفاهیم اصلی آن است [۱۷، ۱۸]. مشتق نه تنها پایه و اساس حل مسائل مختلف دنیای واقعی را تشکیل می‌دهد، بلکه به عنوان یک مفهوم اساسی برای مطالعات ریاضی پیشرفته نیز عمل می‌کند. مفهوم مشتق یکی از مهم‌ترین مباحث در حساب دیفرانسیل و انتگرال است و به عنوان پایه و اساس بسیاری از موضوعات پیشرفته در علوم، مهندسی، اقتصاد و تجزیه و تحلیل داده‌ها عمل می‌کند. درک مشتق به دانشجویان کارشناسی کمک می‌کند تا هم استدلال ریاضی و هم مهارت‌های حل مسئله عملی را توسعه دهند [۱۱]. بنابراین، درک قوی از اصول اساسی مشتق برای دانشجویانی که ریاضیات یا رشته‌های مرتبط را دنبال می‌کنند، ضروری است [۱۹]. با این حال، علی‌رغم اهمیت آن، بسیاری از دانش‌آموزان و دانشجویان در درک مفهومی مشتق با چالش‌هایی روبرو هستند [۳۱]. این چالش‌ها معمولاً از نبود شفافیت در پیوند میان تعریف رسمی مشتق که بر اساس نمودار، فرمول‌ها و اثبات‌ها بنا شده و قضایای مشتق‌گیری (که معمولاً برای انجام محاسبات به‌کار می‌روند) نشأت می‌گیرند. این عدم ارتباط باعث می‌شود دانش‌آموزان و دانشجویان به شدت به روش‌های رویه‌ای، مانند اعمال قوانین مشتق‌گیری، بدون درک کامل اصول اساسی، عدم تجسم شکل و ناتوانی در ترسیم نمودار تکیه کنند [۶، ۳۳].

توماس [1] بیان می‌دارد مفهوم مشتق، سرعت تغییر یک کمیت نسبت به کمیت دیگر را اندازه‌گیری می‌کند [۳۴]. به عنوان مثال، سرعت، مشتق مکان نسبت به زمان است. نرخ رشد جمعیت، مشتق جمعیت نسبت به زمان است. هزینه نهایی در اقتصاد، مشتق هزینه نسبت به تولید است. این امر، مشتق را برای تجزیه و تحلیل پدیده‌های دنیای واقعی ضروری می‌کند. در بهینه‌سازی، بسیاری از مسائل عملی شامل یافتن حداکثر یا حداقل مقدار یک تابع هستند. مشتق به تعیین مواردی از قبیل حداکثر سود برای یک شرکت، حداقل هزینه تولید، ابعاد طراحی بهینه در مهندسی و بهترین تخصیص منابع کمک می‌کند [۳۵]. در واقع، بهینه‌سازی به طور گسترده در تجارت، مهندسی و تحقیق در عملیات استفاده می‌شود. به علاوه، برای تحلیل رفتار تابع، مبانی ریاضیات پیشرفته، علوم مهندسی و اقتصاد، مشتق به عنوان یک مفهوم زیربنایی نقشی اساسی در پیشبرد این علوم دارد [۲۳، ۲۴].

از دیدگاه دوندرایا [2] برای دانشجویان کارشناسی، مشتقات چیزی بیش از یک تکنیک ریاضی هستند. آنها ابزاری قدرتمند برای درک تغییر، حل مسائل بهینه‌سازی، مدل‌سازی سیستم‌های دنیای واقعی و آماده‌سازی برای مطالعات پیشرفته در علوم، مهندسی، اقتصاد و علوم داده ارائه می‌دهند. تسلط بر مشتقات، پایه تحلیلی قوی ایجاد می‌کند که هم از موفقیت تحصیلی و هم از کاربردهای حرفه‌ای پشتیبانی می‌کند [۱۳]. اگرچه مشتق در حساب دیفرانسیل و انتگرال اساسی است، اما بسیاری از دانشجویان کارشناسی یادگیری آن را دشوار می‌دانند. این چالش‌ها هم از عدم درک مفهومی و هم از فقدان مهارت‌های رویه‌ای ناشی می‌شوند.

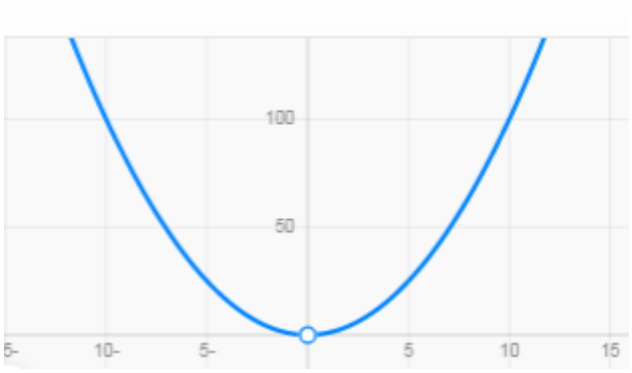
دشواری در درک مفهوم حد مشتق یکی از رایج‌ترین چالش‌های یادگیری است [۱۲، ۱۸]. مشتق با استفاده از مفهوم حد به صورت $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ تعریف می‌شود. بسیاری از دانشجویان و دانش‌آموزان برای درک اینکه چگونه یک کمیت می‌تواند بدون رسیدن به یک مقدار به آن نزدیک شود، با موانع متعدد مفهومی مواجهه می‌شوند. دانشجویان و دانش‌آموزان اغلب بر حفظ کردن قوانین مشتق‌گیری تلاش می‌کنند بدون اینکه این ایده اساسی را به طور کامل درک کنند. اشتباهات مختلفی را مرتکب می‌شوند و در پیدا کردن جواب نهایی دچار مشکل می‌شوند. بنابراین، با فقدان درک حد در مفهوم مشتق، مشتق را سخت تصور می‌کنند [۲۷].

ناتوانی در اتصال نمایش‌های گرافیکی و جبری مشتق، مشکل دیگر دانشجویان و دانش‌آموزان در فرآیند یادگیری مفهوم مشتق می‌باشد. مشتق را می‌توان به صورت شیب خط مماس، نرخ لحظه‌ای تغییر و یک فرمول ریاضی در نظر گرفت [۲۰، ۳۲]. بسیاری از دانشجویان یک نمایش را می‌فهمند اما در اتصال هر دو نمایش مشکل دارند. برای مثال، شکل ۱، نمودار تابع $f(x) = x^2$ را

[1] Thomas

[2] Devendraiah

نشان می‌دهد که مشتق آن شیب را در هر نقطه توصیف می‌کند و دانش‌آموزان و دانشجویان ممکن است مشتق را به درستی محاسبه کنند، اما در تفسیر معنای آن در نمودار مشکل دارند. مشتق این تابع برابر است با $f'(x) = 2x$. این فرمول این موضوع را مشخص می‌کند که برای تابع درجه دوم مورد اشاره، شیب خط مماس در هر نقطه از نمودار این تابع برابر با ۲x است. نمودار تابع درجه دوم در شکل ارائه شده است. می‌توان گفت برای مثال در x=۰ ، شیب ۰ است، در x=۱ ، شیب ۲، در x=۲ ، شیب ۴ و در x=-۱، شیب ۲- است.



شکل ۱: نمودار تابع درجه دوم

ایده نرخ تغییر لحظه‌ای شهودی نیست. دانش‌آموزان با سرعت متوسط در یک دوره زمانی آشنا هستند، اما درک سرعت در یک لحظه دقیق نیاز به سطح بالاتری از تفکر انتزاعی و درک تجسمی دارد [۱۶، ۲۷]. حفظ قوانین مشتق‌گیری نیز مشکلات یادگیری برای یادگیرندگان به وجود می‌آورد، چون فقط فرمول انتزاعی می‌باشند و به خاطر سپردن آنها بدون درک و فهم ارتباط و تعبیر هندسی ضابطه‌ها سخت خواهد بود. هاشمی و همکاران معتقدند ناتوانی در برقراری ارتباط بین حالت هندسی و جبری مشتق از مهم‌ترین موانع درک و یادگیری آن است [۱۸].

روش‌هایی برای کمک به یادگیرندگان برای غلبه بر مشکلات خود در یادگیری مشتق به ویژه توجه به نمایش جبری و هندسی آن معرفی شده است. مطالعات کاملاً گسترده‌ای در مورد ارائه سه جهان تفکر ریاضی برای کمک به درک دانش‌آموزان و دانشجویان از مفهوم مشتق وجود دارد [۱۴، ۱۵، ۲۵، ۲۶، ۳۷، ۳۶، ۵]. به نظر می‌رسد تفکر ریاضی مبتنی بر سه جهان ریاضی سهم بسزایی در کمک به دانش‌آموزان در یادگیری مفاهیم اساسی مانند مشتق داشته است [۱۸، ۱۲]. اگرچه برخی از روش‌های جدید بر اساس تفکر ریاضی برای کمک به دانش‌آموزان در یادگیری مفهوم مشتق پایه‌گذاری شده است، اما بنا به تحقیقات افرادی چون یزدانفر [۱۰]، رکنابادی [۴]، آقایی [۲]، گویا و حسام [۷]، آذرنگ [۱] و نوریان، داشته و سمیعی زفرقندی [۹]، دانش‌آموزان مقطع دبیرستان و حتی دانشجویانی که با درس حساب دیفرانسیل و انتگرال در ایران سروکار دارند، با مشکلات و موانع جدی در استفاده توأم از نمودار و جبر در فرآیند یادگیری مشتق مواجه هستند.

با توجه به ماهیت انتزاعی و چندلایه مفاهیم حساب دیفرانسیل، تبیین چگونگی شکل‌گیری مفهوم مشتق در ذهن دانش‌آموز و دانشجو، صرفاً با بررسی توانایی او در اجرای رویه‌های نمادین یا به‌کارگیری تعاریف رسمی امکان‌پذیر نیست، زیرا یادگیری مشتق مستلزم پیوند میان تجربه‌های شهودی و تجسمی، دستکاری‌های نمادین و استدلال‌های انتزاعی و رسمی است [۲۷]. ازاین‌رو، نظریه سه جهان تفکر ریاضی تال چارچوبی مناسب برای تحلیل این فرایند فراهم می‌کند، زیرا به جای تقلیل یادگیری به کسب مجموعه‌ای از قواعد و الگوریتم‌ها، چگونگی تحول شناختی دانش‌آموز و یا دانشجو از ادراک و تجربه پدیده‌های ریاضی، به ساخت و انعطاف‌پذیری در استفاده از نمادها و سپس به درک رسمی و ساختاری مفاهیم را مورد توجه قرار می‌دهد. این چارچوب به‌ویژه در مفهوم مشتق

اهمیت دارد. چون یادگیرنده باید بتواند همزمان مشتق را به‌عنوان شیب مماس و نرخ تغییر در جهان تجسمی، حاصل یک فرایند حدی و جبری در جهان نمادین، و مفهومی مبتنی بر تعریف دقیق حد در جهان رسمی درک کند [۱۸]. بنابراین، استفاده از نظریه تال امکان می‌دهد گسست‌ها، پیوندها و گذارهای شناختی میان این سطوح شناسایی شود و روشن گردد که چگونه یک فرایند محاسباتی مانند تشکیل خارج‌قسمت تفاضلی، از طریق پروسپت، کپسوله‌سازی و گذار از فرایند به مفهوم به یک ساختار ذهنی انتزاعی تبدیل می‌شود؛ ازاین‌رو، این نظریه می‌تواند چارچوبی جامع برای تبیین عمیق‌تر فرایند مفهوم‌سازی مشتق فراهم آورد. با این‌حال، بیشتر مشکلات آن‌ها به عدم درک صحیح نمودار مشتق و ارتباط آن با ضابطه توابع برمی‌گردد. با توجه به اینکه تفکر ریاضی مبتنی بر سه جهان ریاضی روشی مؤثر جهت ارتقای یادگیری مشتق می‌تواند به حساب آید [۳۰]، به نظر می‌رسد با دانستن چگونگی رفتار مفهوم مشتق در بستر این نظریه بدفهمی‌ها و کج‌فهمی‌های یادگیری این مفهوم را با به کاربستن این نظریه در قالب چارچوب‌های عملیاتی مرتفع نمود. بنابراین، در این مقاله به معرفی سه جهان تفکر ریاضی و رفتار و نمایش مشتق در بستر این نظریه پرداخته شده است.

۲. نظریه سه جهان تفکر ریاضی

گری و تال [۳] از سال ۲۰۰۱ روی روش‌هایی کار می‌کردند که در آن‌ها انواع موضوعات مختلف ریاضی را مفهوم‌سازی کنند و به‌ویژه به تمایز بین اشکال تشکیل‌شده در هندسه (مانند نقاط، خطوط، دایره‌ها، چندوجهی) و مفاهیم مورد مطالعه در حساب، جبر و حساب نمادین (اعداد، عبارات جبری، حدود) علاقه‌مند بودند [۱۵]. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که توسعه مفاهیم هندسی به تبعیت از رشد طبیعی و پیشرفت هندسه است که توسط ون‌هیل [۴] در سال ۱۹۸۶ توضیح داده شده است که در آن اشکال ابتدا به عنوان گشتالت یا یک شیء کل کامل درک می‌شوند، سپس به توصیف جزئیات و ویژگی‌های آن‌ها پرداخته می‌شود و در نهایت این توصیف‌ها به تعاریف مناسب برای استنباط و اثبات تبدیل می‌شوند. با این‌حال، اعداد و جبر از طریق انتزاعی شدن فرآیند شمارش آغاز شدند و گسترش آن‌ها از طریق توسعه مفاهیم به صورت متوالی انجام شد که در آن ابتدا فرآیندها به صورت نمادین و سپس به عنوان مفاهیم استفاده می‌شدند، مانند جمع، ضرب، توان و مفهوم قابل دستکاری عبارات جبری [۲۹].

برای مثال، گری و تال به مفهوم حد به‌عنوان یک فرآیند بالقوه بی‌نهایت نزدیک (تقریب و ایده حدود) علاقه‌مند بودند. آن‌ها مسیر فکری را بررسی می‌کردند که از تجربه‌های مفاهیم ابتدایی ریاضی شروع می‌شود و به اثبات در ریاضیات پیشرفته می‌رسد. در این مسیر، ویژگی‌های مشخص ابتدا به‌صورت بدیهیات و تعاریف بیان می‌شوند و سپس ویژگی‌های دیگر با اثبات صوری از آن‌ها استنتاج می‌گردند. گری و تال این ایده را ارائه کردند که سه (یا احتمالاً چهار) نوع اساساً متفاوت از یک شیء وجود دارد [۱۵]، آن‌هایی که از طریق انتزاع تجربی (در بیان پیاژه [۵]) به وجود می‌آیند که منظور مطالعه اشیاء برای کشف است. آن‌هایی که از آنچه پیاژه انتزاع شبه‌تجربی نامید ناشی از تمرکز بر اعمال (مانند شمارش) که به عنوان مفاهیم نمادین و به صورت ذهنی مجردسازی می‌شوند (مانند عدد)، و آن‌هایی که از مطالعه ویژگی‌ها و استنتاج‌های منطقی ناشی می‌شوند، و آن‌هایی که از موارد موجود در رویکرد اثبات مدرن به ریاضیات ناشی می‌شود [۱۸]. پیاژه همچنین مفهوم انتزاع بازتابی را ساختارمند کرد (که اساساً نسخه پیچیده‌تری از انتزاع شبه‌تجربی است) که در آن تمرکز بر اعمال روی اشیاء ذهنی است که به صورت معمول به آن‌ها پرداخته می‌شوند، سپس این اشیاء طی یک فرآیند به مفهوم تبدیل می‌شوند و به عنوان نمادهایی ذهنی در سطح بالاتر در نظر گرفته می‌شوند [۱۵].

متاکسس [۶] بر این باور است که سیر فعالیت گری و تال نشان می‌دهد که بسیاری از مفاهیم نمادین از تجسم‌های طبیعی ناشی می‌شوند و سپس به نمادگرایی پیچیده‌تری منتهی می‌شوند[۲۲]. در حقیقت، در بسیاری از مواقع، افراد از یک فرآیند معین قابل

---

[3] Gray and Tall

[4] Van Hile

[5] Piaget

[6] Metaxas

تفکر استفاده نمی‌کنند و در عوض رویه‌ها را به روش معمولی بر اساس تکرار عملیات آموخته‌شده قبلی انجام می‌دهند. این اتفاق برای دانش‌آموزان و دانشجویان که در یادگیری یک مفهوم ناموفق هستند می‌تواند به شیوه‌ای بسیار موفقیت‌آمیز اتفاق بیفتد. همچنین، در آن رویه‌های آشنا روی نمادهایی انجام می‌شوند که تجسم مفهومی طبیعی برای فرد مورد نظر ندارند. همچنین، این موضوع نشان می‌دهد که با گذشت زمان، استفاده از دستکاری نمادین می‌تواند در پایان به یک تجسم مفهومی معنادار منجر شود [۱۸].

فعالیت‌های علمی تال [۷] در مطالعات اخیر در ارتباط با انتقال تفکر از ریاضیات مدرسه‌ای به ریاضیات رسمی، منجر به تدوین چارچوب نظری سه جهان ریاضی [۸] شده است. این چارچوب، تفکر ریاضی را به سه روش تجسم‌سازی مفهومی در جهان تجسمی [۹] ، نمادسازی عملیاتی در جهان نمادین [۱۰] و صورت‌گرایی اصل موضوعی در جهان اثبات و برهان [۱۱] ارائه می‌کند [۲۸]. دنیای تجسم‌سازی مفهومی، شامل درک مفاهیم، تفکر و عملیات ریاضی روی شکل، نمودار و هیستوگرام می‌باشد، اما دنیای نمادسازی شامل محاسبات بر اساس نمادها و فرمول‌هاست. در جهان برهان، روابط صوری و اصول موضوعی مبتنی بر انتزاع و اثبات‌هاست [۱۸، ۲۱، ۳۰، ۳۳]. شکل ۲ بیانگر مؤلفه‌های نظریه سه جهان ریاضی و جزئیات آن می‌باشد.

همان‌طور که شکل ۲ نشان می‌دهد، سه جهان تفکر ریاضی مشتمل بر جهان تجسمی، جهان نمادین و جهان اثبات یا برهان می‌باشند که اشتراکات جهان‌های ریاضی و چگونگی تفکر در آن‌ها ارائه شده است. اشتراک دو جهان تجسمی و نمادین، نمادین تجسم‌یافته با تفکر تجسم نمادگرایانه و نماد تجسمی است. همچنین اثبات نمادین و اثبات تجسمی در هم‌پوشانی جهان اثبات و برهان به ترتیب با جهان نمادین و تجسمی است. تفکر کاملاً یکپارچه که همان تفکر مبتنی بر سه جهان ریاضی است، در تلاقی سه جهان حاصل می‌شود [۲۸، ۳۰]. با توجه به شکل ۲، سیر توسعه شناختی در تفکر ریاضی، از تعاریف بر مبنای مفاهیم در دو جهان تجسمی و نمادین به سوی اثبات مفاهیم بر مبنای تعاریف در جهان اثبات و برهان پیش می‌رود [۳۰].

نظریه سه جهان تفکر ریاضی فراتر از یک طبقه‌بندی ساده از انواع نمایش‌های ریاضی است و در واقع، فرایند رشد و تحول شناختی دانش‌آموز در ساخت و بازسازی مفاهیم ریاضی را تبیین می‌کند. در این چارچوب، یادگیری ریاضی مستلزم حرکت از تجربه‌های ادراکی و تجسمی به دستکاری نمادین و در نهایت، شکل‌گیری درک رسمی و انتزاعی از مفاهیم است. یکی از مفاهیم محوری در این فرایند، گذار از فرایند به مفهوم [۱۲] است [۲۹]. به این معنا که دانش‌آموز ابتدا یک فرایند یا الگوریتم را برای انجام یک عمل ریاضی می‌آموزد، اما به‌تدریج همان فرایند را به‌عنوان یک موجودیت یا مفهوم مستقل در ذهن خود درک می‌کند. در این میان، مفهوم فرهوم [۱۳] بیانگر پیوند هم‌زمان میان نماد ریاضی، فرایند تولیدشده توسط آن و مفهوم حاصل از آن است. همچنین، کپسوله‌سازی [۱۴] نقش مهمی در این تحول دارد، زیرا فرایندهای پویا و اجرایی، به‌تدریج در ذهن دانش‌آموز به اشیای ذهنی و قابل بررسی تبدیل می‌شوند [۳۲]. این تحول از فرایند به مفهوم و از تجربه‌های عینی به ساختارهای انتزاعی، زمینه را برای تحول شناختی به سوی تفکر صوری [۱۵] فراهم می‌کند [۳۱]. به‌طوری‌که دانش‌آموز در سطوح بالاتر قادر می‌شود مفاهیم ریاضی را نه صرفاً از طریق انجام عملیات، بلکه بر اساس روابط، تعاریف، ویژگی‌ها و استدلال‌های رسمی درک و تحلیل کند. به نظر می‌رسد شایسته است مفهوم

---

[7] Tall

[8] Three Worlds of Mathematics

[9] Embodied World

[10] Symbolic World

[11] Formal World

[12] transition from procedure to concept

[13] Procept

[14] Encapsulation

[15] cognitive development toward formal thinking



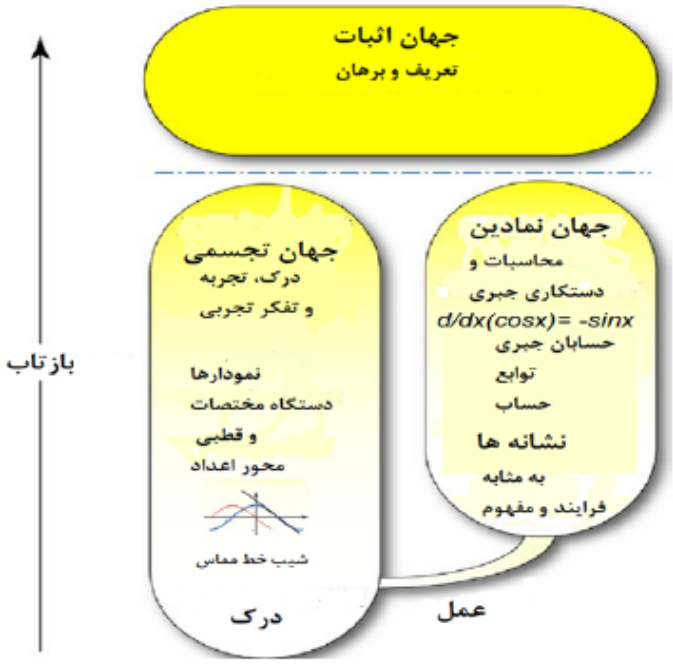
شکل ۲: نظریه سه جهان ریاضی و ارتباطات آن‌ها [۲۸]

ریاضی مورد نظر در این پژوهش، یعنی مفهوم مشتق، از منظر سه جهان تفکر ریاضی تبیین شود تا بتوان از آن در تبیین بازنمایی‌های مشتق در فرایند یادگیری استفاده کرد.

۳. مفهوم مشتق از منظر سه جهان ریاضی

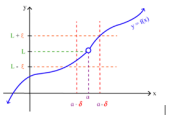
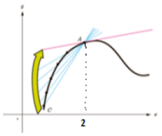
مشتق یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که دارای کاربردهای وسیع در ریاضیات و علوم دیگر است. در دوره دبیرستان، مشتق از مفاهیم مهم می‌باشد که همیشه یادگیری آن با چالش‌های اساسی مواجه بوده است [۹]. درباره مفهوم مشتق در دوره متوسطه در ایران می‌توان گفت که در کتاب حسابان سال دوازدهم به صورت جدی به آن پرداخته شده است، یعنی بعد از مفاهیم تابع، حد و پیوستگی [۳]. ایده اولیه در مورد مفهوم مشتق، از شیب یک خط شروع می‌شود. زمان زیادی برای حل مسئله تاریخی یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی صرف شده است. مفهوم خط مماس بر یک دایره از زمان‌های گذشته مشخص بوده است ولی یافتن معادله خط مماس بر منحنی از اوایل قرن هفدهم میلادی مطرح گردید و سپس در منابع درسی دبیرستانی و دانشگاهی به یک مفهوم مهم تبدیل گردید [۸]. همچنین، تال [۲۹] مفهوم مشتق را بر اساس نظریه تفکر ریاضی در هر سه جهان نشان داد که در شکل ۳ آمده است. در شکل ۳، مفهوم مشتق برای تابع مثلثاتی $f(x) = \cos x$ با توجه به سه جهان ریاضی از قبیل جهان تجسمی، جهان نمادین و جهان اثبات نشان داده شده است [۲۹].

رکن اصلی در جهان اول تفکر ریاضی، رسم نمودار توابع و نشان دادن جزئیات مربوطه به یک مفهوم در شکل و نمودار رسم‌شده است. نمایش مفهوم مشتق در جهان اول، استفاده از تعبیر هندسی، رسم نمودار تابع همراه با خط مماس در نقطه تماس و خط عمود بر منحنی یک تابع می‌باشد. در جهان دوم، استفاده از نشانه‌ها و علامت‌های جبری مهم است که برای مفهوم مشتق نمایش حالت جبری و نمادین آن و همچنین عملیات‌های مربوط به آن مورد نظر است. استفاده از ϵ و δ و اثبات با استفاده از آن‌ها در آموزش مفهوم مشتق، نمایش این مفهوم در جهان سوم تفکر ریاضی است که فراتر از دبیرستان بوده و در آنالیز و ریاضی عمومی دوره دانشگاهی است و تال در شکل ۳ نیز به همین دلیل وارد جزئیات آن نشده است [۲۹]. برای روشن‌تر شدن موضوع، مفهوم مشتق ابتدا در حالت کلی و سپس با یک مثال از منظر سه جهان تفکر ریاضی در جدول ۱ ارائه شده است.



شکل ۳: ساختار مفهومی مشتق در سه جهان ریاضی [۲۹]

جدول ۱: نمایش‌هایی از مشتق در سه جهان ریاضی

جهان اول	جهان دوم	جهان سوم
	$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$	استفاده از ϵ و δ مورد نظر است که برای اثبات مشتق در پایه دوازدهم مورد استفاده قرار نمی‌گیرد. $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0; 0 < \lvert x-a \rvert < \delta \rightarrow \lvert \frac{(f(x)-f(a))}{(x-a)} - L \rvert < \epsilon$
	$f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow$ $f'(x) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ $= \lim_{x\to 2} \frac{x^2+1-5}{x-2}$ $= \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ $= \lim_{x\to 2} x + 2 = 4$	استفاده از ϵ و δ مورد نظر است که برای اثبات مشتق در پایه دوازدهم مورد استفاده قرار نمی‌گیرد. $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0; 0 < \lvert x-2 \rvert < \delta \rightarrow \lvert \frac{(f(x)-f(2))}{(x-2)} - 4 \rvert < \epsilon$

همان‌طور که در جدول بالا نشان داده شده است، در جهان اول رسم نمودار توابع و رسم شکل آن‌ها و تحلیل و آموزش براساس نمودارها و شکل‌ها به صورت تجسمی و هندسی هدف می‌باشد؛ در حالی که در جهان دوم تمام عملیات و آموزش کاملاً جبری و نمادین است. در جهان سوم، هدف اثبات است که فراتر از حسابان دوره دبیرستان است و در آنالیز ریاضی مورد بحث قرار می‌گیرد. با توجه به این‌که نمایش‌هایی از مفهوم مشتق در سه جهان ریاضی براساس نظریه تفکر ریاضی در سرفصل‌های دبیرستانی و دانشگاهی همیشه مورد تأکید بوده و در شکل‌های ۲ و ۳ و جدول ۱ نیز نمونه‌هایی از آن ارائه گردید، به نظر می‌رسد استفاده از نظریه سه جهان تفکر ریاضی برای کمک به رفع مشکلات یادگیری دانش‌آموزان و دانشجویان در فرآیند یادگیری مفهوم مشتق می‌تواند اثربخش و مفید باشد.

۴. نتیجه‌گیری

نتایج این مطالعه نشان داد که مفهوم مشتق را می‌توان در چارچوب نظریه سه جهان تفکر ریاضی به‌صورت جامع و منسجم تبیین کرد. در جهان تجسمی، یادگیرندگان از طریق نمودارها، شیب خط مماس و نمایش‌های هندسی با مفهوم مشتق ارتباط برقرار می‌کنند. در جهان نمادین، مشتق به‌عنوان یک فرایند محاسباتی و جبری مورد بررسی قرار می‌گیرد و در جهان اثبات، تعریف رسمی و استدلال‌های منطقی مرتبط با آن مطرح می‌شود. بررسی ادبیات پژوهش حاکی از آن است که بسیاری از دشواری‌های دانش‌آموزان در یادگیری مشتق ناشی از ناتوانی در برقراری ارتباط میان این سه نوع نمایش و انتقال انعطاف‌پذیر بین آن‌ها است.

بر این اساس، به نظر می‌رسد بهره‌گیری از نظریه سه جهان تفکر ریاضی می‌تواند چارچوبی مناسب برای طراحی آموزش، تحلیل خطاها و رفع بدفهمی‌های مرتبط با مفهوم مشتق فراهم آورد. آموزش هم‌زمان و پیوسته نمایش‌های تجسمی، نمادین و استدلالی نه تنها موجب تعمیق درک مفهومی دانش‌آموزان و دانشجویان می‌شود، بلکه توانایی آنان را در کاربرد مشتق در موقعیت‌های مختلف ریاضی و واقعی افزایش می‌دهد. ازاین‌رو، پیشنهاد می‌شود معلمان و برنامه‌ریزان آموزشی در طراحی فعالیت‌های آموزشی مشتق، به ایجاد پیوند میان سه جهان تفکر ریاضی توجه ویژه‌ای داشته باشند تا یادگیری معنادار و پایدار این مفهوم اساسی تسهیل گردد.

مراجع

۱. ی. آذرنگ، *کیفیت یادگیری حساب دیفرانسیل و انتگرال در ایران*، مجله رشد آموزش ریاضی، **۲۷** (۱۳۹۱) ۲۴–۳۰.

۲. م. آقایی، *بررسی توانایی های کنترلی برای حل مسئله در انتگرال بی نهایت* ، پایان نامه کارشناسی ارشد منتشر نشده، دانشگاه شهید باهنر ایران، ۱۳۸۶.

۳. حسابان دوازدهم. *کتاب درسی حسابان دوازدهم* ، انتشارات کتب درسی، تهران، ایران، ۱۴۰۱.

۴. ح.ا. رکن آبادی، *انواع درک مفهومی: نظریه های مختلف* ، پایان نامه کارشناسی ارشد منتشر نشده، دانشگاه شهید باهنر ایران، ۱۳۸۶.

۵. ف. زینی وند، *تبیین مفهومی تفکر ریاضی: چیستی، چرایی و چگونگی*، دوفصلنامه مطالعات برنامه درسی آموزش عالی، **۶** (۱۳۹۴) ۱۵۳–۱۷۲.

۶. و. عالمیان، م. صابري، م. و حبیبي، *تحلیل خطاهاي دانش آموزان چهارم تجربي در حل مسائل کلامي کاربرد مشتق بر اساس مدل نیومن در شهرستان سمیرم*، پویش در آموزش علوم پایه، **۴** (۱۳۹۷) ۱–۲۵.

۷. ز. گویا و ع. حسام *نقش طرحواره ها در شکل گیری بدفهمی های ریاضی دانیش آموزان*، رشد آموزش ریاضی، **۲۳** (۱۳۹۱) ۴–۱۵.

۸. ر. محمدیان، *شناسایی عوامل تأثیرگذار بر بدفهمی ها در مشتق و ارائه آموزش با استفاده از نظریه برونر جهت بهتر فهمیدن آن برای دانش آموزان پسر سال سوم دبیرستان شهرستان آبادان* ، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران، ۱۳۹۳.

۹. م. نوریان، ا.ح. داشته و م. سمیعی زفر قندی، *واکاوی تجربیات معلمان درباره موانع و مشکلات یادگیری درس ریاضی*، دوماهنامه علمی–پژوهشی راهبـردهای آموزش در علوم پزشکی، **۱۵** (۱۴۰۰) ۱۷۴–۱۸۵.

۱۰. م. یزدانفر، *بررسی مهارت های مطالعه در حساب دیفرانسیل و انتگرال برای دوره کارشناسی*، پایان نامه کارشناسی ارشد منتشر نشده. دانشگاه شهید باهنر، ایران، ۱۳۸۵.

11. R. Antonio Zambrano, D.I. Escudero Ávila, and E. Flores Medrano, *An introduction to the concept of derivative in high school students*, Educ. Mat., **31** (2019) 258–280.

12. K.E. Chin, F.F. Jiew, and D. Tall, *The articulation principle for making long-term sense of mathematical expressions by how they are spoken and heard: Two case studies,* The Mathematics Enthusiast, **19** (2022) 657–676.

13. K.M. Devendraiah, *Differential Calculus,* BR Publications, 2026.

14. E. Dubinsky, *Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics,* In: Steffe, L.P. (eds) Epistemological Foundations of Mathematical Experience (pp. 160–202), Recent Research in Psychology. Springer, New York, NY, 1991.

15. E. Gray and D. Tall, *Relationships between embodied objects and symbolic procepts: An explanatory theory of success and failure in mathematics,* In PME conference, **3** (2001) 3–65.

16. G. Greefrath, R. Oldenburg, H.S. Siller, V. Ulm, and H.G. Weigand, *Mathematics students' characteristics of basic mental models of the derivative*, Journal für Mathematik-Didaktik (2022) 1–27.

17. S. Haber and M. Abboud, *Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course,* J. Math. Behav., **25** (2006) 57–72.

18. N. Hashemi, H. Kashefi, and M.S. Abu, *The emphasis on generalization strategies in teaching integral: Calculus lesson plans*, Sains Humanika , **12** (2020) 35–43.

19. G. Jameson, M. F. Machaba and V.G. Fasinu, *Misconceptions and errors among grade 12 students when learning differentiation rules: A case study,* Math. Educ. J., **8** (2024), 221–243.

20. Y. Karpuz and E.Atasoy, *High school mathematics teachers' content knowledge of the logical structure of proof deriving from figural-concept interaction in geometry,* Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., **51**(2020) 585–603.

21. H. Kashefi, Mathematical thinking in multivariable calculus through blended learning , Unpublished Ph.D. Thesis, Universiti Teknologi Malaysia (UTM). Malaysia, 2012.

22. N. Metaxas, *Difficulties on understanding the indefinite integral,* In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S., Seo, D. Y. (Eds.), Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Seoul: PME, (2007) 265–272.

23. E. Nardi, T. Dreyfus, A.S. González-Martín, J. Monaghan and P.W. Thompson, *Editorial for the special issue making meaning through, and for, Calculus in Biology, Chemistry,*

Economics, Engineering, and Physics, Int. J. Res. Undergrad. Math. Educ., **11** (2025), 661–670.

24. W.R. Oktaviani, T. Herman and D. Darhim, *Didactic design to improve mathematical reasoning ability of high school students on derivative application materials,* In AIP Conference Proceedings, **2577** (2022) 20–47.
25. Roselainy A. Changing my own and my students' attitudes to calculus through working on mathematical thinking, Unpublished Ph. D. Thesis. Open University. UK, 2008.
26. A.H. Schoenfeld, *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making mathematics,* Grouws, D. (Ed), Research on Mathematics Teaching and Learning, 334–370. Macmillan, New York. USA, 1992.
27. P. McClain, *Curriculum for a two semester calculus course specializing in life science and data science,* Master's thesis, Louisiana State University and Agricultural & Mechanical College, 2026.
28. D. Tall, Advanced mathematical thinking (11 Ed.). London: Kluwer academic publisher, 2002.
29. D. Tall, *Thinking through three worlds of mathematics,* In Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen: Bergen University College, Norway, **4** (2004) 281–288.
30. D. Tall, *The transition to formal thinking in mathematics,* Math. Educ. Res. J., **20** (2008) 5–24.
31. D. Tall, *A sensible approach to the calculus,* Plenary at The National and International Meeting on the Teaching of Calculus. 23–25th September, Puebla, Mexico, 2010.
32. D. Tall, *Making sense of mathematical thinking over the long term: The framework of three worlds of mathematics and new developments*, MINTUS: Beiträge zur mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Bildung. Wiesbaden: Springer, 2020.
33. R.A. Tarmizi, *Visualizing students' difficulties in learning calculus,* Procedia Soc. Behav. Sci., **8** (2010) 377–383.
34. R.D. Thomas, *James Hutton's concept of time: that of Leibniz, not Newton,* Geol. Today, **38** (2022) 108–111.
35. A. Thompson, *Bridging mathematical proficiency and economic reasoning: A commentary on calculus in undergraduate economics education,* Int. J. Res. Undergrad. Math. Educ, **11**(2025), 773–780.
36. A. Watson and J. Mason, Questions and prompts for mathematical thinking, ATM, Derby, 1998.
37. Y. M. Yusof and D. Tall, *Changing attitudes to university mathematics through problem solving,* Educ. Stud. Math., **37** (1998), 67–82.

Towards Mathematical Sciences

Vol. 6, No. 2, Autumn and Winter 2026, pp. 84–94

DOI.10.22067/tmsj.2026.99357.1095

Expository Article

به سوی علوم ریاضی

https://tmsj.um.ac.ir

DERIVATIVE REPRESENTATION IN THE THREE WORLDS OF MATHEMATICAL THINKING

NOUROOZ HASHEMI,

[1]Department of Mathematics Education, Farhangian University, P.O. Box 14665-889, Tehran, Iran
h.nourooz@cfu.ac.ir

Abstract. The concept of derivative is one of the most fundamental concepts of differential and integral calculus, which plays an important role in learning advanced mathematical topics and its applications in various sciences. Despite the importance of this concept, many students face challenges in understanding its concept. Many of the difficulties in learning derivative arise from the inability of learners to establish a connection between geometric, algebraic, and proof representations of this concept. The present study aims to explain the concept of derivative within the framework of the theory of three worlds of mathematical thinking. This theory examines mathematical thinking in three worlds of visualization, symbols, and proof, and emphasizes the relationship between these worlds in the formation of deep learning. In this article, first, the theoretical foundations of the three worlds of mathematical thinking are introduced, and then different representations of the concept of derivative in each of these worlds are presented and analyzed. Also, using the three worlds of mathematical thinking framework can help identify learning barriers and design effective educational strategies to promote conceptual understanding of derivative. Accordingly, paying simultaneous attention to the visual, symbolic, and demonstrative dimensions in derivative teaching can pave the way for deeper and more sustainable learning of this concept in students.

2020 Mathematics Subject Classification. 97C30, 97C70, 97D60

Keywords. Derivative, Mathematical thinking, Three-world theory of mathematics, Conceptual learning

Date: Rceived 14-06-2026 Revised 21-09-2026 Accepted 27-10-2026 Available Online 05-11-2026

©Ferdowsi University of Mashhad.