دوره ۶، شماره ۲ پاییز و زمستان ۱۴۰۵ ، صص. ۱۳۸–۱۶۷
DOI. 10.22067/tmsj.2026.98944.1091
مقاله علمی–ترویجی
به سوی علوم ریاضی
https://tmsj.um.ac.ir

برنامهٔ درسی و انسجام ریاضی: واکاوی تنش‌ها در آموزش و یادگیری مفهوم عدد

سمیه رشید

دانش‌آموختهٔ کارشناسی ارشد، گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

somayyeh.rashid@iau.ir

چکیده. این مقاله به واکاوی تنش‌های میان دو عامل اثرگذار می‌پردازد که در حال حاضر، طراحی کتاب‌های درسی و سایر منابع آموزشی را شکل می‌دهند. با بهره‌گیری از تحلیل متنی برنامه‌های درسی مقطع ابتدایی در کشورهای استرالیا و مکزیک، روند خاصی در برنامه‌ریزی درسی را مستند می‌کنیم که در آن، مفهوم عدد تقریباً به‌طور انحصاری در قالب «شمارش» چارچوب‌بندی شده است.

در ادامه تبیین می‌کنیم که این روند، در تقابل با آن دسته از طراحی‌های آموزشی قرار می‌گیرد که هم‌راستا با توصیه‌های ناظر بر بهبود آموزش، در پی خلق تجربه‌های کلاسی مبتنی بر انسجام ریاضی هستند. با استناد به پیشینهٔ پژوهش، نشان می‌دهیم متون تحلیل‌شده، بازتابی از تصمیمات اتخاذشده برای برنامه‌های درسی در دوران «جنبش ریاضیات جدید» هستند؛ امری که حاکی از رواج احتمالی این روند در بسیاری از برنامه‌های درسی ملی است. در نهایت، با مرور وجوه اشتراک در نمونه‌هایی از برنامه‌های درسی که بر پایهٔ تصمیمات و

این مقاله ترجمهٔ مقالهٔ زیر است:

Višňovská, J., and Cortina, J. L. (2025). Curriculum and mathematical coherence: Exploring the tensions in teaching and learning number. *ZDM–Mathematics Education*, **57**(5), 1051–1063.

2020 Mathematics Subject Classification. 97D40, 97C30, 97F50

واژگان کلیدی. طراحی کتاب درسی ریاضی؛ عوامل مؤثر بر طراحی؛ انسجام ریاضی؛ مفهوم‌سازی عدد؛ ریاضیات دورهٔ ابتدایی؛ جنبش ریاضیات جدید .

تاریخ: دریافت ۱۴۰۵/۰۳/۰۴ بازنگری ۱۴۰۵/۰۷/۱۵ پذیرش ۱۴۰۵/۰۷/۱۹ انتشار برخط ۱۴۰۵/۰۸/۱۴

نحوه ارجاع به این مقاله: س. رشید، برنامهٔ درسی و انسجام ریاضی: واکاوی تنش‌ها در آموزش و یادگیری مفهوم عدد، به سوی علوم ریاضی، ۶ (۱۴۰۵)، شماره ۲، ۱۳۸–۱۶۷.

©دانشگاه فردوسی مشهد.

رویکردهای جایگزین شکل گرفته‌اند، ویژگی‌هایی را برجسته می‌کنیم که برنامهٔ درسی را قادر می‌سازد تا از آموزش عدد به‌گونه‌ای پشتیبانی کند که دانش‌آموزان، ریاضیات را به‌عنوان فعالیتی با انسجام درونی تجربه کنند.

۱. مقدمه

این مقاله به واکاوی تأثیرات ناشی از «برنامهٔ درسی» و «بهبود آموزشی» می‌پردازد؛ چرا که هر یک از این دو مؤلفه، با رویکردهای متفاوتی در پی جهت‌دهی به کتاب‌های درسی ریاضی و آموزش کلاسی هستند. در این راستا، برخی از تنش‌ها و تناقضات موجود میان این دو مؤلفهٔ تأثیرگذار را آشکار کرده و ریشه‌های آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

از منظر برنامهٔ درسی، رویه‌ای را بررسی می‌کنیم که همچنان در بافت سنت‌های غربی و نیز در بستر سنت‌های متأثر از مسیرهای استعمار و جهانی‌شدن، از نفوذ بالایی برخوردار است. این رویه در برنامه‌های درسی به چشم می‌خورد که در آن‌ها، مفهوم‌سازی عدد از طریق «شمارش» (یعنی به‌عنوان مفهومی برای نشان دادن ویژگی مجموعه‌ای از اشیای گسسته) تنها مفهوم‌سازی ارائه‌شده به دانش‌آموزان در سال‌های اولیه تحصیل است و متعاقباً نیز به‌عنوان مفهوم‌سازی برتر و ارجح در نظر گرفته می‌شود. ما با اطلاق عنوان «عدد شمارشی» بر این مفهوم، بر این رویه تمرکز می‌کنیم، زیرا دهه‌هاست که به کتاب‌های درسی ریاضیات و آموزش کلاسی شکل داده و در عین حال، چالش‌های قابل‌توجهی را در مسیر یاددهی و یادگیری ایجاد کرده است. اهمیت دستاورد پژوهش حاضر در این است که نشان می‌دهد چرا تقلیل شالودهٔ برنامهٔ درسی مفهوم عدد، صرفاً به «عدد شمارشی»، نیازمند توجه و بازنگری جدی است.

هدف ما کمک به پژوهش‌های کلان‌تر در حوزهٔ طراحی و بهبود آموزشی است؛ پژوهش‌هایی که شامل نقد، درک و در نهایت پیشنهاد اصلاحات در برنامه‌های درسی کنونی می‌شوند؛ هم از حیث محتوای ریاضیاتی و هم از منظر منطقی که انتخاب‌های عینیت‌یافته در این برنامه‌ها را هدایت می‌کند. مقاله را با تبیین درک خود از مفاهیم برنامه درسی، آموزش و اصلاح/بهبود آموزشی آغاز می‌کنیم. در ادامه، میان «ریاضیات ریاضی‌دانان»[1] و «ریاضیات مدرسه‌ای»[2] تمایز قائل شده و مفهوم انسجام ریاضیاتی را که در فضای مدرسه مهم است، تشریح می‌کنیم.

سپس با پرداختن به مبانی ریاضیاتی مفهوم عدد، نشان می‌دهیم که چگونه انتخاب محتوای ریاضیاتی و سازمان‌دهی آن در برنامه درسی، می‌تواند توانمندی برنامه درسی در حمایت از بهبود آموزشی را تضعیف کند. با استناد به پیشینه پژوهشی ناظر بر اهمیت معنا و خاستگاه‌های مفهوم عدد در ریاضیات مدرسه‌ای، تأکید می‌کنیم که توالی‌های برنامه درسی مبتنی بر عدد شمارشی، مانع از آن می‌شوند که معانی پیچیده‌تر و غنی‌تر عدد، بر پایه بینش‌ها و درک پیشین دانش‌آموزان بنا گردد. ازاین‌رو، توالی‌های برنامه درسی مبتنی بر عدد شمارشی، فضای تعارضی را شکل می‌دهند که در آن، طراحان کتاب‌های درسی و معلمان، ناگزیرند میان اولویت‌بخشی به الزامات برنامه درسی یا توصیه‌های مبتنی بر بهبود آموزشی، یکی را انتخاب کنند.

با استفاده از بحث پیرامون بنیان‌های مفهوم عدد به‌عنوان چارچوب مرجع، رویکردی تجربی را برای بررسی نحوه سازمان‌دهی کنونی مفهوم عدد در برنامه‌های درسی آموزشی تدوین می‌کنیم. ما از این رویکرد برای تحلیل برنامه‌های درسی ملی دوره ابتدایی در استرالیا و مکزیک بهره می‌بریم. یافته‌های ما وجود رویه برنامه درسی مبتنی بر عدد شمارشی را مستند می‌کنند. این نتایج نشان می‌دهند که این رویه چه نوع ریاضیاتی را تولید می‌کند و چه مفاهیم ریاضی را به محاق می‌برد.

سپس به بررسی منطق حاکم بر برنامه درسی می‌پردازیم و این پرسش را مطرح می‌کنیم که رویه مبتنی بر عدد شمارشی، چه انتخاب‌هایی را عینیت می‌بخشد. ما این رویه را با تغییرات شگرف (و در برهه‌ای بسیار بحث‌برانگیز) برنامه درسی، موسوم به «ریاضیات جدید» مرتبط می‌کنیم (به‌عنوان نمونه، [۲۲])؛ جنبشی که در پاسخ به تغییر پارادایم در ریاضیات ریاضی‌دانان ظهور

---

[1] Mathematics of mathematicians

[2] School mathematics

یافت. نشان می‌دهیم برنامه‌های درسی تدوین‌شده پس از جنبش ریاضیات جدید (و نه پیش از آن)، دارای ویژگی‌های مشترکی با برنامه‌های درسی مورد تحلیل ما هستند: ایده‌های ریاضیاتی مقوم معنای عدد، نظیر کمیت[۳]، واحد[۴] و اندازه‌گیری[۵]، دیگر به‌طور شایسته و کافی در برنامه‌ها حضور ندارند.

امروزه، آگاهی نسبت به تغییرات برنامه درسی در دوران «ریاضیات جدید» و ماهیت چالش‌برانگیز آن‌ها، تقریباً از کانون توجه مربیان و پژوهشگران آموزش ریاضی خارج شده است [۳۴]، حال آنکه این تغییرات همچنان به آموزش ریاضیات در گستره‌ای بسیار فراتر از استرالیا و مکزیک جهت می‌دهند. ما استدلال می‌کنیم که حذف عناصر کلیدی و ظرفیت‌های استدلالی از ریاضیات مدرسه‌ای، پیامدهای مستمری تا به امروز به‌همراه داشته و این وضعیت، نیازمند یک اصلاح مسیر اندیشمندانه و دقیق است. اگرچه ارائه یک راه‌حل جامع خارج از حوصله این مقاله است، اما با ارتقای سطح آگاهی پیرامون یک معضل مهم و مغفول‌مانده، گام نخست را در مسیر یک جستجوی نظام‌مند برای یافتن راهکاری عملی و کارآمد برمی‌داریم.

۲. کتاب‌های درسی در تقاطع برنامهٔ درسی و اصلاحات آموزشی

در مقاله حاضر، واژهٔ «برنامهٔ درسی» به مفهوم «برنامهٔ درسی قصدشده» آن‌گونه که در استانداردهای ملی، سرفصل‌های دروس و اسناد بالادستی تبیین گشته، به‌کار رفته است [۳۳، ۳۵]. در خصوص واژهٔ «آموزش»، ما به‌کاربرد رایج این مفهوم در ایالات متحده، یعنی «عمل تدریس» در سطح مدرسه و کلاس درس استناد می‌کنیم. دقیقاً با همین بار معنایی است که واژهٔ آموزش به‌عنوان صفت در ترکیب‌هایی نظیر «اصلاحات آموزشی» و «بهبود آموزشی» به‌کار می‌رود (به‌عنوان نمونه، [۲۷])؛ مفاهیمی که بیانگر تلاش‌های صورت‌گرفته جهت واکاوی چگونگی تدریس ریاضیات در مدارس و نحوه تجربهٔ آن توسط دانش‌آموزان، در راستای منافع فردی و اجتماعی آنان است.

تمایز میان برنامه درسی و آموزش را می‌توان بازتابی از دوگانگی محتوا/پداگوژی[۶] دانست. با این وجود، سیاست‌ها و اسناد مرتبط با برنامه‌های درسی محلی و ملی معاصر، بسیار فراتر از تعیین صرف توالی محتوای ریاضیاتی قابل تدریس در مدارس گام برداشته‌اند، هرچند که تعیین محتوا همچنان در کانون توجه قرار دارد [۱۱]. آنچه توصیه‌های مبتنی بر برنامه‌های درسی را از پیشنهادهای مروجان بهبود آموزشی متمایز می‌سازد، ماهیت الزام‌آور توصیه‌های برنامه درسی برای معلمان و طراحان کتاب‌های درسی است. معلمان غالباً به‌طور مستقیم در قبال اجرای دقیق برنامه درسی پاسخگو هستند و در صورت عدول از آن، ممکن است با پیامدهای انضباطی مواجه شوند. جای شگفتی نیست که طراحان تجاری کتاب‌های درسی، برنامه‌های درسی ملی، ایالتی یا منطقه‌ای را به‌عنوان دستورالعملی از نیازهای ظاهری معلمان ریاضی و دانش‌آموزانشان در نظر می‌گیرند. بر این اساس، نفس تدوین یک برنامه درسی قصدشده، تأثیری شگرف بر ایده‌های ریاضیاتی در دسترس (و یا خارج از دسترس) معلمان در کتاب‌های درسی ریاضی بر جای می‌گذارد [۳۶].

در نقطه مقابل، توصیه‌های معطوف به بهبود آموزشی، معمولاً از جایگاه نهادی کافی برای الزام‌آور بودن در قبال معلمان یا طراحان کتاب‌های درسی برخوردار نیستند. این توصیه‌ها در بیشتر موارد، مستقیماً به ماهیت ریاضیات و آن دسته از رویه‌های ریاضی می‌پردازند که برای کلاس‌های درس سودمند تشخیص داده شده‌اند و چگونگی تثبیت و پیاده‌سازی این رویه‌ها در موقعیت‌های خاص را بررسی می‌کنند [۱۱]. با اذعان به تنوع موجود در تلاش‌های مختلف حوزه بهبود آموزشی، ما تمرکز بر دو هدف ارزشی زیر را که نقطه اشتراک غالب این تلاش‌هاست، سودمند می‌دانیم: (۱) دسترس‌پذیر ساختن فعالیت‌های ریاضی کلاس درس برای طیف وسیعی از دانش‌آموزان (و یا تمامی آن‌ها)؛ و (۲) توانمندسازی دانش‌آموزان برای درک عاملیت و قابلیت خود در انجام ریاضیات. در ادامه

---

[3] Quantity

[4] Unit

[5] Measurement

[6] Content/Pedagogy

نشان خواهیم داد که حتی با وجود اینکه این اهداف مستلزم تدریس محتوای ریاضیاتی خاصی نیستند، چگونه می‌توانند در تقابل با الزامات موجود در برنامه‌های درسی (اگر نگوییم در تضاد مستقیم با آن‌ها) قرار گیرند.

۳. کدام ریاضیات؟

در سراسر این مقاله، ما میان «ریاضیات به‌مثابه یک رشتهٔ علمی» و «ریاضیات مدرسه‌ای» تمایزی بنیادین قائل می‌شویم. با درک این موضوع که فعالیت‌های ریاضیاتی مرتبط در این دو بستر ماهیتاً متفاوت‌اند، توجه خود را به‌طور خاص بر مفهوم «انسجام ریاضیاتی» متمرکز می‌کنیم. انسجام، ویژگی بارز ریاضیات به‌مثابهٔ یک رشتهٔ علمی است: انتظار می‌رود تمامی اجزای آن با یکدیگر تناسب داشته و هیچ‌گونه تناقض درونی در آن راه نداشته باشد. درواقع، «ریاضیاتی بودن» (اگر بتوان چنین تعبیری به‌کار برد) مترادف با برخورداری از انسجام درونی است. با این حال، درک و ارج نهادن به انسجام این رشته علمی در مقیاس کلان، مستلزم بهره‌مندی از دانش ریاضیاتی گسترده‌ای است که فهم چگونگی تکوین «مفاهیم متراکم ریاضیاتی» را نیز در بر می‌گیرد. مسلماً چنین سطحی از انسجام، برای یک نوآموز در این رشته درک‌پذیر نیست.

دغدغه فرویدنتال[۷] [۱۷] پیرامون نحوهٔ ارتباط میان این رشتهٔ علمی و ریاضیات مدرسه‌ای، در همین بافتار موضوعیت می‌یابد:

> بخش عمده‌ای از فعالیت ریاضیاتی در جهان امروز، معطوف به سازمان‌دهی است. ما تمایل داریم دستاوردهای استدلال‌های ریاضی خود را در قالبی کاملاً سازمان‌یافته ارائه دهیم؛ قالبی که در آن هیچ ردپایی از فعالیتی که به خلق آن دستاوردها منجر شده، به چشم نمی‌خورد. این عینیت‌بخشی، عادتی است که از دیرباز در میان ریاضی‌دانان ریشه دوانده است. این عادت، هم‌زمان نیکو و مخرب است. ما ثمره فعالیت خود را در قالب یک سیستم صلب و خشک منجمد می‌کنیم، چرا که عینی است، چرا که عقلانی است، و چرا که زیباست؛ و دقیقاً همین سیستم را آموزش می‌دهیم. کمتر کسی می‌داند که ریاضیات در وهله نخست یک فعالیت است. به کودکان خردسال، ریاضیات به‌عنوان یک فعالیت آموزش داده می‌شود، اما به محض آنکه رشد کرده و به موجوداتی عقلانی بدل می‌شوند، ما تمایل پیدا می‌کنیم تا یک سیستم استنتاجی پیش‌ساخته و کاملاً سازمان‌یافته از ریاضیات را به آن‌ها بیاموزیم؛ با این پیش‌فرض که از موجودات عقلانی انتظار می‌رود سیستم‌های استنتاجی را درک کنند. اما شما به‌خوبی می‌دانید که این رویکرد چندان کارآمد نیست.

فرویدنتال بر این باور بود که استفاده از نتایج و رویه‌های عینیت‌بخشی ریاضی‌دانان پژوهشگر به‌عنوان محتوای ریاضیات مدرسه‌ای، رویکردی نامناسب است؛ عمدتاً به این دلیل که کارآمدی لازم را ندارد (همان منبع). وی بر این نکته تأکید ورزید که ایده‌هایی که دانش‌آموزان در کلاس درس با آن‌ها مواجه می‌شوند، پیش‌تر چنان متراکم و فشرده شده‌اند که دقیقاً همان بخش‌هایی را که به دانش‌آموز اجازه می‌دهد ریاضیات را به‌عنوان یک فرآیند در حال خلق منسجم تجربه کند، در هاله‌ای از ابهام فرو می‌برند.

به‌عنوان نمونه، دشواری‌های دانش‌آموزان در پذیرش «کسر» به‌عنوان یک عدد را می‌توان به همین سازوکار تقلیل داد. تعریف کسر بر مبنای «صورت و مخرج»، که معمولاً در بافتار «افراز هم‌ارز»[۸] (نظیر تقسیم مواد غذایی یا سایه‌زدن اشکال هندسی) به تصویر کشیده می‌شود، امتداد منطقی مفهوم عددی نیست که پیش‌تر برای شمارش اشیای گسسته به‌کار می‌رفته است [۲، ۴۶]. درنتیجه، معرفی کسرها، انسجامی میان آنچه در حال آموزش است و آنچه از پیش در کلاس درس برای دانش‌آموز آشناست، برقرار نمی‌سازد. این در حالی است که مفاهیم اعداد صحیح و کسری در مدرسه، از مجموعه‌های اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) و گویا ($\mathbb{Q}$) نشأت می‌گیرند؛ مجموعه‌هایی که به‌صورت کاملاً منسجم در درون نظریهٔ این رشته علمی تعریف شده‌اند.

---

[7] Freudenthal

[8] Equipartition

منظومهٔ ایده‌هایی که دانش‌آموزان می‌آموزند تا به آن‌ها عنوان «ریاضیات» اطلاق کنند، در هر کلاس درس از نو بنا می‌شود. ما این سیستم را تنها در صورتی از منظر ریاضیاتی منسجم می‌دانیم که در اصل، توسط خود دانش‌آموزان نیز به‌گونه‌ای منسجم ادراک شود. اگر مشاهده انسجام در محتوای در حال یادگیری، نیازمند یک «بصیرت پسینی تخصصی» باشد که دانش‌آموزان هنوز از آن بی‌بهره‌اند، در این صورت آموزش در نگاه آنان فاقد انسجام جلوه خواهد کرد. در تضاد با این باور رایج که ریاضیات علمی منطقی و قابل‌فهم است، تجربیات کلاسی فاقد انسجام ممکن است دانش‌آموزان را به این سمت سوق دهد که استدلال‌های خود را ذاتاً ناقص بپندارند، که این امر به سرخوردگی از ریاضیات و کناره‌گیری از آن می‌انجامد [۴]. به همین دلیل است که وقتی در این مقاله از انسجام ریاضیاتی سخن می‌گوییم، دغدغه ما نحوه ادراک دانش‌آموزان از ریاضیاتی است که در کلاس درس در حال برساخته شدن است. ما [۲۶] در تحلیل قابلیت‌ها و ظرفیت‌های ساختارهای مختلف برنامه درسی، بر اهمیت انسجام ریاضیاتی در ریاضیات مدرسه‌ای تأکید ورزید (همچنین ر.ک: بخش ۵). اسفرد [۴۰] نیز مفهوم مرتبطی را پیرامون «معناداری» یک ایده جدید ریاضیاتی برای یادگیرنده صورت‌بندی کرد. او به نیاز یادگیرنده برای برخورداری از این امکان اشاره نمود که «جایگاه و اهمیت آنچه باید آموخته شود را در درون سیستمی از... [آنچه] از پیش به‌خوبی فهمیده شده است، درک کرده و ارج نهد» (ص. ۳۶۷). در غیاب امکان چنین درکی، اسفرد تدریس ریاضیات را به «فرود آوردن چتربازگونه و از بالای» ایده‌های ریاضیاتی بر سر یادگیرنده تشبیه کرد (همان منبع). تجربه «ارتباط برقرار کردن» با یک ایدهٔ جدید، در عوض پذیرش منفعلانه و اجباری آن، مفهومی بنیادین هم برای معناداری و هم برای انسجام ریاضیاتی مد نظر ماست.

شرط لازم برای تحقق این نوع از انسجام ریاضیاتی، «توالی محتوا» به‌گونه‌ای است که در آن، ایده‌های جدید ریاضیاتی همواره بتوانند از دل ریاضیاتی که پیش‌تر جزئی از سیستم شناختی دانش‌آموز شده است، نشأت گیرند. برنامه‌های درسی ریاضی نقش خطیری در ترسیم مسیرهای عملی و زیست‌پذیر آموزشی برای معلمان ایفا می‌کنند؛ مسیرهایی که در آن‌ها درگیری اولیه دانش‌آموز با آنچه از پیش می‌فهمد، حمایت می‌شود تا در طول زمان، به‌گونه‌ای منسجم به درگیری با ریاضیاتی پیچیده‌تر و پیشرفته‌تر ارتقا یابد. پیش از آن‌که به بررسی این موضوع بپردازیم که برنامه‌های درسی ملی موجود تا چه حد چنین توالی منسجمی را برای مفهوم «عدد» فراهم می‌سازند، فرآیند کدگذاری و تحلیل خود را بر پایه‌ی بحثی پیرامون خاستگاه‌های تاریخی و هستی‌شناختی عدد و ارتباط این خاستگاه‌ها با انسجام ریاضیاتی مفهوم عدد در مدرسه، استوار می‌کنیم.

۱.۳. **رویکرد به مفهوم عدد از منظر فهم متعارف.** به‌عنوان یک ریاضیدان، دغدغه فروید‌نتال این بود که دانش‌آموزان با ریاضیات به‌مثابهٔ سیستمی دارای انسجام درونی مواجه شوند. در همین راستا، پیشنهاد او برای نقطه آغازین مسیر ریاضیاتی در مدرسه، با نقطهٔ شروع مطلوب ریاضی‌دانان، یعنی یک «سیستم استنتاجی پیش‌ساخته و به‌خوبی سازمان‌یافته»، تفاوتی بنیادین داشت: «نقطهٔ آغازین اصیل، همان فهم متعارف است یا دست‌کم باید چنین باشد» [۱۹، ص. ۲۳]. استدلال فروید‌نتال همخوانی تنگاتنگی با دو هدف بهبود آموزشی که پیش‌تر برشمردیم، داشت. او برای فهم متعارف ارزش قائل بود، چرا که زمینه دسترسی اولیه به ریاضیات را برای همگان فراهم می‌آورد. افزون بر این، وی سازمان‌دهی جمعی (یا ریاضی‌سازی) آنچه را که دانش‌آموزان از پیش می‌فهمند و قادر به انجام آن هستند، به‌عنوان مسیری برای تولید ایده‌های نوین ریاضیاتی در نظر می‌گرفت که برای دانش‌آموزان درگیر در فرآیند یادگیری، معنادار باشد. این نوع مشارکت، دلیلی به دانش‌آموزان می‌بخشد تا خود را به‌عنوان مشارکت‌کنندگانی توانمند در عرصهٔ ریاضیات قلمداد کنند.[۹]

دیدگاه فروید‌نتال مبنی بر بسط و پرورش ریاضیات از دل فهم متعارف، دیدگاهی بدیع و یگانه نیست. ریاضی‌دانان متعددی به این موضوع پرداخته‌اند که خاستگاه‌های تاریخی و هستی‌شناختی مفاهیم ریاضی، تا چه حد و به چه شکل در ساختاردهی بنیادین

[۹] بر این پیش‌فرض بنیادین استواریم که تحقق چنین تجارب آموزشی برای دانش‌آموزان، منوط به سازماندهی مدبرانه و هدایت هوشمندانهٔ فعالیت‌های ریاضیِ منتخب در بستر کلاس درس، و نیز پشتیبانی همه‌جانبهٔ معلم است؛ چه، در غیاب این مؤلفه‌ها، وقوع این تجارب عملاً ناممکن خواهد بود.

به آموزش ریاضیات مهم‌اند. کولموگوروف [۲۴] با قاطعیت نسبت به نادیده انگاشتن خاستگاه ایده‌ها هشدار داد و اظهار داشت که «جدا ساختن مفاهیم ریاضی از خاستگاه‌هایشان در امر آموزش، به شکل‌گیری دوره‌ای می‌انجامد که فاقد هرگونه اصول بوده و از منطقی ناقص رنج می‌برد» (ص. ۱۰، به نقل از [۱۳، ص. ۱۲۰]). مقاله حاضر، راوی داستان چنین گسستی است و نشان می‌دهد که این انشقاق در عمل به‌راستی به یک «دوره آموزشی با منطق ناقص» منتهی شده است؛ جایی که این نواقص خود را در قالب «فرود آوردن چتربازگونه‌ی» ایده‌ها بر سر دانش‌آموزان و از دست رفتن انسجام ریاضیاتی در کلاس‌های درس نمایان می‌سازند. تمرکز ما بر این معضل آموزشی معاصر است که دانش‌آموزان، اعداد حسابی[۱۰] و اعداد حقیقی را به‌عنوان انواع متفاوتی از اعداد در نظر می‌گیرند (به‌عنوان مثال، [۲، ۳۲، ۴۶])؛ پدیده‌ای که پیشرفت مطلوب در ریاضیات را با موانع جدی روبه‌رو می‌سازد.

از منظر تاریخی، مفهوم عدد از نیاز به مقایسه کمیت‌ها (نظیر طول‌ها، مساحت‌ها، حجم‌ها و مقادیر موجود در مجموعه‌ها) نشأت می‌گیرد [۱۰]. برای شفاف‌سازی این فرآیند، بس [۲] توضیح داد که عدد «از اندازه‌گیری یک کمیت توسط کمیت دیگر که به‌عنوان واحد در نظر گرفته می‌شود، پدید می‌آید: چه مقدار (یا چه تعداد) از این واحد برای برساختن کمیت مفروض مورد نیاز است؟» (ص. ۴۶۶). به شکلی مشابه، داویدوف [۱۴] بر کمیت‌ها به‌عنوان منبعی مبتنی بر فهم متعارف برای تمامی اعداد تمرکز کرد؛ رویکردی که در آن، عدد «حالت خاصی از بازنمایی یک رابطه عمومی میان کمیت‌هاست؛ جایی که یکی از آن‌ها به‌عنوان اندازه[۱۱] در نظر گرفته شده و برای محاسبه دیگری به‌کار می‌رود» (ص. ۱۶۹). این امر بازتابی از توضیحات دکارت[۱۲] (قرن هفدهم) است:

> روشی که اعداد از طریق آن شکل می‌گیرند، به‌معنای دقیق کلمه، شکل خاصی از اندازه‌گیری است....واحد اندازه‌گیری، همان خاصیت جهان‌شمولی است که... تمامی اشیایی که با یکدیگر مقایسه می‌شوند، باید با آن تطبیق داده شوند....تنها دو نوع از موجودیت‌ها قابلیت مقایسه با یکدیگر را دارند: مجموعه‌ها [موجودیت‌هایی دارای عدد اصلی یا کاردینالیته[۱۳]] و کمیت‌ها [موجودیت‌هایی دارای اندازه]. (به نقل از داویدوف [۱۳، ص. ۱۱۸]، از آثار منتخب دکارت، چاپ اتحاد جماهیر شوروی در ۱۹۵۰، صص. ۱۵۱-۱۵۳، توضیحات داخل کروشه از نویسندگان است).

در نقل‌قول‌های پیشین، «کمیت‌ها» در جهان فیزیکی و مادی حضور دارند و اموری قابل‌قیاس‌اند. از طریق مقایسه، یک کمیت می‌تواند برابر، بزرگ‌تر، یا کوچک‌تر از چیزی باشد که با آن سنجیده می‌شود. با در نظر گرفتن یک کمیت به‌عنوان واحد مرجع، عدد به‌مثابه ابزاری ظهور می‌کند که سازمان‌دهی نظام‌مندتر مقایسات میان کمیت‌های متعدد را امکان‌پذیر می‌سازد. درحالی‌که برخی کمیت‌ها در جهان فیزیکی گسسته و برخی دیگر پیوسته هستند، اندازه‌گیری کمیت‌های پیوسته، اعداد حسابی و کسرها را به‌عنوان اعدادی تولید می‌کند که از منظر تجربی درک مشابهی به‌دست می‌دهند [۲]. در نقطه مقابل، اندازه‌گیری مجموعه‌های گسسته از طریق شمارش اقلام مجزای آن‌ها، چنین بستر مشترکی را فراهم نمی‌آورد [۱۰]. همان‌طور که بس [۲] مشاهده کرد، در مدارس اعداد حسابی غالباً بر پایهٔ شمارش (به‌عنوان منبع زاینده آن‌ها) بنا می‌شوند، درحالی‌که اعداد گویا و حقیقی (اگر اصلاً پایه و اساس کمی

[۱۰] ما اصطلاح اعداد «حسابی» را برای اشاره به آن دسته از اعدادی به‌کار می‌بریم که دانش‌آموزان برای نخستین بار در مدرسه با آن‌ها مواجه می‌شوند (یعنی؛ ۰، ۱، ۲،...). واژهٔ «حسابی» در اینجا یک توصیفگر صفتی برای واژهٔ عدد است و ما از عبارت اسمی «اعداد حسابی» برای مشخص کردن یک مجموعهٔ عددی خاص استفاده نمی‌کنیم. این شیوهٔ کاربرد، در محیط‌های انگلیسی‌زبان امری رایج است؛ جایی که برخلاف بسیاری از زبان‌های دیگر، اصطلاح «اعداد حسابی» با «اعداد صحیح» تفاوت دارد (به‌عبارت دیگر، این اصطلاح از جایگاه ریاضیاتی هم‌سنگ با نام مجموعه‌های عددی برخوردار نیست).

[11] Measure

[12] Descartes

[13] Cardinalities

داشته باشند) بر مبنای اندازه‌گیری پیوسته استوارند. عدم بسط و توسعه خاستگاه مشترک عدد در مدرسه، ممکن است تبیین‌گر این دشواری دانش‌آموزان باشد که نمی‌توانند اعداد حسابی و کسرها را از یک جنس و نوع واحد در نظر بگیرند.

تلاش‌هایی برای سازمان‌دهی چگونگی معرفی عدد صورت گرفته است که شامل گنجاندن اندازه‌گیری کمیت‌های پیوسته به‌عنوان منبع معنابخشی به عدد می‌شود. برای نمونه، داویدوف و همکارانش [۱۲، ۲۸]، برای پی‌ریزی پایه‌های ریاضیات سال‌های اولیه تحصیل، از اندازه‌گیری کمیت پیوسته بهره جستند و بدین‌ترتیب، عامدانه از شمارش و کاردینالیته به‌عنوان منبع اولیه مفهوم عدد فاصله گرفتند (به‌عنوان مثال، [۳۷]). برنامه درسی داویدوفی، متشکل از مسائلی است که در آن‌ها دانش‌آموزان پیش از آشنایی با اعداد و الگوریتم‌ها، با مقایسات اندازه‌گیری بافت‌مند و غیرعددی مواجه می‌شوند. توالی مسائل، از اصول موضوعه روابط جبری (کمی) که با عملیات عددی مرتبط‌اند، استخراج شده است. در نقطه مقابل، توالی آموزشی مبتنی بر اندازه‌گیری خطی که توسط استفان و همکاران [۴۳] تدوین شده است، بر پایه درک اولیه دانش‌آموزان از مفهوم عدد در بافتارهای شمارشی بنا شده و در ادامه، به تثبیت معنای عدد حسابی در بستر اندازه‌گیری طول می‌پردازد. ابتدا از دانش‌آموزان حمایت می‌شود تا پیرامون اندازه‌گیری خطی به‌مثابه انباشت مسافت استدلال کنند و سپس، از ابزارهای اندازه‌گیری (مانند نوار اندازه‌گیری به‌عنوان پیش‌درآمدی بر محور اعداد) برای استدلال درباره عملیات عددی به‌عنوان تغییراتی در کمیت بهره ببرند.

این رویکردها با تثبیت معنای اعداد حسابی در موقعیت‌هایی که متضمن اندازه‌گیری کمیت پیوسته هستند، شالوده‌ای را برای معرفی کسرها بنا نهادند؛ به‌گونه‌ای که بتواند انسجام را با درک پیشین دانش‌آموزان حفظ نماید.[۱۴] با وجود آنکه برنامه درسی داویدوفی برای کاربرد در هاوایی بومی‌سازی شد [۱۵]، اما به‌کارگیری این روش‌ها یا سایر رویکردهای مبتنی بر اندازه‌گیری برای آموزش مفهوم عدد، همچنان محدود بوده است.[۱۵]

برای دریافتن این موضوع که اسناد برنامه‌های درسی تا چه میزان فرصت‌هایی را برای برساختن معانی به‌مراتب پیچیده‌تر عدد (توأم با انسجام ریاضیاتی) فراهم می‌آورند، بر آن شدیم تا بررسی کنیم که این اسناد به‌طور عام چگونه به مقولهٔ کمیت می‌پردازند و به‌طور خاص چگونه از اندازه‌گیری کمیت‌های پیوسته بهره‌برداری می‌کنند. برای آغاز واکاوی این مسئله در موارد خاص، پرسش‌های پژوهشی راهنمای زیر را صورت‌بندی نمودیم: اندازه‌گیری در بسط و توسعهٔ مفهوم عدد در برنامه‌های درسی کنونی مقطع ابتدایی، تا چه حد حضور دارد؟ چه کمیت‌هایی در این توسعه دخیل‌اند و نحوهٔ برخورد با آن‌ها چگونه است؟

۴. تحلیل برنامهٔ درسی: استرالیا و مکزیک

دو سند برنامه‌درسی که برای اهداف این مقاله تحلیل شدند، عبارت‌اند از:

- نسخهٔ نهم «برنامهٔ درسی استرالیا: ریاضیات»[۱۶] (AC:M)، از مقطع آمادگی[۱۷] تا سال ششم (ادارهٔ ارزیابی و گزارش‌دهی برنامهٔ درسی استرالیا [ACARA]، بی‌تا)، که پیامد بازنگری برنامهٔ درسی در سال‌های ۲۰۲۱-۲۰۲۰ است، و
- پایه‌های تحصیلی متناظر در درس ریاضیات از سند «آموخته‌های کلیدی برای آموزش جامع: برنامهٔ درسی و مطالعاتی»[۱۸] (MC:M) که توسط دولت مکزیک (وزارت آموزش و پرورش مکزیک ،[SEP] ۲۰۱۷) منتشر شده است.

---

[۱۴] برای مطالعهٔ مصداقی روشن از صورت‌بندی کسرها به‌عنوان بسطی ریاضیاتی و منسجم در قلمرو اعداد حسابی، ارجاع به کورتینا و همکاران [۹] راهگشا خواهد بود.

[۱۵] امروزه، حتی با وجود آنکه محور اعداد حضوری تثبیت‌شده در اکثر کلاس‌های دورهٔ ابتدایی دارد، اما اغلب بیشتر به‌عنوان ابزاری برای ذخیره‌سازی و جای دادن اعداد به‌کار می‌رود، تا بازنمایی انباشت طول یا انجام عملیات روی کمیت‌ها.

[16] Australian Curriculum: Mathematics [AC:M]

[۱۷] سال تحصیلی بلافاصله پیش از پایهٔ اول (پیش‌دبستانی).

[18] Key learnings for comprehensive education: Curriculum and study program [MC:M]

فارغ از دغدغه‌مندی ما نسبت به برنامه‌های درسی ملی کشورهای متبوعمان، پیش‌بینی می‌کردیم که این انتخاب برای به تصویر کشیدن روندهای جاری در برنامه‌ریزی درسی، که حتی کشورهای بسیار متفاوت را نیز به یکدیگر پیوند می‌دهد، گزینه‌ای بسنده و مناسب باشد. در نگاه نخست، هیچ دلیل موجه و آشکاری وجود ندارد که برنامه‌های درسی استرالیا و مکزیک در طراحی یا مبانی نظری خود اشتراکات بنیادینی داشته باشند. واقعیت‌های تاریخی، اجتماعی، فرهنگی و ژئوپلیتیکی که بستر آفرینش این اسناد را فراهم آورده‌اند، با یکدیگر تفاوت‌های چشمگیری دارند. وجوه تمایز متعددی به‌وضوح در ساختار، تأکیدات محتوایی و میزان تفصیل آن‌ها مشهود است:

- تمامی بخش‌های سند برنامه درسی استرالیا (AC:M) به‌طور آشکار بر محتوای خاص و شیوه تدریس آن تمرکز دارند. این سند حول شش محور محتوایی سازمان‌دهی شده است: عدد، جبر، اندازه‌گیری، فضا، آمار و احتمال. برای هر پایه تحصیلی، دو بخش مرور کلی با عناوین «توصیف پایه تحصیلی» و «استاندارد پیشرفت» ارائه شده است (هریک به‌طور میانگین شامل ۲۵۰ واژه)، که در پی آن‌ها، بخش‌های مختص به هر محور با عناوین «توصیفات محتوایی» و «تفصیلات محتوایی» (با افزودن حدود ۳۵۰۰ واژه برای هر پایه تحصیلی) آورده شده‌اند. حجم کل این سند بالغ بر ۲۹۰۰۰ واژه است. (برای مشاهده نمونه‌ای از آن، به پیوست الف رجوع کنید.)
- برنامه درسی مکزیک (MC:M) حول سه محور موضوعی ساختار یافته است: (۱) عدد، جبر و تغییرات؛ (۲) شکل، فضا و اندازه‌گیری؛ و (۳) تحلیل داده‌ها. هر محور نیز به سرفصل‌های محتوایی خردتری تقسیم می‌شود. این سند، پیامدهای یادگیری موردانتظار را برای سرفصل‌های ذیل هر محور موضوعی، با اختصاص حدود ۳۰۰ واژه برای هر پایه تحصیلی مشخص می‌سازد. این مقدار، در مجموع تنها به حدود ۲۱۰۰ واژه مرتبط با محتوای ریاضیاتی بالغ می‌شود. مابقی این سند ۱۳۰۰۰ واژه‌ای، به تشریح مباحث کلان‌تر آموزشی اختصاص یافته است؛ از جمله اهداف آموزش ریاضیات، رویکرد یاددهی–یادگیری[19] به حل مسئله، دستورالعمل‌های تدریس، پیشنهادهای ارزیابی و توجیهات کلی ناظر بر محورهای موضوعی و اهداف مترتب بر آن‌ها (به پیوست الف رجوع کنید).

علی‌رغم این تفاوت‌ها، شباهت‌های شگرفی در شیوه سازمان‌دهی ریاضیات برای آموزش مفهوم «عدد» در این دو برنامه درسی به چشم می‌خورد. در ادامه، پس از ارائه تحلیل‌های مربوطه، تبیین حدسی برای این شباهت‌ها ارائه خواهیم داد.

۱.۴. **روش‌شناسی.** در مسیر ردیابی چگونگی بسط و توسعه مفهوم «عدد» در برنامه‌های درسی، هدف اصلی تحلیل ما مستندسازی دو مؤلفه بود: (الف) کمیت‌های پیوسته، گسسته و مقوله اندازه‌گیری در چه بخش‌هایی گنجانده شده‌اند، و (ب) چه انواعی از استدلال مبتنی بر کمیت‌ها توصیف شده، به‌طور ضمنی به آن‌ها اشاره شده، یا قابل‌تصور بوده‌اند. لازم به ذکر است که برنامه‌های درسی معمولاً فاقد مبانی نظری مدونی برای تبیین و توجیه انتخاب‌های خود هستند. ما نیز همانند معلمان و طراحان کتاب‌های درسی، نمی‌توانستیم به‌سادگی توضیحاتی مبنی بر چرایی توسعه مفهوم عدد به یک شیوه خاص بیابیم. ازاین‌رو، تحلیل ما دربردارنده نوعی بازسازی مفاهیم ریاضی بود که بتواند توجیه‌گر انتخاب‌های صورت‌گرفته در این اسناد باشد. در این بازسازی، ما از دو منبع بهره جستیم: نخست، حضور و کاربردهای اندازه‌گیری و کمیت‌ها در دو برنامه درسی را به‌صورت تجربی ردیابی کردیم و سپس، الگوهای مستندشده را با توصیفات ارائه‌شده از معنا و خاستگاه عدد در بخش ۳–۱ مورد مقایسه و تطبیق قرار دادیم.

در مرحلهٔ تحلیل اسناد، ابتدا بخش‌های مربوط به سال‌های آغازین سند «برنامهٔ درسی استرالیا» (AC:M) را مطالعه کردیم و مقوله‌های کدگذاری مرتبط با نحوهٔ پرداختن به مفهوم عدد از منظر کمیت را تدوین نمودیم (به جدول ۱ رجوع کنید): این مقوله‌ها طیفی را در بر می‌گرفتند که از فقدان کمیت پیوسته (عدد شمارشی) آغاز شده، با کمیت پیوسته گنجانده‌شده به‌صورت ضمنی — با یا بدون تمرکز بر شمارش — (به‌ترتیب: عدد شمارشی افزوده و بالقوه پیوسته) ادامه یافته و به کمیت پیوسته گنجانده‌شده به‌صورت آشکار (پیوسته) و در نهایت، مواردی که بدون ارجاع به عدد مطرح شده‌اند (سواد اندازه‌گیری) ختم می‌شد. هنگام کدگذاری اسناد،

[19] Pedagogical

تمام تلاش خود را به‌کار بستیم تا تفسیرهایی کاملاً منعطف و موسع ارائه دهیم (برای مشاهده نقل‌قول‌های کدگذاری‌شده، به پیوست ب رجوع کنید).

جدول ۱: طرح کدگذاری

کد	توصیف	نوع نمونه
عدد شمارشی	ارجاعات آشکار به ترتیب، شمارش و کمیت گسسته.	نام‌گذاری اشیای گسسته‌ای که باید شمرده شوند یا در تکالیف مورد استفاده قرار گیرند (مانند مهره‌ها، افراد).
عدد شمارشی افزوده	مواردی با تمرکز بر شمارش، که می‌توانند (تا حدی یا به‌طور ناخواسته) درک کمّی از مجموعه‌های گسسته را تسهیل کنند.	جنبه فضایی چیدمان نقاط در فعالیت‌های سریع‌شماری، ده‌تایی‌چوارچوب‌ها، نمودارهای فراوانی در آمار، و تقویم‌ها به‌عنوان ابزاری برای ثبت مدت‌زمان.
بالقوه پیوسته	ظرفیت کاربست اعداد برای تبیین تفاوت‌های کمّی در محیط پیرامون ما (یعنی ابتناء بر اندازه‌گیری کمیت).	ادعاها یا ابزارهایی که در آن‌ها تفسیر کمیت پیوسته امکان‌پذیر است، حتی اگر به‌طور صریح پیشنهاد نشده باشد (مانند محور اعداد، حتی اگر برای نمایش انباشت کمیت به‌کار نرفته باشد).
پیوسته	ارجاعات آشکار به کمیت پیوسته در ارتباط با مفهوم عدد.	کمّی‌سازی مقایسه‌های ناظر بر اندازه نسبی.
سواد اندازه‌گیری	اندازه‌گیری، بدون پیوند با مفهوم‌سازی عدد.	ویژگی‌های نام‌گذاری‌شده برای اندازه‌گیری، واحدهای استاندارد اندازه‌گیری، و «واحدهای یکنواخت».

در گام دوم، ازآن‌جا که به نظر می‌رسید بخش‌های «توصیف پایه تحصیلی» و «استاندارد پیشرفت» کدهای موسع‌تری در رابطه با کمیت ارائه می‌دهند، این بخش‌ها را به‌طور مستقل کدگذاری کرده، کدهای حاصل را با یکدیگر مقایسه نمودیم و در نهایت، اختلافات موجود (که کمتر از ۱۰٪ از کدها را شامل می‌شد) را رفع و یکپارچه ساختیم. در گام سوم، یک مرور روایی برای هر پایه تحصیلی تدوین کرده و «جدول ۱: توصیفات و انواع نمونه‌ها» را نهایی نمودیم. به‌جای آنکه صرفاً به گزارش کدهای شناسایی‌شده در داده‌ها بسنده کنیم، فرضیاتی را پیرامون منطق و مبانی نظری توجیه‌کننده این انتخاب‌های برنامه‌درسی، و همچنین معانی نهفته در این انتخاب‌ها صورت‌بندی کردیم. سپس با بررسی عناصری که در مرورهای کلی هر پایه حضور داشتند یا غایب بودند، در پی یافتن شواهد تأییدکننده و ردیه‌هایی برای ادعاهای نوپدید در بخش‌های محتوایی برآمدیم. در گام چهارم، نویسنده دوم تحلیلی مشابه را برای سند «برنامه درسی مکزیک» (MC:M) انجام داد و روندها و مبانی نظری شناسایی‌شده در تحلیل سند استرالیا را با آن مقایسه نمود. یافته‌های گزارش‌شده، در هر دو برنامه درسی مورد تأیید و اثبات قرار گرفتند.

ما در اینجا روایتی ترکیبی و خلاصه‌شده از یافته‌ها را بر پایه ادعاهایی که با پشتوانه محکم داده‌ها قابل‌اثبات بودند، ارائه می‌دهیم.[۲۰] با توجه به اینکه برنامه درسی مکزیک (MC:M) فاقد «تفصیلات محتوایی» (یعنی نمونه‌هایی از تکالیف یا سناریوهای حل مسئله برای استفاده در کلاس درس) است، مثال‌های روشنگر ارائه‌شده، از برنامه درسی استرالیا (AC:M) استخراج شده‌اند.

۲.۴. **یافته‌های حاصل از تحلیل برنامهٔ درسی.** در این بخش، نخست به بررسی خاستگاه ریاضیاتی «عدد» در برنامه‌های درسی مورد مطالعه می‌پردازیم و سپس، بر پایه یافته‌های تحلیل، ماهیت ریاضیاتی ارائه‌شده در این اسناد را کالبدشکافی می‌کنیم. بر این باوریم که نتایج حاضر، بازتاب‌دهنده تنش‌ها و تناقضات موجود میان دو برنامه درسی استرالیا (AC:M) و مکزیک (MC:M) از یک سو، و اهداف معطوف به بهبود آموزش از سوی دیگر است.

۱.۲.۴. *گونه‌های مختلف اعداد.* به‌طور کلی، هر دو چارچوب برنامه درسی، مفهوم عدد در سال‌های اولیه تحصیل را عمدتاً معادل با «عدد شمارشی» در نظر گرفته‌اند. در عمل، این اسناد عدد را با کاردینالیته گردایه‌های گسسته از اشیاء برابر می‌دانند. اگرچه واژگانی نظیر «کمیت» و «مقایسه» در بخش‌های مربوط به عدد هر دو برنامه درسی به چشم می‌خورند، اما معنای دقیق آن‌ها تبیین نشده است. سازگارترین نتیجه‌گیری با کلیت تحلیل حاضر آن است که این واژگان برای ارجاع به کمیت‌های گسسته، و نیز مقایسه‌های مبتنی بر ترتیب عددی یا نگاشت‌های یک‌به‌یک، به بیان دیگر، مقایسه‌های جمعی/افزایشی، به‌کار رفته‌اند.

هرچند انتظار چنین رویکردی را داشتیم، اما میزان اتکای انحصاری مفهوم‌سازی عدد بر مبنای «شمارش» در این برنامه‌های درسی، برای ما بسیار تأمل‌برانگیز بود. به‌عنوان مثال، در برنامه درسی استرالیا از پایه پیش‌دبستانی تا سال سوم، ۷۷ شیء خاص قابل‌شمارش در بخش «تفصیلات محتوایی» ذکر شده‌اند که در فعالیت‌های کلاسی به‌کار می‌روند. این موارد نه تنها ژتون‌ها، نقطه‌ها و تاس‌ها، بلکه مدادها، ببرها، پیچ‌ها یا پنجره‌های یک واگن قطار را نیز در بر می‌گیرند. در نقطه مقابل، در همین پایه‌های تحصیلی، تنها سه مورد از تفصیلات محتوایی وجود دارد که در آن‌ها، در بافتاری مشخص، ارجاعی آشکار به «کمیت پیوسته» در ارتباط با عدد صورت گرفته است:

(۱) استفاده از «یک گلولهٔ خمیر بازی» و «یک لیوان آب» در مبحث عددِ سال دوم برای نشان دادن مفهوم نصف؛
(۲) پیشنهادی مبنی بر «تخمین ارتفاع یک درخت از طریق مقایسه آن با قد یک دوست و بیان نتیجه بدین صورت که «درخت حدود ۳ برابر [دوستم] قد دارد» و مثالی مشابه در باب ظرفیت (به پیوست ب رجوع کنید)، در مبحث اندازه‌گیری سال سوم؛ و
(۳) تفسیر نشانه‌گذاری‌های روی ابزارهای اندازه‌گیری (نظیر خط‌کش، پارچ‌های مدرج و ترازو) به‌عنوان «نقطه آغاز و پایان هر واحد»[۲۱] در مبحث اندازه‌گیری سال سوم.

در برنامه درسی مکزیک ،(MC:M) هیچ‌گونه ارجاع آشکاری به کمیت‌های پیوسته یافت نشد و تمامی توصیفات با مفهوم شمارش سازگاری داشتند. با توجه به اینکه در این مقطع تحصیلی (یعنی زمان معرفی کسرها در سال دوم در استرالیا و سال سوم در مکزیک)، کسرها نمی‌توانند از طریق شمارش به‌طور معناداری به‌عنوان «عدد» مفهوم‌سازی شوند، به نظر می‌رسد این برنامه‌های درسی مسیر روشنی برای هدایت دانش‌آموزان به سوی ظهور کسرها به‌عنوان امتدادی منسجم و ریاضیاتی از مفهوم پیشین آن‌ها از عدد، ارائه نمی‌دهند.

---

[۲۰] ما یافته‌های خود را به بخش‌های «عدد» و «اندازه‌گیری» محدود می‌کنیم، اما یادآور می‌شویم که فقدان کمیت‌های پیوسته و عدم ارجاع به مفهوم اندازه، در سایر بخش‌ها از جمله هندسه (شکل) و آمار نیز کاملاً مشهود بود.

[۲۱] اگرچه این امر می‌تواند تفسیری صحیح قلمداد شود، اما سودمندترین تفسیر ممکن نیست — دست‌کم به این دلیل که معنای «واحد» در برنامهٔ درسی ریاضیات استرالیا (AC:M) مبهم است.

در هر دو برنامه درسی، سال پیش‌دبستانی بیشترین ارجاعات را به «کمیت» و «کمی‌سازی» در خود جای داده است (تقریباً نیمی از کل موارد — ۱۵ از ۳۲ مورد — در استرالیا، و تنها ارجاع موجود در مکزیک). از سال اول به بعد، گفتمان محور «عدد» به سمت خود «اعداد» تغییر مسیر می‌دهد: پس از آن، اعداد باید افراز و مقایسه (یعنی مرتب‌سازی) شوند، الگوها را پدید آورند و به‌شدت با صورت نمادین خود معادل دانسته می‌شوند، به‌گونه‌ای که هرساله باید بر تعداد ارقام آن‌ها افزوده شود.

برنامه درسی استرالیا ،(AC:M) اعمالی نظیر سریع‌شماری، شمارش و تناظر یک‌به‌یک (در سال پیش‌دبستانی)، و شمارش جهشی و افراز (در سال اول) را به‌عنوان روش‌هایی برای «کمی‌سازی مجموعه‌ها» یا «دسته‌هایی از اشیاء» توصیف می‌کند؛ امری که نشان می‌دهد استفاده از واژه تعدادسنجی عناصر در این بافتار دقیق‌تر خواهد بود. پس از سال اول، مفهوم «کمی‌سازی» دیگر به چشم نمی‌خورد و واژه «کمیت» بار دیگر در توصیفات مربوط به تناسب، کسرها و درصدها در سال‌های پنجم و ششم پدیدار می‌گردد. از سال چهارم به بعد، واژه «اعداد» منحصراً به اعداد حسابی اشاره دارد. برای مثال، گزاره «دانش‌آموزان از مهارت خود برای... ضرب و تقسیم کارآمد اعداد استفاده می‌کنند» (سال چهارم)، هیچ اشاره‌ای به کسرها یا اعداد اعشاری ندارد، زیرا ضرب و تقسیم این دسته از اعداد هنوز معرفی نشده است. منطقی‌ترین نتیجه‌گیری آن است که کسرها و اعداد اعشاری، اساساً «عدد» محسوب نشده‌اند. زمانی که این معضل در پایه‌های بالاتر حل می‌شود، راهکار آن پذیرش کسرها و اعداد اعشاری در زمره «اعداد» نیست؛ بلکه این مسئله با معرفی یک مفهوم چتری جدید تحت عنوان اعداد گویا پوشش داده می‌شود که اعداد حسابی، کسرها و اعداد اعشاری را با سازوکاری نامشخص در خود جای می‌دهد: «[دانش‌آموزان] دامنه اعدادی را که با آن‌ها کار می‌کنند، بسط می‌دهند تا اعداد گویا و استفاده از اعداد صحیح را نیز در بر گیرد» (سال ششم). به نظر می‌رسد این یکپارچه‌سازی مفاهیم صرفاً یک «تغییر نام» تلقی شده است، درحالی‌که درواقع، این امر یکپارچه‌سازی اشیای ریاضیاتی متفاوتی است که دست‌کم از دیدگاه دانش‌آموزان فاقد خاستگاه، معنا یا مجموعه عملگرهای مشترک هستند.

برنامه درسی مکزیک (MC:M) از اصطلاح عام «اعداد» استفاده نمی‌کند؛ بلکه به‌طور پیوسته از اعداد حسابی با عنوان «اعداد طبیعی» یاد کرده و هنگام ارجاع به محاسبات، آن‌ها را از کسرها و اعداد اعشاری متمایز می‌سازد. در سال ششم، اعداد صحیح به دامنه اعدادی که دانش‌آموزان با آن‌ها کار می‌کنند افزوده می‌شود و از سال هفتم، دانش‌آموزان «مسائل مربوط به جمع و تفریق با اعداد صحیح، کسرها و اعداد اعشاری، اعم از مثبت و منفی را حل می‌کنند». بدین ترتیب، برنامه درسی مکزیک دست‌کم تا پایان سال نهم، اعداد را به‌عنوان یک مفهوم واحد و یکپارچه (از یک جنس مشترک) ارائه نمی‌دهد.

با در نظر گرفتن دو استثنای ذکرشده در برنامه درسی استرالیا، هر زمان که بخش‌های مربوط به شکل، فضا و اندازه‌گیری در این برنامه‌های درسی به کمیت‌های پیوسته می‌پردازند، هدف آن‌ها ایجاد چیزی است که ما آن را «سواد پایه اندازه‌گیری» می‌نامیم. این رویکرد، آشنایی دانش‌آموزان با ویژگی‌های قابل‌مقایسه یا قابل‌اندازه‌گیری، و معرفی ابزارهای رسمی و غیررسمی برای انجام این مقایسه‌ها یا اندازه‌گیری‌ها (از جمله تخصیص یک عدد به آن ویژگی) را در بر می‌گیرد. با این حال، این مضامین فاقد استدلال ریاضیاتی پیرامون چگونگی کمی‌سازی یک ویژگی یا نحوه ساخت ابزارهای اندازه‌گیری هستند؛ به‌عنون مثال، دستیابی به این استدلال که یک نوار اندازه‌گیری درواقع ثبت انباشت طول است [۴۳]. برنامه‌های درسی مورد بررسی، مفاهیم عدد و اندازه‌گیری را عمدتاً به‌عنوان دو حیطه کاملاً مجزا و نامرتبط در نظر گرفته‌اند.

۲.۲.۴. *ماهیت ریاضیات.* در تبیین انتخاب‌های مفهومی صورت‌گرفته در برنامه‌های درسی مورد تحلیل، تقابل دیگری با اهداف ارتقای آموزش برایمان مسجل گردید. این تقابل به ماهیت ریاضیاتی مربوط می‌شد که قرار بود آموزش داده شود [۵، ۸، ۳۹].

از پایهٔ دوم به بعد، برنامهٔ درسی استرالیا (AC:M) آشکارا ریاضیات را دانشی بیرون از جهانِ دانش‌آموزان و جدا از آن صورت‌بندی می‌کند. ریاضیات به‌منزلهٔ امری «ازپیش‌آماده» به دانش‌آموزان عرضه می‌شود تا بتوانند با آن به مدل‌سازی جهان بپردازند: «می‌توان از ریاضیات برای بررسی موضوعاتی که مایهٔ کنجکاوی [دانش‌آموزان] است، برای حل مسائل عملی و برای مدل‌سازی موقعیت‌های روزمره بهره برد» (پایهٔ دوم). این رویکرد در تضاد با فعالیت «ریاضی‌ورزی» قرار دارد که بخشی جدایی‌ناپذیر از بهبود آموزش است؛

فعالیتی که در آن، تجربیات دانش‌آموزان جایگاهی می‌یابد که ایشان می‌توانند از دل آن، در صورت هدایت و حمایت مناسب، به خلق ریاضیات بپردازند. هر دو برنامهٔ درسی استرالیا (AC:M) و مکزیک ،(MC:M) معلمان را ترغیب می‌کنند تا دانش‌آموزان را به‌سوی شناخت ریاضیات به‌عنوان ابزاری برای درک تجربیات روزمره‌شان سوق دهند؛ تجربیاتی که قاعدتاً بدون ریاضیات قابل‌فهم نخواهند بود.[۲۲] هیچ‌یک از این دو برنامهٔ درسی روشن نمی‌سازند که خاستگاه این نوع ریاضیات ضروری و ازپیش‌آماده کجاست.

برای نمونه، سیستم ارزش مکانی در مبنای ۱۰ در قالب یک الگوی عددی ارائه می‌شود که باید به‌منظور افزایش روانی محاسباتی فراگرفته شود (مانند «دست‌ورزی با اعداد»، برنامهٔ درسی استرالیا، پایهٔ سوم). این سیستم به‌مثابهٔ یک ابداع انسانی که دربردارندهٔ کارایی روزافزون در هر دو عرصهٔ اندازه‌گیری و محاسبه باشد، معرفی نمی‌گردد. ریاضیات صرفاً چیزی است که داده می‌شود، آموخته می‌شود، بازنمایی می‌گردد و به‌کار می‌رود. این دانش در کلاس درس خلق یا تولید نمی‌شود، و نه اهداف و نه شیوه‌های خلق آن هیچ‌کدام مورد کاوش قرار نمی‌گیرند.

خلاصه آنکه، اگر شمارش یگانه منشأ اعداد حسابی در ریاضیات مدرسه‌ای باشد، آن‌گاه آشنایی دانش‌آموزان استرالیایی و مکزیکی با کسرها دربردارندهٔ بسط و تعمیم یک ایدهٔ ازپیش‌آشنای عددی (یعنی همان شمارش) نخواهد بود. در عوض، کسرها باید به‌عنوان یک موجودیت ریاضی مستقل و جدید معرفی شوند که هیچ ارتباطی با یادگیری‌های پیشین دربارهٔ اعداد ندارند. این شیوه از سازمان‌دهی محتوای برنامهٔ درسی، معلمان و طراحان کتاب‌های درسی را به‌سوی آموزشی که از منظر دانش‌آموزان واجد انسجام ریاضی باشد، هدایت نمی‌کند. با ناکامی در ارائهٔ یک پایه‌ریزی مفهومی برای کسر به‌عنوان یک عدد، آموزش منسجم در هاله‌ای از ابهام فرو می‌رود.

ما می‌توانیم تحلیل خود از برنامهٔ درسی را در همین نقطه به پایان ببریم. اما پیام مهم این ماجرا آن است که مسئله صرفاً به مکزیک و استرالیا محدود نمی‌شود، هرچند این برنامه‌های درسی به‌خوبی توانستند شواهدی از یک روند کلان‌تر در برنامه‌ریزی درسی ارائه دهند.

۵. مسئله‌سازی برنامه‌های درسی کنونی

لازم به توضیح است که هرچند سازمان‌دهی اجمالی و انتخاب‌های گفتمانی برنامه‌های درسی مورد تحلیل را چالش‌برانگیز می‌دانیم، اما آن‌ها را دور از انتظار نمی‌یابیم. انتخاب‌های صورت‌گرفته در برنامه‌های درسی که تحلیل ما آن‌ها را آشکار می‌سازد، صرفاً حاصل یک ناهماهنگی ساده یا سهل‌انگاری نیستند. درواقع، این انتخاب‌ها دیرپا و در برابر تغییر مقاوم به نظر می‌رسند. بر این باوریم که برای تحقق هرگونه تغییر مطلوب در برنامه‌های درسی، نه‌تنها نیازمند درک تأثیر این انتخاب‌ها بر فرآیند یاددهی–یادگیری هستیم، بلکه باید به شناخت منطقی دست یابیم که تداوم آن‌ها را توجیه و تضمین می‌کند.

انتخاب‌های مستندشده در این برنامه‌های درسی، با رویکرد «ریاضیات جدید»، رویکردی در آموزش ریاضی متعلق به اواسط قرن بیستم، همسویی دارند؛ رویکردی که ریشه در هستی‌شناسی ریاضیات دانشگاهی مدرن، یعنی ریاضیات انتزاع، دارد. در ادامه، ما این وضعیت را با شالوده‌ریزی ریاضیات مدرسه‌ای که در آغاز قرن بیستم رواج داشت، در مقام مقایسه قرار می‌دهیم؛ دورانی که در آن، ریاضی مقطع ابتدایی تا حد زیادی از شالوده‌های هستی‌شناختی مشترکی با ریاضیات دانشگاهی کلاسیک برخوردار بود. در ریاضیات کلاسیک، اصول موضوعه بازنمایانگر حقایق بنیادینی بودند که جای هیچ‌گونه تردیدی باقی نمی‌گذاشتند و ناظر بر ویژگی‌ها و آرمان‌سازی‌های اشیاء در جهان واقعی بودند [۶، ۷]. در آن دوران، دیدگاه‌های معطوف به ریاضیات دربرگیرندهٔ یک چشم‌انداز ارسطویی بود که ریاضیات را به‌مثابهٔ «علم کمیت» در نظر می‌گرفت [۱۶]. ما توجه مخاطب را به قابلیت‌ها و محدودیت‌هایی جلب

[۲۲] در این ساختار، نهادهای مدرسه‌ای در جایگاهی قرار می‌گیرند که بر میزان درک هر دانش‌آموز از زندگی خویشتن تسلط و کنترل دارند. این جایگاه از منظر دانش‌آموزان چندان متقاعدکننده به نظر نمی‌رسد، چرا که قدرت روشنگرانه و پرده‌بردار ادعاشده برای ریاضیات، به‌ندرت، اگر نگوییم هیچ‌گاه، به آن‌ها اثبات می‌شود (نمونهٔ بارز آن این پرسش است: «این مطالب کِی به دردمان خواهد خورد؟»).

می‌کنیم که این چارچوب‌بندی‌های متفاوت هستی‌شناختی، بر سرآغاز مسیر ریاضی دانش‌آموزان اعمال می‌کنند؛ و همچنین به پرسش مهمی می‌پردازیم که با نیاز غایی دانش‌آموزان برای ورود به جهان ریاضیات مدرن گره خورده است.

۱.۵. **ریاضیات مدرن.** گذار ریاضیات از عرصهٔ کلاسیک به مدرن، که فرآیندی تاریخی، زمان‌بر و عمیقاً پیچیده بوده است، با چرخش از اصول موضوعهٔ اقلیدسی به‌سوی نظریهٔ مجموعه‌ها به‌عنوان شالودهٔ اصول موضوعهٔ صوری مشخص می‌شود. این چرخش، ریشه در تکاپوی ریاضی‌دانان برای دستیابی به وحدت نظری در این رشته داشت؛ رشته‌ای که به شاخه‌هایی منشعب شده بود که دیگر ارتباط روشنی با کمیت یا اندازه‌گیری نداشتند. این رویداد نمایانگر «فاصله‌گیری در ابتدا تدریجی و سپس قاطعانه از واقعیت، به‌عنوان منبع یا مرجعی برای اشیاء ریاضی» بود [۷، ص. ۱۱۵]. اوته [۳۱] تصریح می‌کند که این دگردیسی «ریاضیات را انتزاعی‌تر ساخت و از وجه (تبیینی) آن کاست» (ص. ۲۴۵). در ریاضیات مدرن، اصول موضوعه تنها از طریق صفات اشیاء به واقعیت ارجاع می‌دهند: آن‌ها ویژگی‌های اعمال روی اعداد (مانند خاصیت جابه‌جایی) را تعریف می‌کنند، اما خود اعداد می‌توانند با اشیاء دیگری جایگزین شوند که اعمال روی آن‌ها، همان ویژگی‌ها را بروز می‌دهند. بدین‌ترتیب، تعاریف مبتنی بر انتزاع، جایگزین تعاریف برساختی (یا همان تعاریف تبیینی) شدند.

هرچند گرایش به‌سوی انتزاع مبتنی بر نظریهٔ مجموعه‌ها برای ریاضیات در مقام یک دیسیپلین علمی سودمند بود، اما پیوند زدن و انتقال آن به ریاضیات مدرسه‌ای از طریق جنبش «ریاضیات جدید»، به‌شدت بحث‌برانگیز شد و مورد مناقشه قرار گرفت [۱۸، ۲۳، ۴۵]. در چارچوب ریاضیات مدرن انتزاعی، ابزارهای استدلالی پیشین که زمانی ضروری می‌نمودند، نظیر کمیت، واحدها و اندازه‌گیری، دیگر به‌عنوان خاستگاه مفهوم عدد موضوعیت نداشتند. تمایز میان کمیت پیوسته و گسسته نیز رنگ باخت و بلاموضوع شد. ریاضیات مدرن دلیل قانع‌کننده‌ای برای کاوش در مفهوم عدد و خاستگاه آن ارائه نمی‌داد. در عوض، مجموعه‌های عددی برای سازمان‌دهی برنامه‌های درسی مدارس ظهور یافتند (برای نمونه، اعداد طبیعی و گویا که به‌صورت صوری با نمادهای $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Q}$ نمایش داده می‌شوند). ازآن‌جا که ساخت مجموعه‌های عددی به‌عنوان مفاهیم ریاضی در کلاس‌های درس دورهٔ ابتدایی امکان‌پذیر نبود، آن‌ها در قالبی ریاضیاتی «از پیش آماده» معرفی می‌شدند. اکنون قرار بود اعداد از لحاظ آموزشی و از طریق مثال‌ها و کاربردهایی به واقعیت پیوند بخورند که از توصیفات گسسته، انتزاعی و مبتنی بر نظریهٔ مجموعه‌ها استخراج شده بودند (مانند تعریف کسرها به‌عنوان زوج‌هایی از اعداد صحیح؛ یعنی یک زوج صورت–مخرج). این رویکرد، به‌استثنای عمل شمارش به‌عنوان ابزاری برای تعیین عدد اصلی، برای دانش‌آموزان مشکل‌ساز از آب درآمد [۲۵، ۴۲، ۴۴].

در بخش‌های آتی، ماهیت برنامه‌های درسی متأثر از تغییرات «ریاضیات جدید» را از طریق بررسی دو موردپژوهی روشن می‌کنیم. سپس به تحلیل خویش بازمی‌گردیم تا نشان دهیم که واکنش‌های برنامه‌های درسی موجود به معضلات ناشی از «ریاضیات جدید»، تا به امروز تا چه حد گسسته و پراکنده بوده‌اند. ما بار دیگر بر ضرورت سازمان‌دهی محتوایی برنامهٔ درسی، به‌گونه‌ای که تسهیل‌گر پیگیری انسجام ریاضی در آموزش کلاسی باشد، تأکید می‌ورزیم.

۲.۵. **مثال ۱: فقدان توجیه در آموزش تناسب.** تحلیل‌های تطبیقی شامبری از متون درسی فرانسه [۶، ۷] این امکان را فراهم می‌آورد تا تغییرات ناشی از جنبش «ریاضیات جدید» را از منظر منابع در دسترس معلمان مورد بررسی قرار دهیم. با ظهور «ریاضیات جدید»، تولید موادی که پیش‌تر منطق سازمان‌دهی ریاضیات مدرسه‌ای را به معلمان انتقال می‌دادند، متوقف شد [۳۰]. وجود استدلال‌های ریاضی برای گام‌های برنامهٔ درسی در این مواد آموزشی، پیش از آن به معلمان کمک می‌کرد تا با استفاده از ایده‌ها و ابزارهایی که از قبل در اختیار دانش‌آموزان قرار داشت، مفاهیم ریاضی جدیدی را بنا کنند.

گذار به‌سوی مبانی ریاضیات مدرن بدین معنا بود که دیگر نمی‌شد چنین استدلال‌هایی را در اختیار معلمان قرار داد. با حذف توجیه‌های استوار بر استدلال از طریق اندازه‌گیری و کمیت‌ها، انواع جدیدی از توجیه‌ها معرفی شدند، اما این امر تنها به برخی از رویه‌های ریاضی محدود می‌شد (برای نمونه، ضرب به‌عنوان حاصل‌ضرب دکارتی برای اعداد حسابی معرفی شد، که این خود ایجاب می‌کرد مفهوم متفاوتی از ضرب برای کسرها تبیین گردد). با گذشت زمان، برخی از این استدلال‌های جدید به‌دلیل پیچیدگی یا میزان

انتزاعشان نامناسب تشخیص داده شدند و از کتاب‌های درسی حذف گردیده یا جای خود را به قواعد و مثال‌ها دادند. در غیاب هرگونه جایگزین دیگری، استفاده از قواعد بدون ارائهٔ توجیه، به رویه‌ای پذیرفته‌شده در ریاضیات مقطع ابتدایی بدل گشت.

یکی از ویژگی‌های کلیدی برنامه‌های درسی متکی بر ریاضیات مدرن (و یکی از معضلات اصلی که منتقدان آن مطرح کرده‌اند) این است که برخی از مفاهیم ریاضی را تنها می‌توان از طریق رویکردی از بالا به پایین و به‌صورت تحمیلی و بی‌مقدمه به دانش‌آموزان عرضه کرد. در رویکردهای برخاسته از «ریاضیات جدید»، رابطهٔ ریاضیات با واقعیت، از دریچهٔ «کاربرد» مورد بازنگری قرار گرفت. یادگیری یک ایدهٔ ریاضی جدید، در وهلهٔ نخست فی‌نفسه واجد ارزش و اعتبار بود، و در وهلهٔ بعد، مستلزم شناخت موقعیت‌هایی بود که آن ایده در آن‌ها کاربرد داشت. به‌عنوان مثال، مقایسه‌های کمّی دوتایی که پیش‌تر پایه‌های مفهومی تناسب و نرخ را شکل می‌دادند (مثلاً، زمانی که مسافت دو برابر می‌شود، زمان موردنیاز برای پیمودن آن نیز دو برابر می‌گردد)، صرفاً به یکی از «کاربردهای» متعدد مفهوم تابع خطی تقلیل یافتند؛ تابعی که ابتدا در صورت فشردهٔ ریاضیاتی خود، به‌طور ناگهانی و همچون یک چترباز بر ذهن دانش‌آموزان فرود می‌آمد.

برنامهٔ درسی، با تن دادن به چنین شیوهٔ تحمیلی و بی‌مقدمه‌ای در ارائهٔ ایده‌ها، مجالی برای دانش‌آموزان باقی نگذاشت تا ریاضیات را به‌عنوان سیستمی منسجم و مبتنی بر منطق تجربه کنند. جای شگفتی نیست که این امر، آموزش ریاضیات را به‌شدت دشوار ساخت. در خصوص آموزش تناسب در برنامه‌های درسی فرانسه، سناریوهای مبتنی بر اندازه‌گیری، واحدها و کمیت‌ها پس از سال ۲۰۰۲ مجدداً وارد کتاب‌های درسی شدند، اما این بازگشت هنوز از نظام‌مندی لازم برخوردار نبود [۷].

۳.۵. **مثال ۲: اصلاحات آموزشی در واکنش به فقدان انسجام ریاضیاتی.** ما [۲۶] شرح داده است که چگونه در ایالات متحده، یک چارچوب برنامهٔ درسی مبتنی بر «ساختار رشته‌ای»، همان ساختار آشنای استانداردهای شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM) در سال ۱۹۸۹، نخستین بار در اوایل دههٔ ۱۹۶۰ و همگام با تغییرات برنامهٔ درسی ناشی از جنبش «ریاضیات جدید» معرفی گردید. این برنامهٔ درسی، با الهام از ریاضیات مدرن، بر آن بود تا «نه‌تنها مهارت‌های پایهٔ ریاضی، بلکه درک عمیق‌تری از مفاهیم و ساختار بنیادین ریاضیات را به دانش‌آموزان عرضه کند» (خبرنامهٔ گروه مطالعهٔ ریاضیات مدرسه‌ای [SMSG] در سال ۱۹۵۹، به نقل از کیلپاتریک [۲۱، ص. ۲۴۷]). ما [۲۶] دو دلیل اصلی را برای کنار گذاشتن رویه‌های پیشین در پرتو ریاضیات جدید مطرح کرده است: (۱) عدم آگاهی کافی از مزایای یک سازمان‌دهی برنامه‌درسی که ریاضیات را از دیدگاه دانش‌آموزان به‌مثابه دانشی منسجم ارائه می‌داد، و (۲) تقلیل حساب مدرسه‌ای به رویه‌هایی صرف برای محاسبه. رشته‌های پایه‌ای پیشنهادی در سال ۱۹۶۳ در ایالت کالیفرنیا، دیگر شامل مبحث حساب نبودند؛ بلکه این جایگاه به «اعداد و عملیات» اختصاص یافته بود. در این فرآیند، تکاپو برای یافتن ساختار ریاضیاتی، بر تلاش برای ایجاد انسجام معنایی از منظر یادگیرنده پیشی گرفت. همانند مورد فرانسه، ما [۲۶] خاطرنشان کرد که اگرچه مفاهیم متعددی از هر رشته پیشنهاد شده بود، اما «هیچ شواهدی دال بر اینکه این مفاهیم مهم برای شکل‌دهی به سیستمی که بتواند عملیات ریاضیات ابتدایی را تبیین کند کفایت کنند، وجود نداشت» (ص. ۱۲۸۸). ساختار برنامه‌درسی حاصل از این رویکرد، در پی آن بود که سیستم استنتاجی ازپیش‌آمادهٔ ریاضیات را به دانش‌آموزان ارائه دهد (نه آنکه آن را از پایه و به‌صورت گام‌به‌گام بنا کند). این رویکرد از فعالیت‌های فرهنگی و تاریخی ریاضی‌دانان که روزگاری در ابداع خود این سیستم مدرن نقشی کلیدی ایفا می‌کردند کاملاً گسسته بود.

نگرانی فزایندهٔ دیگر مربیان آموزش ریاضی، خود را در افزودن رشته‌های موسوم به «رشته‌های فرآیندی»، از جمله «حل مسئله» و «استدلال و اثبات»، در کنار رشته‌های محتوایی در استانداردهای ۱۹۸۹ شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM) نشان داد. این رشته‌های فرآیندی، که پاسخی به عدم مشارکت و بی‌رغبتی دانش‌آموزان نسبت به استدلال‌های ریاضی در کلاس‌های درس بودند، نشان‌دهندهٔ تعهدی بنیادین به شکل‌دهی ماهیت ریاضیات مدرسه‌ای بودند. با این حال، ساختار زیربنایی محتوا دست‌نخورده باقی ماند. رشته‌های مختلف محتوایی و فرآیندی «در کنار یکدیگر قرار گرفته بودند، اما هیچ‌گونه پیوندی با هم نداشتند» [۲۶، ص. ۱۲۸۲]. برنامهٔ درسی فاقد یک نظام مشترک از تعاریف بود که بتوان از طریق آن، ایده‌های جدید را بر بستر ایده‌های پیشین بسط و توسعه

داد. ما [۲۶] متذکر شد که این خلأ، شرایطی را برای تدریس رقم زد که فاقد پیوستگی، انسجام ریاضیاتی، و ثبات در برابر تغییرات مکرر برنامه‌درسی بود. ازآن‌جا که این پدیده‌های ساختاری با نحوهٔ مفهوم‌پردازی ریاضیات مدرن که شالودهٔ برنامهٔ درسی را تشکیل می‌داد گره خورده بودند، اصولاً نمی‌توانستند از طریق ارائهٔ توضیحات بیشتر در راهنماهای تدریس معلمان اصلاح گردند. مبانی صوری ریاضیات مدرسه‌ای با تلاش برای درگیر ساختن دانش‌آموزان در عمل «ریاضی‌ورزی» هم‌خوانی نداشتند؛ هرچند طراحان برنامه‌های درسی اصرار می‌ورزیدند که معلمان موظف‌اند چنین مشارکتی را محقق سازند.

۴.۵. **بررسی نمونه‌های معاصر استرالیا و مکزیک.** ما برنامه‌های درسی جدیدتری را نسبت به آنچه در بخش‌های پیشین بحث شد، مورد واکاوی قرار دادیم. با این وجود، تحلیل ما برخی از همان مشکلات بنیادین را آشکار ساخت که ریشهٔ آن‌ها را می‌توان در اتکا به ریاضیات مدرن به‌عنوان شالودهٔ برنامهٔ درسی مبحث عدد در دورهٔ ابتدایی جستجو کرد. بی‌ارتباطی کمیت‌های پیوسته با مفهوم‌پردازی عدد؛ نوع سازمان‌دهی که در آن عدد و اندازه‌گیری به رشته‌های محتوایی مجزایی تفکیک شده‌اند؛ پیوند میان ریاضیات و واقعیت که صرفاً به‌مثابه «کاربردها» مفهوم‌سازی می‌شود؛ و این انتظار بلندپروازانه که دانش‌آموزان مفاهیم نامتجانس (مانند ضرب اعداد صحیح و کسرها) را بدون هدایت و حمایت آشکار به یکدیگر پیوند دهند؛ تمامی این «ویژگی‌های» برنامه‌درسی به‌طرز غریبی آشنا به نظر می‌رسند.

هر دو برنامهٔ درسی مورد بررسی تصریح می‌کنند که باید به توصیه‌های مرتبط با بهبود آموزشی توجه شود. برنامهٔ درسی ریاضی استرالیا (AC:M) مقرر می‌دارد که معلمان باید افزون بر تسلط محتوایی دانش‌آموزان، از پرورش مهارت‌های ریاضیاتی آنان شامل پرورش تفکر محاسباتی، درک مفهومی، حل مسئله و استدلال نیز حمایت کنند. به شکلی مشابه، برنامهٔ درسی ریاضی مکزیک (MC:M) بخش قابل‌توجهی از متن خود را به بحث پیرامون رویکرد یاددهی مبتنی بر حل مسئله اختصاص داده و اهداف تدریس ریاضیات را تبیین می‌کند. شوربختانه، این توصیه‌ها فقدان انسجامی را که برآمده از «ارائهٔ تحمیلی و بی‌مقدمهٔ محتوا» به‌عنوان روشی مشروع برای تدریس است، برطرف نمی‌سازند. به نظر می‌رسد تنها دستاورد گنجاندن این توصیه‌ها در اسناد برنامه‌های درسی مذکور، پنهان ماندن مستمر خود این تعارض است (رجوع کنید به [۳۴]).

آیا راه دیگری متصور است؟ اگرچه ما در این مقاله مسیر جامعی برای مفهوم‌پردازی مجدد از ریاضیات با هدف طراحی برنامهٔ درسی ارائه نمی‌دهیم، اما چند ملاحظهٔ راهبردی را مطرح می‌کنیم. در ابتدا اجازه دهید با دو موردی آغاز کنیم که در تقابل با برنامه‌های درسی فرانسه و ایالات متحده (که پیش‌تر ذکر شد) قرار می‌گیرند؛ مواردی که در آن‌ها برنامهٔ درسی مقطع ابتدایی، از منظر دانش‌آموزان، پیشرفتی منسجم و منطقی داشته است.

۶. مدل‌های متمایز: برنامه‌های درسی فراهم‌آورندهٔ انسجام در استدلال‌های ریاضی

در آغاز قرن بیستم، ریاضی مقطع ابتدایی در فرانسه پایه‌های مشترکی با ریاضیات آکادمیک کلاسیک داشت [۶]. منابع مرجع برنامهٔ درسی فرانسه که در آن دوران مورد استفادهٔ معلمان ابتدایی قرار می‌گرفت، نظیر رسالهٔ بزو[۲۳] [۳]، دربردارندهٔ گام‌های استدلالی و استدلال‌هایی بود که از رهگذر آن‌ها، ریاضیات بر مبنای حقایق پذیرفته‌شده، به‌مثابه سیستمی که انسجام درونی خود را حفظ می‌کرد، بنا می‌شد.[۲۴] درک این امر که انسجام استدلال در کانون ریاضیات جای دارد، برای امر تدریس ضروری بود.

نظریهٔ ریاضیات کلاسیک، مدلی را برای فرآیندی که از طریق آن جهان تجربه‌پذیر می‌توانست ریاضی‌سازی شود، فراهم می‌آورد. کمیت‌های «عینی»، به‌عنوان ویژگی‌های بازشناخته‌شده در اشیاءِ روزمره، واحدهای اندازه‌گیری را به‌دست می‌دادند که از طریق آن‌ها، نخستین لایهٔ انتزاع ریاضیاتی، یعنی کمیت عددی و واحدهای عددی، قابل ساخت بود. کتاب‌های درسی مدرسه، همانند تعاریف ریاضیات آکادمیک کلاسیک، اشیاء و ایده‌های ریاضی را به‌عنوان اموری مشتق‌شده از پدیده‌های واقع‌گرایانه و مرتبط با آن‌ها معرفی

[23] Bezout

[۲۴] برای بررسی نمونه‌هایی از ماهیت این قسم متون ریاضی، رجوع کنید به [۷].

می‌کردند. برای نمونه، اعداد صحیح از طریق اندازه‌گیری کمیت‌های گسسته و پیوسته تولید می‌شدند و تکرارهای یک واحد از یک کمیت معین را بازنمایی می‌کردند. فرآیندی که طی آن، اندازه‌گیری کمیت‌های پیوسته (مانند طول‌ها) برای برساختن اعداد صحیح به‌کار می‌رفت، بعدها با ظهور نیاز به دقت بیشتر در اندازه‌گیری، بسط یافت تا تولید کسرها را نیز در بر گیرد (همچنین ببینید: [۹]). همانند اعداد صحیح، کسرها نیز می‌توانستند بازتاب‌دهندهٔ اندازه‌های کمیت‌های خاص باشند؛ درنتیجه، به همان خانوادهٔ اعداد تعلق داشتند و در خاستگاه و معنای عملیات حسابی با اعداد صحیح شریک بودند (رجوع کنید به [۲]).

پیوند آشکار ریاضیات ریاضی‌دانان با واقعیت، به‌طور ظریفی یک منطق متقاعدکننده و شهودی برای ساختار محتوای اعداد فراهم می‌کرد. این امر شامل سازمان‌دهی کمیت‌های پیوسته بر مبنای روابط ضربی (یعنی مبتنی بر فرآیند تکرارپذیر اندازه‌گیری) بود، که برای معنا بخشیدن به مفهوم تناسب نقشی حیاتی دارند. ازآن‌جا که تعاریف اشیاء ریاضی ماهیتی سازنده داشتند، آن‌ها تصور چگونگی ارتباط مفاهیم جدید ریاضی با تجربیات پیشین یادگیرندگان را تقویت می‌کردند. بدین ترتیب، همان ابزارهایی که برای تعریف ریاضیات به‌کار می‌رفتند، می‌توانستند برای معنا بخشیدن به آن نیز مورد استفاده قرار گیرند (رجوع کنید به [۷]).

ما [۲۶] از برنامهٔ درسی ریاضیات ابتدایی در چین (پیش از سال ۲۰۰۰) بهره برد تا توجهات را به سمت یک ساختار برنامه‌درسی مبتنی بر موضوع هسته جلب نماید. در برنامه‌درسی‌ای که بدین شیوه ساختار یافته بود، یک موضوع خودبسنده، یعنی حساب مدرسه‌ای، بر شالوده‌ای از سیستم تعاریف برای عملیات روی اعداد صحیح و کسرها استوار بود که از اصول اقلیدس الگوبرداری شده و مبتنی بر مفهوم واحد بود. در نتیجهٔ این پایه‌ریزی بر بستر ریاضیات کلاسیک، ایده‌های جدید ریاضی همواره می‌توانستند به‌عنوان امتدادی منسجم از ایده‌های ازپیش‌موجود، یا افزونه‌ای بر آن‌ها، معرفی گردند. برنامهٔ درسی، هستهٔ ریاضیات مدرسه‌ای را به‌نحوی منسجم بسط می‌داد و پایه‌ای را برای انشعاب یافتن به سایر مؤلفه‌های محتوایی فراهم می‌ساخت. بخش‌های مجزای محتوای حساب، با «وحدت ریاضیاتی... مورد حمایت پیوستگی آموزشی» مشخص می‌شدند (ص. ۱۲۸۴)؛ جایی که هیچ‌گونه گسستی از سوی محتوای غیرحسابی رخ نمی‌داد. مؤلفه‌های افزوده (مانند هندسه)، همگی در بسیاری از معانی خود وام‌دار حساب مدرسه‌ای بودند و با محتوای حساب در هم می‌آمیختند تا «یک کل یکپارچه را شکل دهند» (ص. ۱۲۸۲).

استدلال‌های بیشتر پیرامون امکان‌پذیری یک زیربنای کلاسیک برای آغاز سفر ریاضیاتی در مدرسه، از یادآوری کلاین [۲۳] سرچشمه می‌گیرد مبنی بر اینکه ریاضیات هرگز با انقلابی مواجه نشد که در آن مشخص شود ایده‌های کهن (کلاسیک) دیگر از منظر ریاضیاتی معتبر نیستند. بلکه،

> ریاضیات، دست‌کم از دوران یونان باستان، استوار و مستحکم بنا شده است و عموماً تحولات متأخر به‌لحاظ منطقی بر پیشرفت‌های پیشین متکی بوده‌اند. به‌عبارت دیگر، ریاضیات یک توسعهٔ انباشتی است. ازاین‌رو، بخش‌های کهن‌تر، منسوخ یا بی‌فایده نمی‌گردند.

استدلال‌های «ریاضیات جدید» در دفاع از بنیان‌های ریاضیات مدرن در آموزش ریاضی دورهٔ ابتدایی، ناشی از فوریت دوران جنگ سرد برای دستیابی سریع به ریاضیات مدرن بود [۲۰]. همان‌طور که مشخص شد، کنارگذاشتن ریاضیات کهن (اما نه منسوخ) نه راهی سریع‌تر برای رسیدن به این هدف فراهم کرد و نه راهی قابل‌اطمینان‌تر.

پیش از شتاب‌زدگی برای بازگشت به ریاضیات کلاسیک به‌عنوان شالودهٔ مفهومی ریاضیات مقطع ابتدایی، باید در نظر بگیریم که نهایتاً چگونه به ریاضیات مدرن دست خواهیم یافت. آیا ریاضیات همواره می‌تواند در فضای کلاس درس به‌طور پیوسته و به شیوه‌ای انباشتی بسط یابد؟ پاسخ، البته منفی است. ریاضیات همیشه به معنای جمع‌شونده انباشتی نیست. ریاضیات کلاس درس نیز، درست مانند ریاضیات در بستر تاریخ، ضرورتاً باید دستخوش مفهوم‌پردازی‌های مجدد شود. اسفارد [۴۱] زمانی که بین تحولات ریاضیاتی در سطح شیء و سطح فراگیر تمایز قائل شد، به این پدیده توجه نشان داد:

> در ریاضیات، توسعه در سطح شیء، توسعه‌ای است که خود را در قالب گسترش دانش موجود دربارهٔ جهان ازپیش‌موجود اشیاء ریاضی متجلی می‌سازد. بنابراین، رشد سطح شیء در وهلهٔ نخست انباشتی است. در

مقابل، تحولات سطح فراگیر (متا) آن دسته تحولاتی هستند که قواعد بازی گفتمانی را دگرگون می‌کنند، نه اینکه صرفاً حجم روایت‌های پذیرفته‌شده را تغییر دهند. این نوع یادگیری زمانی رخ می‌دهد که برخی از اشیاء تازه معرفی‌شدهٔ ریاضی، تضادهای آشکاری را با روایت‌های پیش‌تر پذیرفته‌شده ایجاد کنند. نمونهٔ بارزی از این دست تحول سطح فراگیر، زمانی به وقوع پیوست که معرفی اعداد منفی منجر به بازنگری در فرض بنیادین معرفت‌شناختی‌ای شد که بر اساس آن، حقایق ریاضیاتی توسط واقعیتی مستقل از ذهن تحمیل می‌شوند. در این مورد، پیش از آن‌که این اشیاءِ جدید عموماً پذیرفته شوند، تغییری در قواعد فراگفتمانی ضروری بود. از آن پس، یگانه معیار برای پذیرش یک شیء ریاضی جدید، سازگاری درونی گفتمان پیرامون آن شیء است.

حمایت از یک تحول سطح فراگیر در ارتباط با اعداد منفی، نیازمند عدول از مفهوم‌پردازی اعداد (یعنی اعداد صحیح و کسرها) از طریق اندازه‌گیری طول است؛ آن هم به یک دلیل بدیهی: هیچ طول منفی‌ای در پیرامون ما قابل مشاهده نیست. اما ما می‌توانیم با موفقیت نیاز ریاضیاتی دانش‌آموزان را به اعدادی که «فراتر از صفر رو به عقب ادامه می‌یابند» برانگیزیم؛ از جمله با تکیه بر چگونگی ظهور تاریخی این نیاز. چنین نیازی به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا دریابند چرا تبدیل اعداد، هم آن‌هایی که از پیش داریم (یعنی طول‌ها) و هم آن‌هایی که مایلیم داشته باشیم (یعنی طول‌های منفی)، به اشیاء جدید امری مطلوب خواهد بود. اشیاء جدید دیگر نمایانگر طول‌های فیزیکی نخواهند بود. در اینجا، اعداد به انتزاعیاتی مبدل می‌شوند، طول‌های جهت‌دارِ انتزاعی، که اکنون هر یک باید با علامتی همراه شوند که جهت کمیت انتزاعی‌شان را نشان دهد.

در فرآیند توصیف‌شده، اشیاء جدید ریاضی از طریق مفهوم‌پردازی مجدد اشیاء موجود، و در پاسخ به یک نیاز ریاضیاتی که دانش‌آموزان در حال حاضر ارزش آن را درک می‌کنند، در کلاس درس تولید می‌شوند. سپس دانش‌آموزان باید یک واقعیت ریاضیاتی جدید، یعنی یک عمل گفتمانی جدید، را بپذیرند. این امر گویای آن است که اپیزودهای توسعهٔ فراگیر در ریاضیات باید بخشی از مفهوم‌پردازی ریاضیات مدرسه‌ای باشند، زیرا همین اپیزودها هستند که خلق اشیاء جدید ریاضی را توجیه کرده و به آن معنا می‌بخشند. یک چارچوب برنامه‌درسی که توسط استدلال‌های ریاضی هر دو سطح شیء و تحولات فراگیر هدایت شود، به معلمان و دانش‌آموزان اجازه می‌دهد تا هم برساختن ریاضیات را از فهم متعارف دانش‌آموزان آغاز کنند، و هم با موفقیت و انسجام به ریاضیاتی دست یابند که متصل، درک‌شده و مدرن است.

۷. یادداشت‌های پایانی

در این مقاله، تنش‌هایی را به تصویر می‌کشیم که طراحان کتاب‌های درسی ریاضی در مواجهه با الزامات برنامه‌درسی و تأثیرات ناشی از اصلاحات آموزشی با آن‌ها دست‌به‌گریبان‌اند. ما نمونه‌ای تجربی از یک روند برنامه‌درسی ارائه کرده‌ایم که چنین تنش‌هایی را پدید می‌آورد و مقالهٔ حاضر را به‌عنوان گواهی بر ماندگاری و نامرئی بودن پیامدهای جنبش «ریاضیات جدید» در برنامه‌های درسی کنونی جایابی کرده‌ایم.

استدلال ما این است که تحقق توصیه‌های معطوف به اصلاحات آموزشی، مستلزم برنامه‌درسی‌ای است که در آن، محتوای ریاضی از منظر یادگیرنده با هدف دستیابی به انسجام سازمان‌دهی شده باشد. این امر قویاً ایجاب می‌کند که ریاضیات مقطع ابتدایی، به‌جای آنکه مستقیماً بر انتزاع ریاضیاتی متکی باشد، بر پایهٔ درک شهودی و فهم متعارف استوار گردد. با استناد به پیشینهٔ پژوهش، استدلال کرده‌ایم که، برخلاف آن رویکرد برنامه‌درسی که شمارش را یگانه خاستگاه مفهوم عدد می‌داند، ریاضی‌سازی کمیت‌های پیوسته می‌تواند بسط و توسعهٔ مفهوم عدد را به‌نحوی منسجم برای یادگیرنده سازمان‌دهی کند [۲، ۹].

همچنین روشن ساخته‌ایم که رویکرد پیشنهادی برای دستیابی به انسجام در مقطع ابتدایی، می‌تواند بر بنیان ریاضیات کلاسیک استوار شود، اما نمی‌توان آن را بر مبنای نظریهٔ ریاضی مدرن بنا کرد. چرخش به‌سوی ریاضیات مدرن، فضای آموزشی‌ای را خلق کرد

که در آن، شالوده‌های «ریاضیات ریاضی‌دانان» دیگر نمی‌توانست پایه‌هایی مناسب برای ریاضیات مدرسه‌ای فراهم آورد؛ امری که پیش‌تر همواره امکان‌پذیر بود. درک‌پذیر است که طراحان برنامه‌درسی در فاصله گرفتن از ریاضیات آکادمیک به‌عنوان خاستگاه معانی و تعاریف برای محیط مدرسه، محتاط و مردد باشند. اما با تداوم ابتنای مفهومی برنامه‌های درسی ابتدایی بر نظریه‌های ریاضیات آکادمیک، توسعهٔ منابع آموزشی هم‌راستا با توصیه‌های اصلاحات آموزشی، همچنان به‌طور نامعقولی غامض و چالش‌برانگیز باقی خواهد ماند. پیشنهادهای مستخرج از پیشینهٔ پژوهش که در این مقاله برجسته ساختیم، جهت‌گیری‌های اولیه‌ای را برای تحقیق و توسعه پیرامون یک پایه‌ریزی برنامه‌درسی حامی آموزش، برای ریاضیات مدرسه‌ای فراهم می‌آورند.

سپاس‌گزاری

از سرکار خانم مریم مسعودی آرانی و دیگر داور محترم، به‌پاس دقت علمی، راهنمایی‌های سازنده، و زمانی که صرف بررسی دقیق این ترجمه نمودند، صمیمانه سپاس‌گزارم. همچنین از جناب آقای دکتر بهروز مشایخی‌فرد، سردبیر گرانقدر مجله، به‌خاطر اعتماد و فراهم آوردن زمینهٔ همکاری، سپاسگزاری می‌کنم.

پیوست الف

نمونه‌هایی از بخش‌های مختلف برنامه‌های درسی استرالیا و مکزیک که تحلیل شدند.

نمونهٔ ۱. برنامه درسی استرالیا: ریاضیات. بخش‌های کامل «توصیف پایهٔ تحصیلی» و «استاندارد پیشرفت» برای مقطع آمادگی. مقطع آمادگی

توصیف پایهٔ تحصیلی
در مقطع آمادگی، یادگیری ریاضیات بر مبنای «چارچوب یادگیری سال‌های اولیه» و یادگیری‌ها و تجربیات پیشین هر دانش‌آموز بنا می‌شود. دانش‌آموزان در طیف وسیعی از رویکردهای یادگیری و انجام فعالیت‌های ریاضی مشارکت می‌کنند که از طریق ایجاد ارتباط، استدلال، حل مسئله و تمرین، به توسعهٔ درک و تسلط آن‌ها در مفاهیم، مهارت‌ها، رویه‌ها و فرایندها می‌انجامد. تبحر در ریاضیات، دانش‌آموزان را قادر می‌سازد تا با به‌کارگیری راهبردهای ریاضی برای اتخاذ تصمیمات آگاهانه و حل کارآمد مسائل، به موقعیت‌های آشنا و ناآشنا پاسخ دهند. دانش‌آموزان تبحر و گرایش‌های مثبت نسبت به ریاضیات و کاربردهای آن را از طریق فعالیت‌های زیر بیش از پیش توسعه می‌دهند: – کاوش در موقعیت‌هایی که برانگیخته از حس کنجکاوی است، با استفاده از مواد ملموس و مجازی برای بازنمایی، مرتب‌سازی، کمیت‌سنجی، مقایسه و حل مسائل روزمره. – جست‌وجو و ایجاد پیوند میان نام اعداد، نمادهای عددی و کمیت‌ها، و مقایسهٔ کمیت‌ها و اشکال با استفاده از استدلال ریاضی مقدماتی در تجربیات یادگیری فعال. – بخشیدن معنای ریاضیاتی به‌کاربرد اصطلاحات و زبان آشنا، در زمان طرح پرسش و پاسخ‌گویی به آن‌ها، و نیز توضیحِ تفکر و استدلال خود. – ایجاد اعتماد به‌نفس و خودمختاری در توانایی اتخاذ و توجیه تصمیمات ریاضی بر مبنای کمیت‌سنجی و مقایسه‌های مستقیم. – یادگیری تشخیص تکرار در توالی الگوها و به‌کارگیری آن برای ساخت خلاقانهٔ الگوهای تکرارشونده در بافتارهای گوناگون. – پرورش حس تشابه، تفاوت و تغییر در حین مشارکت در فعالیت‌های مبتنی بر بازی.

استاندارد پیشرفت
تا پایان مقطع آمادگی، دانش‌آموزان میان نام اعداد، نمادهای عددی و جایگاهشان در دنبالهٔ اعداد صفر تا حداقل ۲۰ ارتباط برقرار می‌کنند. آن‌ها برای کمیت‌سنجی مجموعه‌ها، از راهبردهای شمارش و درک آنی تعداد استفاده می‌کنند. دانش‌آموزان اندازهٔ مجموعه‌ها را تا حداقل ۲۰ عضو مقایسه می‌کنند. آن‌ها مجموعه‌های تا سقف ۱۰ عضو را به روش‌های مختلف افراز و ترکیب نموده و این فرایندها را با اعداد بازنمایی می‌کنند. دانش‌آموزان موقعیت‌های عملی شامل کمیت‌سنجی، تسهیم برابر، افزودن و کاستن از مجموعه‌ها را تا سقف حداقل ۱۰ عضو بازنمایی می‌کنند. آن‌ها الگوهای تکرارشونده را نسخه‌برداری کرده و ادامه می‌دهند. دانش‌آموزان ویژگی‌های جرم، ظرفیت، طول و بازهٔ زمانی را شناسایی کرده و از راهبردهای مقایسهٔ مستقیم برای مقایسهٔ اشیاء و رویدادها بهره می‌گیرند. آن‌ها رویدادهای آشنا را با زمان وقوعشان در طول روز مرتبط ساخته و توالی می‌بخشند. دانش‌آموزان اشکال آشنا را نام‌گذاری، خلق و مرتب‌سازی کرده و برای این کار استدلال خود را ارائه می‌دهند. آن‌ها موقعیت و مکان خود و اشیاء را نسبت به سایر اشیاء و افراد درون یک فضای آشنا توصیف می‌کنند. دانش‌آموزان در پاسخ به پرسش‌های مطرح‌شده در بافتارهای آشنا، داده‌ها را گردآوری، مرتب‌سازی و مقایسه می‌کنند.

نمونهٔ ۲. برنامه درسی استرالیا: ریاضیات. بخش‌های کامل «توصیف محتوایی» و «بسط‌های محتوایی» برای حوزهٔ موضوعی اعداد در پایه اول.

حوزهٔ موضوعی: اعداد	پایهٔ اول
توصیف محتوایی *(دانش‌آموزان می‌آموزند که:)*	**بسط‌های محتوایی** *(این امر ممکن است شامل فعالیت‌های زیر برای دانش‌آموزان باشد:)*

تشخیص، بازنمایی و مرتب‌سازی اعداد تا حداقل ۱۲۰، با استفاده از مواد ملموس و مجازی، نمادهای عددی، محورهای اعداد و جداول. AC9M1NO1	– خواندن، نوشتن و نام‌گذاری نمادهای عددی و مرتب‌سازی اعداد دورقمی از صفر تا حداقل ۱۲۰، با استفاده از الگوهای موجود در سیستم اعداد طبیعی، از جمله اعدادی که از نظر ظاهری و آوایی مشابه یکدیگرند؛ مانند ۱۶، ۶۰، ۶۱ و ۶۶. – استفاده از نوارهای عددی یا قرار دادن مجموعه‌ای از کارت‌های شماره‌گذاری‌شده در ترتیب و موقعیت نسبی صحیح، از طریق الصاق آن‌ها بر روی یک محور اعداد خالی. – استفاده از جداول صدتایی برای ایجاد درک و تسلط نسبت به اعداد؛ به‌عنوان مثال، ساخت مشارکتی یک جدول صدتایی با استفاده از کارت‌های شماره‌گذاری‌شده از صفر تا ۹۹؛ استفاده از کدگذاری رنگی برای شمارش ده‌تایی‌ها در یک جدول صدتایی، به‌نحوی که از یک رنگ برای نشان دادن تعداد ده‌تایی‌ها و از رنگی دیگر برای نشان دادن تعداد یکان‌ها استفاده شود. – تشخیص اینکه اعداد در تمام زبان‌ها و فرهنگ‌ها به‌کار می‌روند، اما ممکن است به شکل‌های متفاوتی در قالب کلمات و نمادها بازنمایی شوند؛ به‌عنوان مثال، از طریق اعداد کانجی (Kanji) در زبان ژاپنی و نویسه‌ها در زبان چینی، و درک اینکه سیستم‌های عددنویسی جایگزینی نیز وجود دارند؛ به‌عنوان مثال، استفاده از نویسه‌های خاص برای ۱۰، ۱۰۰ و سایر مضارب ۱۰ در سیستم‌های عددنویسی ژاپنی و چینی.
افراز اعداد یک‌رقمی و دورقمی به روش‌های مختلف با استفاده از مواد ملموس و مجازی، از جمله افراز اعداد دورقمی به ده‌تایی‌ها و یکان‌ها. AC9M1NO2	– ایجاد دانش و درک نسبت به حقایق جزء–جزء–کل تا عدد ۱۰، با استفاده از مواد ملموس و مجازی؛ به‌عنوان مثال، استفاده از قاب‌های ده‌تایی مجازی از طریق یک برنامه کاربردی دیجیتال یا وب‌سایت برای شناسایی جفت اعدادی که با هم ترکیب شده و عدد ۱۰ را می‌سازند. – استفاده از مواد ملموس و مجازی برای افراز اعداد به‌دسته‌های ده‌تایی و یکانی؛ به‌عنوان مثال، درک عدد ۳۵ به‌صورت ۳ ده‌تایی و ۵ یکان، یا به‌صورت ۲ ده‌تایی و ۱۵ یکان. – استفاده از استدلال جزء–جزء–کل و مواد ملموس یا مجازی برای بازنمایی عدد ۲۴، سپس افراز ۲۴ به روش‌های مختلف و ثبت این افرازها با استفاده از اعداد؛ به‌عنوان مثال، درک اینکه ۱۰، ۱۰ و ۴ برای ساختن عدد ۲۴ ترکیب می‌شوند، یا ۱۰ و ۱۴ برای ساختن ۲۴ با یکدیگر ترکیب می‌شوند.

کمیت‌سنجی مجموعه‌هایی از اشیاء تا حداقل ۱۲۰ عضو، از طریق افراز مجموعه‌ها به گروه‌های برابر، با استفاده از دانش عددی و شمارش پرشی. AC9M1NO3	– شمارش یک مجموعهٔ بزرگ از اشیاء با استفاده از گروه‌های پنج‌تایی یا ده‌تایی و به‌کارگیری شمارش پرشی برای محاسبهٔ تعداد آن‌ها؛ ثبت مقدار به‌دست‌آمده و ایجاد پیوند میان ارقامِ عدد حاصل با مواد دسته‌بندی‌شده در زمان استفاده از گروه‌های ده‌تایی. – شمارش مجموعه‌هایی از اشیاء نظیر مدادها یا تصاویر پرندگان روی یک درخت، از طریق گروه‌بندی آن‌ها در دسته‌های ده‌تایی برای تسهیل شمارشی کارآمد، و ایجاد پیوند میان ارقامِ موجود در عدد با گروه‌های ده‌تایی و یکانی. – شمارش مجموعهٔ بزرگی از سکه‌های ۱ دلاری استرالیا با چیدن آن‌ها در دسته‌های ۱۰تایی، شمارش پرشی ده‌تایی و لحاظ کردن سکه‌های باقی‌مانده (یکان‌ها) برای تعیین ارزش کل.
جمع و تفریق اعداد تا سقف ۲۰، با استفاده از مواد ملموس و مجازی، دانش جزء–جزء–کل تا عدد ۱۰، و بهره‌گیری از راهبردهای محاسباتی متنوع. AC9M1NO4	– استفاده از نقاشی، مواد ملموس و مجازی، و ترکیب‌های عددی تا سقف ۱۰، برای جمع و تفریق مجموعه‌های تا سقف ۲۰ عضو. – جمع و تفریق اعداد تا سقف ۲۰، با استفاده از بازنمایی‌ها و راهبردهای متنوع نظیر شمارش رو به جلو، شمارش رو به عقب، افراز و دانش جزء–جزء–کل برای اعداد تا سقف ۱۰؛ به‌عنوان مثال، استفاده از افراز و ترکیب در رابطهٔ: $12 = 2 + 10 = 2 + 3 + 7 = 5 + 7$ – توسعه و به‌کارگیری راهبردهایی برای جمع و تفریق یک‌رقمی بر پایهٔ روابط جزء–جزء–کل برای هر یک از اعداد تا سقف ۱۰، و درک آنی تعداد با استفاده از مواد ملموس و مجازی؛ به‌عنوان مثال، درک اینکه ۸ و ۶ معادل است با ۸ و ۲ و ۴. – بازنمایی مسائل داستانی دربرگیرندهٔ جمع و تفریق اعداد تا سقف ۲۰ با استفاده از یک تخته‌تفکر، تشخیص و کاربرد نمادهای $+$ و $-$ و علامت مساوی برای بازنمایی عملگرهای جمع و تفریق؛ نمایش و تبیین ارتباطات میان مواد استفاده‌شده به کمک زبان «به‌علاوه» و «منها»، و اعداد موجود در مسئلهٔ داستانی. – خلق و اجرای داستان‌های جمع و تفریق که از طریق رقص‌های بومیان استرالیا روایت می‌شوند.

استفاده از مدل‌سازی ریاضی برای حل مسائل عملی دربرگیرندهٔ موقعیت‌های جمعی، از جمله تراکنش‌های مالی ساده؛ بازنمایی موقعیت‌ها با نمودارها، مواد ملموس و مجازی، و استفاده از راهبردهای محاسباتی برای حل مسئله. AC9M1NO5	– مدل‌سازی مسائل شامل جمع و تفریق ارائه‌شده در داستان‌ها، با استفاده از یک تخته‌تفکر برای بازنمایی مسئله، حل آن با استفاده از مواد ملموس، و تبیین ارتباطات میان مواد استفاده‌شده، نمودار تخته‌تفکر، و اعداد درون داستان. – مدل‌سازی مسائل مالی ساده شامل جمع و تفریق با استفاده از مبالغ کامل دلاری (اعداد صحیح)؛ به‌عنوان مثال، راه‌اندازی یک فروشگاه و اجرای نقش برای مسائل عملی خرید و فروش کالا، استفاده از جمع و تفریق با پول‌های بازی و قیمت‌هایی با مبالغ کامل دلاری؛ حل مسئلهٔ «من ۱۴ دلار داشتم و برای تولدم ۱۵ دلار هدیه گرفتم» با استفاده از عمل جمع برای یافتن پاسخ. – مدل‌سازی انواع متنوعی از موقعیت‌های جمعی برای حل مسائل عملی؛ به‌عنوان مثال، پیگیری تعداد افراد حاضر در یک اتوبوس هنگام توقف برای سوار و پیاده کردن مسافران، یا تعداد افرادی که وارد یک آسانسور می‌شوند.
استفاده از مدل‌سازی ریاضی برای حل مسائل عملی دربرگیرندهٔ تسهیم برابر و گروه‌بندی؛ بازنمایی موقعیت‌ها با نمودارها، مواد ملموس و مجازی، و استفاده از راهبردهای محاسباتی برای حل مسئله. AC9M1NO6	– مدل‌سازی مسائلِ مربوط به موقعیت‌های مکرر گروه‌های برابر، مانند «برای ۳ ماشین به چند چرخ نیاز است؟»، با استفاده از مواد آموزشی و کشیدن یک نقاشی برای نشان دادن روند کار، و ثبت نتایج به کمک یک عدد. – مدل‌سازی مسائل عملی مربوط به موقعیت‌های تسهیم برابر؛ به‌عنوان مثال، تقسیم یک دست دومینو میان ۲ بازیکن در یک بازی، و سپس استفاده از شمارش یا درک آنی تعداد برای اطمینان از اینکه هر دو نفر تعداد برابری مهره در اختیار دارند. – مدل‌سازی مسائل مالی مربوط به تسهیم برابر؛ به‌عنوان مثال، مرتب‌سازی سکه‌های یک صندوق پول بر اساس ارزش اسمی آن‌ها، تقسیم برابر سکه‌ها میان ۴ نفر، و استفاده از شمارش یا درک آنی تعداد برای اطمینان از اینکه مبالغ برابری از هر ارزش اسمی به هر فرد تخصیص یافته است.

نمونهٔ ۳. برنامه درسی مکزیک: ریاضیات. نمونه‌هایی از متن بخش‌های: اهداف آموزش ریاضیات، رویکرد آموزشی در حل مسئله، دستورالعمل‌های تدریس، پیشنهادهای ارزشیابی، و توجیه کلی و اهداف دنبال‌شده در محورهای موضوعی.

اهداف آموزش ریاضیات
علاوه بر کسب پیکره‌ای از دانش دارای ساختار منطقی، فعالیت ریاضی بر تقویت فرایندهایی تمرکز دارد که منجر به توسعهٔ سایر توانمندی‌های شناختی نظیر طبقه‌بندی، تحلیل، استنتاج، تعمیم و انتزاع می‌شود؛ همچنین تقویت تفکر منطقی، استدلال استقرایی، استدلال قیاسی و استدلال قیاسی–تمثیلی از دیگر اهداف آن است. (ص. ۲۹۷)
حل مسئله

در سراسر این فرایند، نقش معلم بنیادی است، چرا که او مسئول انتخاب و انطباق مسائل پیشنهادی برای دانش‌آموزان است. معلم کسی است که آن‌ها را برای کار کلاسی سازماندهی می‌کند، از طریق پرسشگری و ارائهٔ مثال‌های نقض، تفکر دانش‌آموزان پیرامون فرضیاتشان را برمی‌انگیزد و آن‌ها را به جست‌وجوی تبیین‌ها یا رویه‌های جدید تشویق می‌کند. به‌علاوه، معلم باید بحث پیرامون ایده‌هایی که دانش‌آموزان در مواجهه با موقعیت‌های مسئله‌ساز می‌پرورانند را ترویج و هماهنگ کند تا آن‌ها بتوانند استدلال نهفته در پس پاسخ‌های خود را تبیین کرده و در مورد یادگیری خود تأمل کنند. (ص. ۳۰۲)
دستورالعمل‌های تدریس
یاری رساندن به دانش‌آموزان برای یادگیری ریاضیات ممکن است برای بسیاری از معلمان که به نقش سنتی خود به‌عنوان «انتقال‌دهندهٔ اطلاعات» خو گرفته‌اند، ناآشنا و دشوار به نظر برسد. با این حال، تلاش در این مسیر ضروری است، زیرا راه را برای تغییری بنیادین در فضای کلاس درس هموار می‌سازد. (ص. ۳۰۶)
پیشنهادهای ارزشیابی
ارزشیابی دارای رویکردی تکوینی است، زیرا بر فرایندهای یادگیری متمرکز بوده و پیشرفت دانش‌آموزان را پایش می‌کند. به‌عنوان معلم، اهمیت دارد تأکید کنیم که دانش‌آموزان باید مسئولیت تأمل بر پیشرفت خود را بپذیرند و ما به‌عنوان تسهیلگر، آن‌ها را در انتخاب راهبردهای بهبود یا تقویت یادگیری یاری دهیم. در این راستا، خطاهای دانش‌آموزان – تا زمانی که تحلیل و به بحث گذاشته شوند و به‌عنوان مبنایی برای هدایت راهبردهای یادگیری قرار گیرند – فرصتی برای یادگیری، هم برای دانش‌آموزان و هم برای معلم، محسوب می‌شوند. (ص. ۳۰۸)
توجیه کلی و اهداف دنبال‌شده در محورهای موضوعی
به‌طور کلی، حساب و جبر به مثابه ابزارهایی برای مدل‌سازی موقعیت‌های مسئله‌ساز (اعم از ریاضی و غیرریاضی) و همچنین حل مسائلی که نیازمند شناسایی، نمادپردازی و دست‌ورزی متغیرها هستند، مفهوم‌سازی می‌شوند. (ص. ۳۰۴)

نمونهٔ ۴. برنامه درسی مکزیک: ریاضیات. متن کامل محور موضوعی «عدد، جبر و تغییر» برای دورهٔ پیش‌دبستانی و پایهٔ اول ابتدایی. *(توضیح: دورهٔ پیش‌دبستانی در مکزیک ۳ ساله است که سال سوم آن معادل «مقطع آمادگی» در نظام آموزشی استرالیا محسوب می‌شود.)*

ریاضیات دورهٔ پیش‌دبستانی

محور موضوعی	مبحث	پیامدهای یادگیری مورد انتظار
عدد، جبر و تغییر	**عدد**	– حل مسائل از طریق راهبردهای شمارشی و کنش‌های مستقیم بر روی مجموعه‌ها. – شمارش مجموعه‌هایی با حداکثر ۲۰ عضو. – ارتباط و بازنمایی اعداد ۱ تا ۱۰ به‌صورت شفاهی و کتبی در موقعیت‌های متنوع، از جمله با استفاده از شیوه‌های متعارف. – مقایسه، مطابقت‌دهی و طبقه‌بندی مجموعه‌ها بر اساس تعداد عناصر آن‌ها. – برقراری پیوند میان تعداد عناصر یک مجموعه با دنباله عددی مکتوب (از ۱ تا ۳۰). – شناسایی برخی روابط هم‌ارزی میان سکه‌های ۱، ۲، ۵ و ۱۰ واحدی در موقعیت‌های واقعی یا شبیه‌سازی‌شده خرید و فروش.

ریاضیات دورهٔ ابتدایی: پایهٔ اول

محور موضوعی	مبحث	مباحث و پیامدهای یادگیری موردانتظار
عدد، جبر و تغییر	**عدد**	– خواندن، نوشتن و مرتب‌سازی اعداد طبیعی تا ۱۰۰.
عدد، جبر و تغییر	**مبحث جمع و تفریق**	– حل مسائل جمع و تفریق با اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰. – محاسبات ذهنی جمع و تفریق برای اعداد یک‌رقمی و مضارب ۱۰. – خواندن، نوشتن و مرتب‌سازی اعداد طبیعی تا ۱۰۰.

پیوست ب

نمونه‌هایی از گزاره‌های استخراج‌شده از برنامه‌های درسی استرالیا و مکزیک و دسته‌بندی‌های کدگذاری‌شده مرتبط با آن (مرتبط با جدول ۱)

کد	توصیف	نوع نمونه	گزاره‌های کدگذاری‌شده از برنامه درسی استرالیا (AC:M)	گزاره‌های کدگذاری‌شده از برنامه درسی مکزیک (MC:M)
عدد شماری	ارجاعات صریح و مستقیم به مفهوم ترتیب، عمل شمارش و کمیت گسسته.	نام‌بردن از اشیاء مجزا به‌منظور شمارش یا به‌کارگیری در فعالیت‌ها (مانند مهره‌ها، افراد).	در بخش‌های مروری سالانه: دانش‌آموزان میان نام اعداد، نمادهای عددی و جایگاه آن‌ها در دنبالهٔ اعداد از صفر تا دست‌کم ۲۰ ارتباط برقرار می‌کنند (مقطع آمادگی). در توصیفات و بسط‌های محتوایی: خواندن و نوشتن نمادهای عددی، بیان و مرتب‌سازی اعداد دو، سه و چهار رقمی با استفاده از الگوهایی نظیر ۸۰۸، ۸۸۰، ۸۱۸ و ۸۸۱ (پایهٔ دوم). شناسایی دنباله‌های الگویی افزایشی، مانند تعداد پنجره‌های واگن‌های قطار یا چرخ‌های خودروها (پایهٔ دوم، AC9M2A01).	حل مسائل از طریق شمارش و انجام کنش بر روی مجموعه‌ها (پیش‌دبستانی). مقایسه، تناظریابی و طبقه‌بندی مجموعه‌ها بر اساس تعداد اعضا (پیش‌دبستانی). بازنمایی، خواندن، نوشتن و مرتب‌سازی اعداد طبیعی تا پنج رقم (پایهٔ چهارم).

عدد شماری تکمیلی	تمرکز بر فرایند شمارش به‌گونه‌ای که بتواند (تا حدی یا به‌طور غیرمستقیم) درک کمّی مجموعه‌های گسسته را تسهیل کند.	جنبه‌های فضایی چیدمان‌ها در فعالیت‌های درک آنی تعداد، چارچوب‌های ده‌تایی و استفاده از تقویم برای ثبت زمان.	در بخش‌های مروری سالانه: به‌کارگیری راهبردهای درک آنی تعداد و شمارش به‌منظور کمیت‌سنجی مجموعه‌ها و مقایسهٔ اندازهٔ آن‌ها تا دست‌کم ۲۰ (مقطع آمادگی). در توصیفات و بسط‌های محتوایی: گردآوری حجم زیادی از مواد بازیافتی و دسته‌بندی آن‌ها در دسته‌های یکی، ده‌تایی و صدتایی برای بازنمایی اعداد دو و سه رقمی (پایهٔ دوم، AC9M2N01).	موردی یافت نشد.
بالقوه پیوسته	ظرفیت و پتانسیل تلقی اعداد به‌عنوان بازنمایی تفاوت‌های کمّی در محیط پیرامون (مبتنی بر مفهوم اندازه‌گیری کمیت).	گزاره‌ها یا ابزارهایی که در بستر آن‌ها امکان تفسیر کمیت پیوسته وجود دارد (نظیر محور اعداد، حتی اگر برای بازنمایی تراکم کمیت به‌کار نرود).	در بخش‌های مروری سالانه: برقراری پیوند میان نام اعداد، نمادهای عددی و مقادیر، و مقایسهٔ کمیت‌ها و اشکال با بهره‌گیری از استدلال ریاضی مقدماتی (مقطع آمادگی). در توصیفات و بسط‌های محتوایی: استفاده از نوار اعداد یا اتصال کارت‌های شماره‌دار با گیره روی محور اعداد خالی در جایگاه نسبی صحیح (پایهٔ اول، AC9M1N01). اندازه‌گیری فاصلهٔ میان دو مکان از طریق گام‌برداری و تبیین این‌که چرا گام‌های افراد مختلف به نتایج متفاوتی می‌انجامد (پایهٔ اول، AC9M1M02). تقسیم صفحهٔ ساعت به نیمه‌ها و ربع‌ها، و پیونددادن آن‌ها با عبارت‌های «یک ربع گذشته از...» و «یک ربع مانده به...» (پایهٔ دوم، AC9M2M04).	موردی یافت نشد.

پیوسته	ارجاعات صریح و مستقیم به کمیت پیوسته در پیوند با مفهوم عدد.	کمیت‌سنجی مقایسه‌های مبتنی بر اندازهٔ نسبی.	در توصیفات و بسط‌های محتوایی: تخمین ارتفاع یک درخت به‌صورت «تقریباً ۳ برابر قد یک دوست»، و تخمین گنجایش یک آکواریوم با استفاده از یک پاکت شیر یک لیتری (پایهٔ سوم، AC9M3M01). ساخت نوار اندازه‌گیری با استفاده از واحدهای متری استاندارد به‌منظور اندازه‌گیری و مقایسهٔ دور تنهٔ درخت، و توضیح این نکته که خطوط روی خطکش نشان‌دهندهٔ آغاز و پایان هر واحد اندازه‌گیری هستند (پایهٔ سوم، AC9M3M02).	موردی یافت نشد.
سواد اندازه‌گیری	سنجش و اندازه‌گیری بدون برقراری پیوند با مفهوم‌سازی عدد.	ویژگی‌های قابل اندازه‌گیری، واحدهای اندازه‌گیری استاندارد، «واحدهای یکنواخت».	در بخش‌های مروری سالانه: استفاده از واحدهای یکنواخت برای اندازه‌گیری، مقایسه و بحث دربارهٔ ویژگی‌های اشکال، احجام و مدت‌زمان رویدادها (پایهٔ دوم). به‌کارگیری واحدهای متری آشنا در هنگام تخمین، مقایسه و اندازه‌گیری ویژگی‌ها (پایهٔ سوم). در توصیفات و بسط‌های محتوایی: ساخت یک ساعت عقربه‌ای با استفاده از بشقاب کاغذی و توضیح واحدهای زمانی به‌کاررفته (پایهٔ دوم، AC9M2M04). اندازه‌گیری و مقایسهٔ گنجایش بر حسب میلی‌لیتر و لیتر با استفاده از ظروف شیر ۶۰۰ میلی‌لیتری، ۱، ۲ و ۳ لیتری (پایهٔ سوم، AC9M3M02).	تخمین، مقایسه و مرتب‌سازی طول‌ها، فاصله‌ها، گنجایش‌ها و وزن‌ها با استفاده از واحدهای قراردادی: میلی‌متر، سانتی‌متر، میلی‌لیتر و گرم (پایهٔ چهارم).

مراجع

1. Australian Curriculum Assessment and Reporting Authority, *Australian curriculum: Mathematics (Version 9), Years F–6*, https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/learning-areas/mathematics/year-1_foundation-year_year-2_year-3_year-4_year-5.
2. H. Bass, *Quantities, numbers, number names and the real number line*, in M. G. Bartolini Bussi and X. H. Sun (Eds.), *Building the foundation: Whole numbers in the primary grades*, Springer, 2018, 465–475.

3. E. Bezout, *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie par Bezout, avec des notes et des tables de logarithms par A. A. L. Reynaud* (9th ed.), Gourcier, Libraire pour les sciences, 1821.
4. J. Boaler, *Mathematical mindsets*, Jossey-Bass, 2016.
5. M. Borba and O. Skovsmose, *The ideology of certainty in mathematics education*, For Learn. Math. **17** (1997), no. 3, 17–23.
6. C. Chambris, *The influence of theoretical mathematical foundations on teaching and learning: A case study of whole numbers in elementary school*, Educ. Stud. Math. **97** (2018), 185–207.
7. C. Chambris and J. Visnovska, *On the history of units in French elementary school arithmetic: The case of proportionality*, Hist. Math. **59** (2022), 99–118.
8. M. A. Clements, C. Keitel-Kreidt, A. J. Bishop, J. Kilpatrick, and F. K.-S. Leung, *From the few to the many: Historical perspectives on who should learn mathematics*, in M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, and F. K.-S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education*, Springer, 2012, 7–40.
9. J. L. Cortina, J. Visnovska, and C. Zuniga, *Unit fractions in the context of proportionality: Supporting students' reasoning about the inverse order relationship*, Math. Educ. Res. J. **26** (2014), no. 1, 79–99.
10. R. Courant and H. Robbins, *What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods*, Oxford University, 1996.
11. J. D. Davis, A. R. McDuffie, C. Drake, and A. L. Seiwell, *Teachers' perceptions of the official curriculum: Problem solving and rigor*, Int. J. Educ. Res. **93** (2019), 91–100.
12. V. V. Davydov, *An experiment in introducing elements of algebra in elementary school*, Sov. Educ. **5** (1962), no. 1, 27–37.
13. V. V. Davydov, *The psychological characteristics of the "prenumerical" period of mathematical instruction*, in L. Steffe (Ed.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics (vol. 7)*, School Mathematics Study Group, 1975, 109–205.
14. V. V. Davydov, *Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula*, in *Soviet studies in mathematics education (vol. 2)*, National Council of Teachers of Mathematics, 1990.
15. B. Dougherty, *Measure up: A quantitative view of early algebra*, in J. J. Kaput, D. W. Carraher, and M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*, Lawrence Erlbaum, 2008.
16. J. Franklin, *Aristotelian realism*, in A. Irwine (Ed.), *The philosophy of mathematics*, Elsevier, 2009, 103–156.
17. H. Freudenthal, *Geometry between the devil and the deep sea*, Educ. Stud. Math. **3** (1971), 413–435.

18. H. Freudenthal, *New math or new education?*, Econ. Fin. Prospects **9** (1979), no. 3, 321–331.
19. H. Freudenthal, *Revisiting mathematics education: China lectures*, Kluwer, 2002.
20. F. Furinghetti, *Snapshots from the 1960's: Tensions and synergies in the emerging of new trends in mathematics education*, Mont. Math. Enthusiast **3** (2007), 57–70.
21. J. Kilpatrick, *Cognitive theory and the SMSG program*, J. Res. Sci. Teach. **2** (1964), 247–251.
22. J. Kilpatrick, *The new math as an international phenomenon*, ZDM Math. Educ. **44** (2012), no. 4, 563–571.
23. M. Kline, *The ancients versus the moderns, a new battle of the books*, Math. Teach. **51** (1958), no. 6, 418–427.
24. A. N. Kolmogorov, *Preface to Russian translation of H. Lebesgue, The measurement of quantities*, Uchpedgiz, 1938.
25. H. Lortie-Forgues, J. Tian, and R. S. Siegler, *Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult?*, Dev. Rev. **38** (2015), 201–221.
26. L. Ma, *A critique of the structure of U.S. elementary school mathematics*, Not. Amer. Math. Soc. **60** (2013), no. 10, 1282–1296.
27. K. Maass, P. Cobb, K. Krainer, and D. Potari, *Different ways to implement innovative teaching approaches at scale*, Educ. Stud. Math. **102** (2019), 303–318.
28. G. I. Minskaya, *Developing the concept of number by means of the relationship of quantities*, in L. P. Steffe (Ed.), *Children's capacity for learning mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, 1975, 207–261.
29. National Council of Teachers of Mathematics, *Principles and standards for school mathematics*, 1989.
30. R. Neyret, *Contraintes et détermination des processus de formation des enseignants: Nombres décimaux, rationnels et reels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres*, PhD Thesis, Université Joseph Fourier Grenoble, 1995.
31. M. Otte, *Mathematical history, philosophy and education*, Educ. Stud. Math. **66** (2007), 243–255.
32. J. Park, B. Güçler, and R. McCrory, *Teaching prospective teachers about fractions: Historical and pedagogical perspectives*, Educ. Stud. Math. **82** (2013), 455–479.
33. B. Pepin and L. Haggarty, *Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: A way to understand teaching and learning cultures*, ZDM Math. Educ. **33** (2001), no. 5, 158–175.
34. L. Radford, *Davydov's concept of the concept and its dialectical materialist background*, Educ. Stud. Math. **106** (2021), 327–342.

35. J. Remillard, *Considering what we know about the relationship between teachers and curriculum materials*, in J. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann, and G. M. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction*, Routledge, 2009, 85–92.
36. S. Rezat, L. Fan, and B. Pepin, *Mathematics textbooks and curriculum resources as instruments for change*, ZDM Math. Educ. **53** (2021), 1189–1206.
37. J. Schmittau and A. Morris, *The development of algebra in the elementary mathematics curriculum of V.V. Davydov*, Math. Educ. **1** (2004), 60–87.
38. Secretaría de Educación Pública, *Aprendizajes clave para la educación integral: Plan y programas de estudio para la educación básica*, 2017.
39. A. Sfard, *The many faces of mathematics*, in A. Sierpinska and J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity*, Springer, 1998, 491–511.
40. A. Sfard, *Balancing the unbalanceable: The NCTM standards in the light of theories of learning mathematics*, in J. Kilpatrick, W. G. Martin, and D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, 2003, 353–392.
41. A. Sfard, *Learning, commognition and mathematics*, in D. Scott and E. Hargreaves (Eds.), *The Sage handbook of learning*, Sage, 2015, 129–138.
42. R. S. Siegler, *Fractions: Where it all goes wrong*, Sci. Am. (2017), https://www.scientificamerican.com/article/fractionswhere-it-all-goes-wrong/.
43. M. Stephan, J. Bowers, and P. Cobb (Eds.), *Supporting students' development of measuring conceptions: Analyzing students' learning in social context*, J. Res. Math. Educ. Monogr. no. 12, National Council of Teachers of Mathematics, 2003.
44. V. Švecová, M. Balgová, and G. Pavlovičová, *Knowledge of fractions of learners in Slovakia*, Mathematics **10** (2022), 901.
45. R. Thom, *"Modern" mathematics: An educational and philosophic error?*, Amer. Sci. **59** (1971), no. 6, 695–699.
46. H. Wu, *The mis-education of mathematics teachers*, Not. Amer. Math. Soc. **58** (2011), no. 3, 372–384.

Towards Mathematical Sciences
Vol. 6, No. 2, Autumn and Winter 2026, pp. 138–167
DOI. 10.22067/tmsj.2026.98944.1091
Expository Article

به سوی علوم ریاضی

https://tmsj.um.ac.ir

CURRICULUM AND MATHEMATICAL COHERENCE: EXPLORING THE TENSIONS IN TEACHING AND LEARNING NUMBER

SOMAYYE RASHID

Department of Applied Mathematics, PaM.C., Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran
somayyeh.rashid@iau.ir

Abstract. This paper explores the tensions between two influences that currently shape the design of textbooks and other teaching resources. Through a textual analysis of primary school curricula from Australia and Mexico, we document a curricular trend in which number is framed almost exclusively in terms of counting. We explain that this trend works against instructional designs that aim, in line with instructional improvement recommendations, for classroom experiences of mathematical coherence. Drawing on the literature, we show that the analysed texts mirror the curricular decisions made during the New Math movement suggesting that this trend is likely to be common in many national curricula. By reviewing commonalities in examples of curricula shaped by alternative decisions, we highlight the features that enable curricula to support number instruction in which students experience mathematics as an activity characterised by internal coherence.

2020 Mathematics Subject Classification. 97D40, 97C30, 97F50
Keywords. Mathematics textbook design; Design influences; Mathematical coherence; Conceptualisation of number; Primary school mathematics
Date: Rceived 25-05-2026 Revised 07-10-2026 Accepted 11-10-2026 Available Online 5-11-2026
©Ferdowsi University of Mashhad.