دوره ۶، شماره ۲ پاییز و زمستان ۱۴۰۵ ، صص.۹۵–۱۰۱
DOI. 10.22067/tmsj.2026.98237.1080
مقاله علمی–ترویجی
به سوی علوم ریاضی
https://tmsj.um.ac.ir

هیچ برهان اقلیدسی‌ای برای اصل موضوع چهارم وجود ندارد

حسین عزیزی*
گروه ریاضی کاربردی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران
hossein.azizi@iau.ac.ir

چکیده. گیل–فرز و همکاران [۲] ادعا می‌کنند که توانسته‌اند اصل موضوع چهارم اقلیدس را صرفاً با استفاده از روش‌های اقلیدسی اثبات کنند. با این حال، بررسی‌ها نشان می‌دهد که آن‌ها در روند اثبات خود، اصلی را پیش‌فرض گرفته‌اند که اقلیدس هرگز آن را بیان نکرده و به کار نگرفته است. این پیش‌فرض الحاقی از آن جهت بسیار ناموجه است که تعابیر تثبیت‌شدهٔ اصل موضوع چهارم، نظیر طرد نقاط مخروطی، همگنی فضا و یکتایی امتداد خط، را عملاً منتفی می‌سازد.

اقلیدس، ریاضی‌دان برجستهٔ یونان باستان (حدود ۳۰۰ سال پیش از میلاد) که غالباً از وی با عنوان «پدر هندسه» یاد می‌شود، با نگارش شاهکار بی‌بدیل خود، **اصول**[1]، شالوده‌ای مستحکم برای هندسهٔ استنتاجی بنا نهاد. او در این اثر، تمامی دانش هندسی زمان خود را بر پایهٔ چند تعریف، اصل متعارف و پنج «اصل موضوع» سازمان‌دهی کرد. اصل موضوع چهارم وی صراحتاً بیان می‌دارد که «تمامی زوایای قائمه با یکدیگر برابرند». این اصل، در کنار سایر اصول او، قرن‌ها به‌عنوان بدیهیات بی‌نیاز از اثبات پذیرفته

این مقاله ترجمهٔ مقالهٔ زیر است:

V. Blåsjö, *There is no Euclidean proof of the fourth postulate*, Historia Math. **73** (2025), 103171.

2020 Mathematics Subject Classification. 01A55

واژگان کلیدی. اصل چهارم اقلیدس، برهان اقلیدسی، تعریف ۱۰، همگنی فضا.
تاریخ: دریافت ۱۴۰۵/۰۱/۱۷ بازنگری ۱۴۰۵/۰۱/۲۶ پذیرش ۱۴۰۵/۰۴/۲۴ انتشار برخط ۱۴۰۵/۰۸/۱۴

نحوه ارجاع به این مقاله: ح. عزیزی، هیچ برهان اقلیدسی‌ای برای اصل موضوع چهارم وجود ندارد، به سوی علوم ریاضی، ۶ (۱۴۰۵)، شماره ۲، ۹۵–۱۰۱.

©دانشگاه فردوسی مشهد.

[1]The Elements

شده بودند و تلاش‌های بعدی ریاضی‌دانان برای استنتاج این اصول از یکدیگر، همواره یکی از چالش‌برانگیزترین مباحث در تاریخ ریاضیات و مبانی هندسه بوده است. با توجه به این پیشینهٔ تاریخی، مقالهٔ حاضر به بررسی یکی از جدیدترین ادعاها در این حوزه می‌پردازد.

گیل‌ـفرز[۲] و همکاران [۲، ص. ۲۶] مدعی‌اند که توانسته‌اند «برهانی صرفاً اقلیدسی برای اصل موضوع چهارم» ارائه دهند. به‌زعم آنان، این رویکرد با پیروی از «رهیافتی بی‌چون‌وچرا اقلیدسی... مطلقاً با روش‌های برهانی خود اقلیدس انطباق دارد» [۲، ص. ۲۶] و در آن «تنها از ابزارهای اصیل اقلیدسی بهره گرفته شده است؛ همان ابزارهایی که شخص اقلیدس به‌وفور در اثبات و حل بسیاری از گزاره‌های کتاب اول خود به کار می‌بندد» [۲، ص. ۲۸].

بااین‌وجود، نویسندگان در عمل اصلی را پیش‌فرض می‌گیرند که اقلیدس نه آن را تصریح کرده و نه به‌طور ضمنی پذیرفته است. این اصل به شرح زیر است:

تعریف ۱.۰ (عکس تعریف ۱۰ (Def10conv)). *: اگر زاویهٔ AOB یک زاویهٔ قائمه باشد و ضلع AO بنا بر اصل موضوع دوم تا نقطهٔ C امتداد یابد، آن‌گاه زاویهٔ حاصل، یعنی BOC، نیز قائمه بوده و با زاویهٔ AOB برابر خواهد بود.*

نویسندگان در پایان بخش ۱ مقالهٔ خود، اساساً همین اصل را با این تصور که در تعریف دهم اقلیدس نهفته است، به بحث می‌گذارند. آن‌ها وابستگی برهان نهایی خود به این اصل را در روند استدلالشان پنهان می‌کنند؛ دقیقاً در پایان بخش ۵، جایی که برهان خود را برای اصل موضوع چهارم با فرض دو جفت زاویهٔ قائمهٔ مجاور آغاز می‌کنند. روشن است که برهان اصل موضوع چهارم باید از دو زاویهٔ قائمهٔ مفروض آغاز شود (همان‌گونه که پروکلوس[۳] در «برهان» خویش —که نویسندگان نیز آن را بررسی کرده‌اند— دقیقاً همین رویه را در پیش می‌گیرد). برای گذر از دو زاویهٔ قائمهٔ مفروض به چهار زاویه‌ای که نویسندگان فرض کرده‌اند، ناگزیر باید تعریف ۱.۰ به‌طور ضمنی پیش‌فرض انگاشته شود.

دقیق‌تر آنکه، گیل‌ـفرز و همکاران برهان خود را چنین آغاز می‌کنند: «فرض کنید چهار زاویهٔ AOB، BOC، PUQ و QUR مفروض باشند که همگی قائمه‌اند؛ بدین معنا که $AOB = BOC$ و $PUQ = QUR$» [۲، ص. ۲۸]. یک برهان کاملاً صریح، ناگزیر باید از دو زاویهٔ قائمهٔ مفروض (برای مثال AOB و PUQ) آغاز گردد. سپس، باید از اصل موضوع دوم بهره گرفت تا ضلع AO تا نقطهٔ C، و ضلع PU تا نقطهٔ R امتداد یابند. این کار، دو زاویهٔ جدید BOC و QUR را پدید می‌آورد. گیل‌ـفرز و همکاران نیازمند آن‌اند که این زوایای جدید نیز قائمه بوده و با زوایای قائمهٔ مجاور خود برابر باشند (همان‌گونه که در جملهٔ نقل‌شده تصریح شد). اما این امر تنها در صورتی قابل استنتاج است که تعریف ۱.۰ را بر تعریف اقلیدس از زاویهٔ قائمه تحمیل کنیم؛ رویکردی که پا را از مرزهای منطوق صریح تعریف اقلیدس فراتر می‌گذارد.

ساختار منطقی تعریف دهم اقلیدس بدین صورت است: شرط، مستلزم قائمه بودن است. اما نویسندگان مقاله، این تعریف را در جهت عکس آن به کار می‌گیرند: قائمه بودن، مستلزم شرط است. با این حال، هیچ‌گونه شواهد متنی برای چنین برداشتی در آثار اقلیدس وجود ندارد. اقلیدس اساساً نیازی نداشت تا تعریف ۱.۰ را پیش‌فرض بگیرد. در دستگاه هندسی اقلیدس (یعنی با توجه به اصل موضوع چهارم)، تعریف ۱.۰ به‌آسانی از بطن نخستین قضیهٔ وی پیرامون زوایای قائمه (قضیهٔ ۱۳ از کتاب اول) استنتاج می‌گردد. ازاین‌رو، پیش‌فرض انگاشتن تعریف ۱.۰ از سوی اقلیدس، امری کاملاً عبث و زائد می‌بود.

تعریف دهم اقلیدس مقرر می‌دارد که اگر فضای واقع در یک سوی یک خط را تنصیف کنید، یک زاویهٔ قائمه حاصل می‌شود. زاویهٔ قائمه‌ای را که بدین‌طریق به دست می‌آید، زاویهٔ «قائمهٔ بنیادین»[۴] می‌نامیم. اما ممکن است زوایایی نیز وجود داشته باشند که

[2] Gil-Férez

[3] Proclus

[4] Primitively right angle

بتوان آن‌ها را زوایای «قائمهٔ اشتقاقی»[5] نامید؛ بدین معنا که این زوایا نه از طریق تنصیف مستقیم، بلکه به حکم برابری قابل‌اثباتشان با زوایای قائمهٔ بنیادین، زاویهٔ قائمه محسوب می‌شوند. (این اصل که هر زاویهٔ برابر با یک زاویهٔ قائمه، به‌نفسه قائمه است، توسط خود اقلیدس استفاده شده است؛ برای نمونه در پایان برهان وی بر قضیهٔ ۴۸ از کتاب اول و همچنین به‌دفعات در کتاب‌های بعدی).

بی‌تردید این احتمال قوی وجود دارد که مقصود اقلیدس از تعریف خود، یک شرط «اگر و تنها اگر» بوده باشد، ولو آنکه وی آن را بدین‌گونه صورت‌بندی نکرده است. تردیدی نیست که تعاریف دوشرطی «اگر و تنها اگر»، به‌مراتب از تعاریف یک‌سویهٔ «اگر–آن‌گاه» متداول‌ترند. اما از سوی دیگر، تخصیص یک اصل موضوع مستقل به یک مفهوم واحد نیز امری نامتعارف است؛ بنابراین، چه‌بسا دلایلی برای اعمال یک کمینه‌گرایی استثنایی و عامدانه در این مورد خاص وجود داشته است. اعتبار این خوانش بدوی از تعریف دهم اقلیدس به‌عنوان یک استلزام یک‌سویه، در پرتو قیاس آن با اصل متعارف چهارم وی دوچندان می‌گردد؛ اصلی که تصریح می‌دارد اشیائی که بر یکدیگر منطبق می‌گردند، با هم برابرند (مفهومی که می‌توانیم آن را «برابر بنیادین»[6] بنامیم). انطباق مستلزم برابری است، اما عکس آن صادق نیست. برخی اشیاء صرفاً «برابر اشتقاقی» هستند، بی‌آنکه «برابر بنیادین» باشند. برای نمونه، اقلیدس در قضیهٔ ۳۵ از کتاب اول، برابری دو مساحت را نشان می‌دهد که بر اساس مفهوم مندرج در اصل متعارف چهارم با یکدیگر برابر نیستند؛ بدین‌معنا که نمی‌توان آن‌ها را از طریق هم‌نهشتی بر یکدیگر منطبق ساخت. این نمونه‌ای از برابری اشتقاقی در تقابل با برابری بنیادین است. بنابراین، اصل متعارف چهارم، مفهوم برابری را در گام نخست «پایه‌گذاری» می‌کند، اما دامنهٔ آن را محدود نمی‌سازد. به همین سیاق، می‌توان چنین پنداشت که تعریف دهم نیز صرفاً در حال «بذرپاشی و تکوین» مفهوم زاویهٔ قائمه است، نه آنکه لزوماً یک شرط «اگر و تنها اگر» باشد. بدین‌ترتیب، در چارچوبی کاملاً منسجم، یک زاویه می‌تواند به‌معنای واقعی کلمه قائمه باشد، بی‌آنکه این امر (به‌موجب تعریف) خودبه‌خود مستلزم آن باشد که زاویهٔ مجاور آن نیز لزوماً قائمه است.

حتی اگر فرض کنیم که تمامی زوایای قائمه، «قائمهٔ بنیادین» هستند یا در محیط محلی خود با نصف کردن فضای یک سوی خط راست مطابقت دارند، باز هم تعریف ۱۰ به‌طور خودکار نتیجه‌گیری نمی‌شود؛ مگر آنکه فرض دیگری را نیز بپذیریم: یکتایی جهت در امتداد پاره‌خط‌ها. (به این معنا که اگر یکی از اضلاع زاویهٔ قائمه امتداد یابد، این امتداد لزوماً همان خطی خواهد بود که فضا نسبت به آن نصف شده است). در واقع، نخستین قضایای اقلیدس دربارهٔ زوایای قائمه (قضایای ۱۳ و ۱۴ از کتاب اول)، با دقت بالایی هم‌ارزی میان «فضای زاویه‌ای متشکل از دو زاویهٔ قائمه» و «راست بودن خطوط» را تبیین می‌کنند. این مسئله، در کنار اصل موضوع چهارم، می‌تواند به‌عنوان اثباتی برای یکتایی جهت امتداد خطوط تفسیر شود. به همین دلیل، زئوتن[7] مطرح کرد که شاید هدف اصلی اقلیدس از بیان اصل موضوع چهارم (که در قضیهٔ ۱۴ کتاب اول به کار رفته)، تضمین همین یکتایی جهت امتداد خطوط بوده باشد [۷، ص. ۱۲۴] و [۸، ص. ۲۷۵]. بنابراین، هرچند اقلیدس فرض‌هایی دربارهٔ یکتایی خطوط در نظر می‌گیرد که پایه و اساس آن‌ها کاملاً روشن نشده است، اما نمی‌توان قطعی گفت که او بدون وجود اصل موضوع چهارم هم این فرض‌ها را می‌پذیرفته است. این در حالی است که نویسندگان مقاله، با پیش‌فرض گرفتن تعریف ۱۰ برای اثبات اصل موضوع چهارم، عملاً چنین فرضی را به متن تحمیل می‌کنند.

در همین راستا، طرح این پرسش بسیار روشنگر است: اگر مجموع زوایای یک سوی یک خط، برابر با دو زاویهٔ قائمه نباشد، چنین وضعیتی چگونه تجسم پیدا می‌کند؟ اگر یک خط رسم‌شده روی کاغذ را در نظر بگیرید، می‌توانید این وضعیت را به دو روش زیر ایجاد کنید: ابتدا با قیچی از لبهٔ کاغذ تا نقطه‌ای روی خط، یک برش ایجاد کنید؛ سپس:

(۱) حالت اول: یک قطاع (بخش زاویه‌دار) از فضا را از درون کاغذ ببُرید و لبه‌های باقی‌مانده را به هم متصل کنید. (در این حالت، مجموع زوایای یک سوی خط به کمتر از ۱۸۰ درجه کاهش می‌یابد).

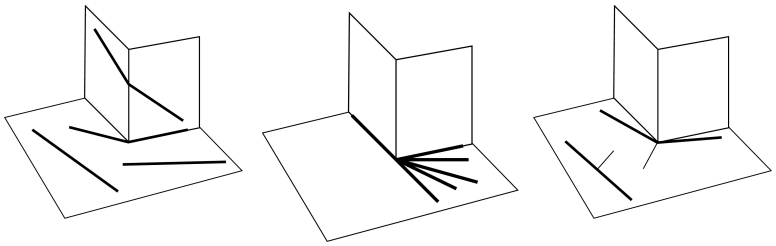
---

[5] Derivatively right angle

[6] Primitively equal

[7] Zeuthen

(۲) حالت دوم: یک قطاع با «درجات اضافه» را در محل شکاف قرار داده و بچسبانید. (در این حالت، مجموع زوایای یک سوی خط به بیش از ۱۸۰ درجه افزایش می‌یابد). اصل موضوع چهارم اقلیدس، دقیقاً برای رد کردن و کنار گذاشتن چنین نقاط مخروطی‌شکلی وضع شده است [۱، ص. ۲۲۲]. برای نمونه، مخروط ۴۵۰ درجه‌ای که در فصل چهارم کتاب هندرسون[8] و تایمینا[9] [۴] بررسی شده و در شکل ۱ نیز آمده است، یک مدل جالب ارائه می‌دهد. (البته با این فرض که تعریف مبهم اقلیدس از خطوط راست، با تعریف دقیق‌ترِ ارشمیدس تکمیل شده باشد: «از میان تمام خطوطی که نقاط ابتدایی و انتهایی یکسانی دارند، خط راست کوتاه‌ترین آن‌هاست»). در این مدل مخروطی، اصول موضوع اول تا سوم اقلیدس صدق می‌کنند، اما اصل موضوع چهارم صادق نیست. اگر بپذیریم که این مدل، مفاهیم اقلیدسی (نقطه، خط و...) را به‌درستی بازنمایی می‌کند، نشان می‌دهد که اصل موضوع چهارم را نمی‌توان صرفاً بر پایهٔ تعاریف و اصول موضوع اول تا سوم اقلیدس اثبات کرد؛ زیرا در آن مفروضات اولیه، هیچ‌چیز ناسازگاری با این مخروط وجود ندارد که بخواهد اصل موضوع چهارم (و به‌تبع آن، یکتایی امتداد خطوط) را نقض کند. در همین حال، تعریف ۱.۰ نیز در این مدل صدق نمی‌کند. این موضوع بار دیگر نشان می‌دهد که تعریف ۱.۰ یک فرض محتوایی اضافه‌شده است که از مرزهای مفاهیم بنیادین و اصیل اقلیدس فراتر می‌رود.



شکل ۱: مدل مخروط ۴۵۰ درجه‌ای. تصویر سمت چپ: نمونه‌هایی از خطوط راست (مسیرهای کوتاه‌ترین فاصله، ژئودزیک‌ها). تصویر میانی: نمونه‌هایی از خطوط راست که نشان‌دهندهٔ عدم یکتایی امتداد خطوط هستند. تمامی این خطوط، امتدادهایی از یک پاره‌خط اولیهٔ واحد محسوب می‌شوند. تصویر سمت راست: نمونه‌هایی از زوایای قائمه که با یکدیگر برابر نیستند. دو جفت زاویهٔ قائمه با نصف کردن فضای یک سوی یک خط راست (بر اساس تعریف دهم) ایجاد شده‌اند؛ با این حال، زوایای قائمه در نقطهٔ مخروطی، بزرگ‌تر از زوایای قائمه در سایر نقاط هستند.

این احتمال وجود دارد که هندسه‌دانان هم‌عصر اقلیدس، برای بررسی و پرسش‌گری دربارهٔ مبانی هندسه، از مدل‌های فیزیکی و ملموس «نقطهٔ مخروطی» استفاده کرده باشند. در همین راستا، این نکته بسیار تأمل‌برانگیز است که «به نظر می‌رسد دیودوروس[10] در رسالهٔ گمشده‌اش به نام آنالما[11]، از [اصل موضوع سوم اقلیدس] برای رسم کمان دایره روی سطح یک مخروط استفاده کرده است» [۵، ص. ۵۸۸]. البته این احتمال هم می‌رود که هندسه‌دانان باستان، حتی بدون در اختیار داشتن مدل‌های فیزیکی، به درک و

[8] Henderson

[9] Taimina

[10] Diodorus

[11] Analemma

بصیرت‌های مشابهی دست یافته باشند. این موضوع با استدلال توث[۱۲] [۶، ص. ۱۳۲] دربارهٔ اصل موضوع پنجم قابل مقایسه است. او معتقد است نحوهٔ برخورد با مفهوم خطوط موازی در دوران باستان، «نشان‌دهندهٔ سطح شگفت‌انگیز و ظرافت خارق‌العاده‌ای است که تفکر اصل‌موضوعی در آن زمان، در میان هندسه‌دانان آکادمی به آن رسیده بود». این دستاوردها شامل درک عمیقی است که امروزه، در پرتو هندسهٔ هذلولوی، صحت آن‌ها را به‌روشنی متوجه می‌شویم. با این حال، احتمالاً خود یونانیان نه با در اختیار داشتن مدل فیزیکی هندسهٔ هذلولوی، بلکه بر اساس «تجربهٔ زیستهٔ» ناشی از استدلال دقیق اصل‌موضوعی (مانند تلاش برای رسیدن به تناقض از طریق گزاره‌های نااقلیدسی در غیاب اصل موضوع پنجم) به این حقایق دست یافته‌اند.

دربارهٔ این ادعا که اصل موضوع چهارم اقلیدس حشو و اضافی است، زئوتن [۸، ص. ۲۷۵] می‌گوید:

> با توجه با دقت بالایی که ریاضی‌دانان برجسته در بررسی تک‌تک مراحل ابتدای کتاب اول [اصول] به کار برده‌اند (ریاضی‌دانانی که به‌خاطر محدود بودن دامنهٔ بحث، توجهشان بسیار هوشیارانه‌تر بود)، بسیار بعید است که چنین سهل‌انگاری‌ای رخ داده باشد و کسی متوجه آن نشده باشد. در واقع، وسوسهٔ توقف کار و تلاش برای اثبات این اصل موضوع، بسیار بیشتر از آن بوده که صرفاً آن را به‌عنوان یک اصل بپذیرند.

از این منظر، بسیار بعید به نظر می‌رسد که اقلیدس به‌سادگی از اثباتی بنیادین برای یکی از اصول موضوعهٔ خود (مانند آنچه گیل–فرز و همکاران [۲] ارائه داده‌اند) غفلت کرده باشد. در عوض، دیدگاه زئوتن نشان می‌دهد که وجود اصل موضوع چهارم در کتاب اصول، احتمالاً ریشه در ملاحظات عمیق مبانی‌شناختی دارد که ضرورت این اصل را ایجاب می‌کنند. این فرضیه که هدف اقلیدس از تعریف ۱۰، اصل موضوع ۴، و قضایای ۱۳ و ۱۴ در کتاب اول، پرداختن ظریف به مسئلهٔ «یکتایی امتداد خط» و/یا «چالش‌های مربوط به نقطهٔ مخروطی» بوده است، نشان می‌دهد که چنین تفسیری از اصل موضوع چهارم کاملاً منطقی و امکان‌پذیر است.

برای رد کردن صفحهٔ هذلولوی، به اصل موضوع پنجم نیاز داریم. همچنین، برای کنار گذاشتن مدل مخروط ۴۵۰ درجه‌ای (در غیاب اصل موضوع پنجم)، وجود اصل موضوع چهارم ضروری است. از آنجا که تعاریف و اصول موضوعهٔ پیشین نمی‌توانند این مدل‌های غیرمتعارف را منتفی کنند، برای این منظور نیازمند اصول موضوعهٔ جدیدی هستیم و می‌توان استدلال کرد که اصول موضوعه، ابزارهای مناسبی برای دستیابی به این هدف‌اند. در مقابل، در رویکرد گیل–فرز و همکاران [۲]، همین نتیجه با تحمیل محتوای گزاره‌ای اضافی بر تعریف ۱۰ و با توجه به قضایای هم‌نهشتی مثلث‌ها (یعنی قضایای ۴ و ۸ از کتاب اول) به‌عنوان مفاهیمی در عمل «اصل‌موضوعی»، به دست می‌آید. در واقع، فرضِ تعریف ۱.۰ و قضیهٔ ۴ از کتاب اول، هر کدام به‌تنهایی برای رد کردنِ مدل مخروط ۴۵۰ درجه‌ای کافی هستند. با این حال، محتوای گزاره‌ایِ قابل‌اثبات نباید در دل تعاریف گنجانده شود (همان‌طور که در (Def10conv) اتفاق افتاده است). علاوه بر این، از آنجا که قضیهٔ ۴ در نظام اقلیدسی ماهیت اصل‌موضوعی ندارد، نباید از آن برای تعریف فضایی که در آن کار می‌کنیم، استفاده کرد.

گیل–فرز و همکاران [۲] بر این پیش‌فرض استوارند که از نگاه اقلیدس، حتی در صورت کنار گذاشتن اصل موضوع چهارم، قضیهٔ ۴ از کتاب اول همچنان صادق و برقرار است. در واقع، اثبات ضعیف اقلیدس برای قضیهٔ ۴ (که به‌جای تقلیل قضیه به اصول بنیادین پیشین، بر مفهوم مبهم و اصل‌موضوعی‌نشدهٔ «انطباق/هم‌نهشتی» تکیه می‌کند)، هیچ‌گونه وابستگی مستقیمی به اصل موضوع چهارم نشان نمی‌دهد. بااین‌وجود، این احتمال نیز مطرح است که اقلیدس قضیهٔ ۴ را وابسته به اصل موضوع چهارم می‌دانسته است؛ (این موضوع قطعاً صحت می‌داشت اگر او از مدل‌هایی مانند مخروط ۴۵۰ درجه‌ای آگاه بود و اصل موضوع چهارم را دقیقاً برای رد کردن آن‌ها در نظر گرفته بود). هرچند این مسئله در متن اقلیدس به‌صراحت بیان نشده است، اما اگر اصل موضوع چهارم را در عمل، تضمین‌کنندهٔ «همگنی فضا» بدانیم، این فرض چندان دور از ذهن نخواهد بود. این برداشت، مدت‌هاست که یک دیدگاه استاندارد محسوب می‌شود [۳، ص. ۳۷۵] و بررسی مدل «نقطهٔ مخروطی» نیز آن را تأیید می‌کند (بر این اساس، اصل موضوع

[12] Tóth

چهارم، نقاط مخروطی یا به بیان دیگر، همسایگی‌هایی را که با سایر همسایگی‌ها هم‌ریخت نیستند، رد می‌کند). روشن است که اصل انطباق به‌کاررفته در اثبات قضیهٔ ۴ نیز، عملاً نوعی همگنی فضا (یا ناوردایی نسبت به موقعیت) را پیش‌فرض می‌گیرد. بنابراین، از این زاویه کاملاً قابل درک است که قضیهٔ ۴ می‌توانسته به اصل موضوع چهارم وابسته باشد.

در مقام نتیجه‌گیری، سه استدلال مجزا — مبتنی بر یک‌طرفه بودن تعریف ۱۰، یکتایی امتداد خطوط، و نقاط مخروطی — ارائه کرده‌ام تا از زوایای مختلف نشان دهم چرا فرض گرفتن تعریف ۱.۰ مسئله‌ای حائز اهمیت است و عملاً به‌منزلهٔ افزودن یک اصل موضوع جدید به اصول اقلیدس محسوب می‌شود. هرچند نمی‌توان با قطعیت گفت که آیا این استدلال‌ها بازتاب‌دهندهٔ اندیشهٔ واقعی خود اقلیدس بوده‌اند یا خیر، اما دست‌کم نشان می‌دهند که تعریف ۱.۰ یک فرض بدیهی نیست و با چندین مسئلهٔ بنیادین گره خورده است. صرف‌نظر از اینکه آیا اقلیدس به چنین مفاهیمی می‌اندیشیده یا نه، این واقعیت روشن همچنان پابرجاست که فرض تعریف ۱.۰ در آثار اقلیدس نه به‌صراحت بیان شده و نه به‌طور ضمنی مفروض انگاشته شده است. بر همین اساس، می‌توان نتیجه گرفت که گیل‌ـفرز و همکاران [۲] نتوانسته‌اند یک برهان اصیل اقلیدسی برای اثبات اصل موضوع چهارم ارائه دهند.

سپاس‌گزاری

بدین‌وسیله از داور محترم مقاله که با تذکرات دقیق ویرایشی و نگارشی خود، به شیواتر شدن و غنای ادبی این پژوهش کمک شایانی کردند، صمیمانه قدردانی می‌شود.

مترجم اعلام می دارد که در تهیهٔ پیش‌نویس و ویرایش زبانی نسخهٔ اولیهٔ این مقاله، از ابزارهای هوش مصنوعی استفاده کرده است. با این حال، محتوای نهایی با دقت توسط وی بازبینی، ویرایش و تأیید شده است تا از دقت و صحت علمی متن اطمینان حاصل شود.

مراجع

1. W.K. Clifford, *Lectures and Essays*, Macmillan, London, 1886.
2. J. Gil-Férez, P. Błaszczyk, M. A. Moshier, A. Naibo, M. Panza, J. M. Salanskis *A Euclidean proof for the Fourth Postulate*, Hist. Math. **70** (2025), 10–30.
3. T.L. Heath, *A History of Greek Mathematics, Volume I: From Thales to Euclid*, Clarendon Press, Oxford, 1921.
4. D.W. Henderson and D. Taimina, *Experiencing Geometry*, 3rd ed., Pearson, 2004.
5. N. Sidoli and K. Saito, *The role of geometrical construction in Theodosius's spherics*, Arch. Hist. Exact Sci. **63** (2009), 581–609.
6. I. Tóth, *Fragmente und Spuren nichteuklidischer Geometrie bei Aristoteles*, De Gruyter, Berlin, 2010.
7. H.G. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Höst & Sön, Copenhagen, 1896.
8. H.G. Zeuthen, *Hvorledes Mathematiken i tiden fra Platon till Euklid blev rationel videnskab*, in *Det Kongelige Danske videnskabernes selskabs skrifter, Naturvidenskab og Mathematik, Afd. 8, Raekke I.5*, Copenhagen, 1917.

Towards Mathematical Sciences

Vol. 6, No. 2, Autumn and Winter 2026, pp. 95–101

DOI. 10.22067/tmsj.2026.98237.1080

Expository Article

به سوی علوم ریاضی

https://tmsj.um.ac.ir

THERE IS NO EUCLIDEAN PROOF OF THE FOURTH POSTULATE

HOSSEIN AZIZI

Department of Applied Mathematics, PaM.C., Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran.
hossein.azizi@iau.ac.ir

Abstract. Gil-Férez et al. (2025) claim to prove Euclid's fourth postulate by strictly Euclidean means. In fact, however, they assume a principle that is neither stated nor used by Euclid. This is all the more impermissible since this inserted assumption precludes established interpretations of the fourth postulate in terms of cone points, homogeneity of space, and line-extension uniqueness.

2020 Mathematics Subject Classification. 01A55

Keywords. Euclid's Fourth Postulate; Euclidean Proof; Definition 10; Homogeneity of Space

Date: Received 06-04-2026 Revised 15-04-2026 Accepted 15-07-2026 Available Online 05-11-2026

©Ferdowsi University of Mashhad.