دوره ۶، شماره ۲ پاییز و زمستان ۱۴۰۵، صص. ۱۷۹–۱۹۲
DOI.10.22067/tmsj.2026.99222.1093
مقاله علمی–ترویجی
به سوی علوم ریاضی
https://tmsj.um.ac.ir

آیا می‌توان کلاس درس ریاضی را با تاریخ ریاضی هم‌راستا کرد؟

محمد سبزی

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز
sabzi.mohamad@gmail.com

چکیده. یکی از مسائل بنیادین در آموزش ریاضیات پیشرفته، شکاف معرفتی میان ریاضیات در بستر تاریخیِ تولید (قلمرو زایشی)، ریاضیات در قالب ساختارهای صوری و آموزشی (قلمرو بازسازانه)، و ریاضیات در معماری شناختی یادگیرنده (قلمرو بازتابی) است. این مقاله با تکیه بر چارچوب معماری دانش ریاضی، این پرسش محوری را دنبال می‌کند که آیا می‌توان کلاس درس ریاضی را به‌گونه‌ای طراحی کرد که با منطق تحولات تاریخی مفاهیم ریاضی هم‌راستا شود. برای پاسخ به این پرسش، تاریخ شکل‌گیری مفاهیم حد و پیوستگی به‌عنوان نمونه‌ای شاخص از شکست‌ها و بحران‌های معرفتی، بازخوانی می‌شود. سپس استدلال می‌شود که این مفاهیم نه از مسیر شهود مستقیم، بلکه از طریق عبور از ترجمه‌های ناکام، فشرده‌سازی‌های ناپایدار و گذارهای معرفتی تثبیت شده‌اند. سپس، با الهام از این تحلیل تاریخی، یک فضای مثال معماری‌شده برای آموزش حد و پیوستگی طراحی می‌شود که هدف آن بازآفرینی هدایت‌شده این مسیر شناختی در کلاس درس است. استدلال می‌کنیم که تحقق هم‌راستایی معرفتی مستلزم پرورش عاملیت معمارانه در یادگیرنده است؛ یعنی توانایی عمل آگاهانه بر معماری دانش از طریق مکانیسم‌های بنیادین. در نهایت، استدلال می‌کنیم که آموزش ریاضیات، زمانی می‌تواند به توسعه تفکر ریاضی پیشرفته بیانجامد که از انتقال صرف محتوا فراتر برود و بر طراحی تجربه‌های معماری‌شده یادگیری متمرکز شود.

2020 Mathematics Subject Classification. 47A55, 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. معماری دانش ریاضی، هم‌راستایی معرفتی، فضای مثال، بازآفرینی هدایت‌شده، عاملیت معمارانه .
تاریخ: دریافت ۱۴۰۵/۰۳/۱۷ بازنگری ۱۴۰۵/۰۸/۱۸ پذیرش ۱۴۰۵/۰۸/۳۰ انتشار برخط ۱۴۰۵/۰۹/۰۳

نحوه ارجاع به این مقاله: م. سبزی، آیا می‌توان کلاس درس ریاضی را با تاریخ ریاضی هم‌راستا کرد؟، به سوی علوم ریاضی، ۶ (۱۴۰۵)، شماره ۲، ۱۷۹–۱۹۲.

©دانشگاه فردوسی مشهد.

مقدمه

یکی از مسائل بنیادین و حل‌نشده در آموزش ریاضیات پیشرفته، شکاف عمیقی است که بین ساختار رسمی دانش ریاضی و تجربه شناختی یادگیرندگان شکل می‌گیرد. این شکاف به‌ویژه در مفاهیمی چون حد و پیوستگی آشکار می‌شود؛ مفاهیمی که در آموزش رسمی معمولاً به‌صورت تعاریف صوری و ایستا (نظیر تعریف $\varepsilon - \delta$) ارائه می‌شود، اما در تاریخ ریاضیات، محصول قرن‌ها کشمکش، بحران، بازآرایی مفهومی و تغییر معیارهای صدق بوده‌اند. پیامد این ناهم‌زمانی آن است که بسیاری از یادگیرندگان، علی‌رغم توانایی در بازتولید تعاریف و انجام محاسبات، فاقد درکی پایدار و ساختاری از این مفاهیم باقی می‌مانند.

چارچوب معماری دانش ریاضی (MKA)[1] این وضعیت را نه به‌مثابه ضعف فردی یادگیرنده، بلکه به‌عنوان نشانه‌ای از عدم هم‌راستایی معرفتی[2] تفسیر می‌کند [۱]؛ یعنی ناهم‌راستایی‌ای میان سه قلمرو متمایز اما به‌هم‌وابسته: (۱) قلمرو زایشی (ریاضیات در بستر تاریخ و کشف)؛ (۲) قلمرو بازسازانه (ریاضیات در قالب رسمی، آموزشی و اصول‌موضوعه‌ای)؛ و (۳) قلمرو بازتابی (ریاضیات در معماری شناختی یادگیرنده).

در آموزش متعارف، یادگیرنده اغلب به‌طور مستقیم با محصول نهایی قلمرو بازسازانه مواجه می‌شود، بی‌آن‌که در فرایندهای پویایی مشارکت کند که به شکل‌گیری این مفاهیم در قلمرو زایشی انجامیده‌اند. در نتیجه، یادگیری به انطباق صوری با تعریف فروکاسته می‌شود و امکان هم‌نوا شدن معماری شناختی یادگیرنده با منطق ساختاری مفهوم از میان می‌رود.

این مقاله با طرح این پرسش بنیادین آغاز می‌شود: آیا می‌توان کلاس درس ریاضیات را به‌گونه‌ای طراحی کرد که از نظر شناختی با منطق تاریخیِ شکل‌گیری مفاهیم هم‌راستا شود، بی‌آن‌که صرفاً به بازگویی تاریخ ریاضیات فروکاسته شود؟

برای پاسخ به این پرسش، مقاله حاضر از چارچوب MKA بهره می‌گیرد و استدلال می‌کند که هم‌راستایی معرفتی نه از طریق افزودن روایت‌های تاریخی پراکنده، بلکه از راه مهندسی معماری یادگیری ممکن می‌شود؛ معماری‌ای که در آن، فضای مثال، توالی فعالیت‌ها و نقش مداخلات آموزشی به‌گونه‌ای طراحی شود که مکانیسم‌های شناختیِ همانند با تاریخ ریاضیات را در مقیاس ذهنی یادگیرنده فعال سازند. در این چارچوب، مفاهیم حد و پیوستگی به‌عنوان یک مورد بحرانی بررسی می‌شود؛ مفاهیمی که تاریخ آن‌ها سرشار از گذارهای معرفتی، بحران‌های شهودی و بازتعریف معیارهای دقت علمی[3] بوده است.

مبانی نظری

معماری دانش ریاضی و شکاف سه‌قلمرویی. چارچوب معماری دانش ریاضی یادگیری ریاضیات را فرایندی خطی و انباشتی تلقی نمی‌کند، بلکه آن را نتیجه کنش متقابل میان مکانیسم‌های شناختی بنیادینی می‌داند که در بستر تنش میان دو میل معرفتی عمل می‌کنند: میل به گسترش (تعمیم) و میل به انسجام (انتزاع) [۳]. در این چارچوب، دانش ریاضی نه مجموعه‌ای از گزاره‌ها، بلکه یک معماری پویاست که در آن، ابزارها، اشیا و معیارهای صدق به‌تدریج ساخته، بازآرایی و هماهنگ می‌شوند.

این چارچوب چالش اصلی آموزش ریاضی را در وجود شکافی ساختاری میان سه قلمرو می‌بیند:

قلمرو زایشی: جایی‌که مفاهیم ریاضی در پاسخ به مسائل، تناقض‌ها و بحران‌ها شکل می‌گیرد (مانند بحران‌های مفهومی پیرامون حد در حسابان قرن نوزدهم).

قلمرو بازسازانه: جایی‌که این مفاهیم در قالب تعاریف صوری، نظریه‌ها و ساختارهای استاندارد آموزشی تثبیت می‌شود.

قلمرو بازتابی: جایی‌که این مفاهیم در معماری شناختی یادگیرنده بازنمایی، پردازش و معناگذاری می‌شود.

---

[1] Mathematical Knowledge Architecture

[2] Epistemic Alignment

[3] Rigor

وقتی آموزش صرفاً بر قلمرو بازسازانه متمرکز می‌شود، هم‌راستایی معرفتی از دست می‌رود: یادگیرنده با ساختاری مواجه می‌شود که منطق درونی آن برای او ضروری نشده است. از منظر MKA هدف آموزش نه انتقال محصول نهایی، بلکه ایجاد شرایطی است که در آن معماری شناختی یادگیرنده بتواند با منطق زایشی مفهوم هم‌نوا شود.

دیالکتیک تعمیم و انتزاع از طریق یک دستور زبان شناختی متشکل از پنج مکانیسم بنیادین —ترجمه، فشرده‌سازی، بازآرایی، هماهنگی و گذار معرفتی— به اجرا درمی‌آید. این مکانیسم‌ها می‌توانند همچون دستور زبانی ساختاری برای توصیف حرکات معنادار در فرایندهای تعمیم و انتزاع عمل کنند. آن‌ها کنش‌های مهندسی بنیادینی هستند که از طریق آن‌ها دانش ساخته، اصلاًح و یکپارچه می‌شود [۱، ۲]:

ترجمه. ترجمه[۴] جابه‌جایی نظام‌مند یک سازه مفهومی از یک نظام بازنمایی به نظامی دیگر است. شرط اساسی ترجمه معتبر، حفظ ساختار معنایی عمیق آن سازه است، حتی اگر ابزارهای نمایش کاملاً تغییر کنند. حوزه اثر این مکانیسم معمولاً میان دو معماری یا دو نظام بازنمایی متفاوت است (مثلاً هندسه و جبر) و کارکرد اصلی آن، دسترس‌پذیر ساختن ابزارهای یک حوزه برای حل مسائل حوزه‌ای دیگر است. همانند ابداع دستگاه مختصات توسط دکارت که پلی بین معماری‌های عظیم هندسه اقلیدسی و جبر نمادین است.

فشرده‌سازی. فشرده‌سازی[۵] فرایندی شناختی است که در آن یک فعالیت پیچیده، چندمرحله‌ای و زمان‌بر به یک سازه یا مفهوم واحد، ایستا و قابل‌دستکاری بدل می‌شود. این مکانیسم، ابزارساز اصلی در معماری دانش است. این مکانیسم به‌صورت فرکتالی در مقیاس‌های مختلف عمل می‌کند. در سطح خرد، این همان فرایندی است که طی آن، رویه $a \times a \times \cdots \times a$ به سازه مفهومی a^n فشرده می‌شود. در مقیاس کلان تاریخی، فرایند طولانی و چند دهه‌ایِ کار بر روی رویه‌های محاسباتی پراکنده در حوزه جایگشت‌ها، در نهایت در سازه انتزاعی گروه فشرده شد.

بازآرایی. بازآرایی[۶] زمانی رخ می‌دهد که ورود یک ایده، ابزار یا مثال نقض جدید، روابط میان اجزای دانش موجود را بازچینش می‌کند و شبکه‌ای تازه و کارآمدتر می‌سازد. این مکانیسم نقش مهندس نوسازی و مقاوم‌سازی را دارد. حوزه اثر آن درون یک معماری است و کارکردش حل تناقضات، رفع بدفهمی‌ها و افزایش انسجام شبکه مفهومی. مانند بازآرایی ریمان در سری‌های نامتناهی که منجر به حل بحران مفهومی از طریق خلق یک معماری پیچیده‌تر با دسته‌بندی‌های جدید (همگرایی مشروط/ غیرمشروط) شد.

هماهنگی. هماهنگی[۷] فرایند خلاقانه‌ای است که دو یا چند معماری یا ساختار مفهومی مجزا را در یک نظام نو و یکپارچه ادغام می‌کند. این مکانیسم نقش شهرساز کلان را دارد. برخلاف ترجمه که تنها پلی بین دو حوزه می‌سازد، هماهنگی با تغییر قوانین و ایجاد زیرساخت‌های تازه، معماری‌ای نو خلق می‌کند. هماهنگی فرایندی است که در آن دو معماری درهم ادغام می‌شوند و یک معماری کاملاً جدید با قوانین و موجودیت‌های خاص خود پدید می‌آید. مانند خلق هندسه تحلیلی به‌واسطه محاسبه‌پذیر کردن استدلال‌های هندسی از طریق معرفی دستگاه مختصات.

گذار معرفتی. گذار معرفتی[۸] به‌معنای تغییر در معیارهای بنیادین صدق و اعتبار در دانش ریاضی است؛ زمانی‌که جامعه ریاضی یا یک یادگیرنده، چارچوبی نو برای تشخیص ریاضیات معتبر اتخاذ می‌کند. این مکانیسم نقش انقلاب و بازنویسی قانون‌اساسی را

---

[4] Translation

[5] Compression

[6] Reconfiguration

[7] Coordination

[8] Epistemic Shift

دارد. حوزه اثر آن بر اصول بنیادین یک معماری است و برخلاف تغییرات تکاملی، یک دگرگونی ریشه‌ای در نحوه شناخت، استدلال و اعتباربخشی است. مانند رویارویی با هندسه هذلولوی و به چالش کشیدن بداهت اقلیدسی و گذار از هندسه اقلیدسی به نااقلیدسی و تغییر بنیادین در معیار حقیقت؛ تغییر از انطباق با شهود به سازگاری منطقی درونی یک سیستم.

بازآفرینی هدایت‌شده و فضای مثال. ایده بازآفرینی هدایت‌شده[۹] فرویدنتال[۱۰] بر این اصل استوار است که یادگیرنده باید فرصت یابد منطق درونی شکل‌گیری مفاهیم را، در مسیری هدایت‌شده، بازتجربه کند [۸]. با این حال، یکی از چالش‌های دیرپای این رویکرد، فقدان یک نقشه شناختی دقیق برای طراحی مسیر بازآفرینی بوده است: بازآفرینی دقیقاً باید از چه مسیرهایی بگذرد؟ کدام بحران‌ها باید تجربه و کدام‌ها باید حذف یا تعدیل شوند؟ MKA این خلأ را با معرفی مکانیسم‌های شناختی بنیادین (ترجمه، فشرده‌سازی، بازآرایی، هماهنگی و گذار معرفتی) پُر می‌کند. در این چارچوب، بازآفرینی هدایت‌شده نه یک استعاره کلی، بلکه فرایندی مهندسی‌شده است که در آن، هر مداخله آموزشی باید با فعال‌سازی هدفمند یکی یا چند مکانیسم شناختی توجیه شود.

در این مقاله، فضای مثال [۱۷، ۱۸] صرفاً مجموعه‌ای از نمونه‌ها برای توضیح تعریف تلقی نمی‌شود، بلکه به‌مثابه یک معماری شناختی طراحی‌شده در نظر گرفته می‌شود. فضای مثال، بستری است که در آن ببینیم چه‌چیزی تغییر می‌کند، چه‌چیزی ثابت می‌ماند، و چه‌چیزی عمداً به بحران کشیده می‌شود. از طرفی در چارچوب MKA مثال‌ها ابزاری خنثی نیستند، بلکه ماشه‌هایی شناختی‌اند که می‌توانند تصویر مفهومی [۱۶] یادگیرنده را تثبیت، دچار تنش یا بازآرایی کنند. از این منظر، هم‌راستایی معرفتی زمانی محقق می‌شود که فضای مثال به‌گونه‌ای طراحی شود که یادگیرنده را در مسیر تجربه بحران‌های ساختاری مشابه با تاریخ مفهوم قرار دهد، اما در مقیاسی آموزشی و کنترل‌شده.

روش‌شناسی

این پژوهش، مطالعه‌ای نظری با رویکرد تحلیل تاریخی–مفهومی و طراحی آموزشی است. در گام نخست، تکوین تاریخی مفاهیم حد و پیوستگی تحلیل می‌شود؛ سپس این تحلیل با اتکا به چارچوب معماری دانش ریاضی (MKA) تفسیر می‌شود و در نهایت، نتایج آن در قالب طراحی مفهومی یک فضای مثال چندمرحله‌ای برای بازآفرینی هدایت‌شده این مفاهیم به کار گرفته می‌شود. هدف پژوهش، ارائه یک چارچوب نظری برای پیوند دادن تحولات تاریخی دانش ریاضی با طراحی مسیرهای یادگیری است، نه آزمون تجربی اثربخشی یک مداخله آموزشی. وینیت‌های آموزشی مقاله نیز به‌منزله موقعیت‌های بازسازی‌شده برای تحلیل و طراحی نظری در نظر گرفته می‌شوند، نه داده‌های حاصل از اجرای یک مداخله پژوهشی در کلاس درس.

این سه لایه نه به‌صورت خطی، بلکه در یک رابطه بازگشتی با یکدیگر عمل می‌کنند: تحلیل تاریخی، مکانیسم‌های شناختی درگیر را آشکار می‌سازد؛ MKA این مکانیسم‌ها را صورت‌بندی می‌کند؛ و طراحی فضای مثال، آن‌ها را به سطح عملیاتیِ آموزشی ترجمه می‌کند.

در این پژوهش، تاریخ ریاضیات نه به‌عنوان روایت توصیفی، بلکه به‌عنوان منبع مهندسی شناختی به‌کار گرفته می‌شود. تمرکز تحلیل تاریخی بر لحظات شکست، بحران و ناپایداری در تکوین مفاهیم حد و پیوستگی است، به‌ویژه اتکای اولیه بر شهود حرکتی و هندسی؛ ناکامی ترجمه‌های شهودی در مواجهه با مسائل حدی پیچیده؛ فشرده‌سازی‌های مفهومی ناپایدار پیشا–وایرشتراسی؛ و در نهایت، گذار معرفتی به معیار $\varepsilon - \delta$ به‌عنوان تغییر در معیار صدق.

این لحظات تاریخی، در چارچوب معماری دانش ریاضی، به‌عنوان نشانه‌هایی از فعال یا ناکام‌ماندن مکانیسم‌های شناختی (ترجمه، فشرده‌سازی، گذار معرفتی) تفسیر می‌شوند. فرض روش‌شناسی مقاله آن است که همین مکانیسم‌ها، در مقیاس شناختی یادگیرنده نیز نقش‌آفرین‌اند و می‌توان آن‌ها را به‌صورت هدفمند بازطراحی کرد.

---

[9] Guided Reinvention

[10] Freudenthal, H

چارچوب معماری دانش ریاضی در این پژوهش نقشی دوگانه ایفا می‌کند: اول به‌عنوان ابزار تحلیلی برای تفسیر تاریخ مفاهیم حد و پیوستگی؛ و دوم ابزار طراحی برای مهندسی مسیر یادگیری در کلاس درس. در این چارچوب، هر مثال آموزشی نه یک نمونه خنثی، بلکه یک «کنش شناختی بالقوه» تلقی می‌شود که می‌تواند یک یا چند مکانیسم بنیادین را فعال کند. از این‌رو، روش‌شناسی مقاله مبتنی بر نگاشت نظام‌مند میان موانع معرفتی تاریخی، مکانیسم‌های شناختی و نقش‌های طراحی مثال‌ها است.

هسته روش‌شناسی پژوهش، طراحی یک فضای مثال چندمرحله‌ای برای مفاهیم حد و پیوستگی است. این فضا نه براساس افزایش تدریجی دشواری محاسباتی، بلکه براساس توالی هدفمند گذارهای معرفتی طراحی شده است. در این طراحی هر زیربخش فضای مثال، یک شکست تاریخی مشخص را بازنمایی می‌کند؛ هر مثال، برای فعال‌سازی یک مکانیسم شناختی غالب انتخاب شده است؛ و کل توالی، مسیری از شهود حرکتی به معیار ساختاری $\varepsilon - \delta$ را شبیه‌سازی می‌کند. فضای مثال به‌مثابه یک شبیه‌ساز شناختی عمل می‌کند که در آن یادگیرنده، نه‌صرفاً با پاسخ‌های درست، بلکه با محدودیت‌های تصاویر مفهومی خود مواجه می‌شود [۱۶].

فضای مثال این مقاله در قالب شش وینیتِ آموزشی بازسازی‌شده است. این وینیت‌ها داده‌های تجربی خام نیستند، بلکه ماهیتی شبیه به آزمایش‌های فکری[11] دارند که با جزئیات واقعی غنی‌شده‌اند. محتوای این روایت‌ها، حاصل تلفیق مشاهدات کلاسی و تحلیل روایت‌های آموزشی همکاران است.

این پژوهش مدعی ارائه شواهد تجربی آماری درباره اثربخشی آموزشی نیست. اعتبار روش‌شناختی آن از سه منبع حاصل می‌شود: انسجام درونی نظری میان تاریخ، MKA و طراحی مثال؛ هم‌خوانی با ادبیات موجود در آموزش حد و پیوستگی و مطالعات شناختی؛ شفافیت نگاشت‌ها میان شکست‌های تاریخی، مکانیسم‌های شناختی و مداخلات طراحی. اعتباربخشی تجربی این چارچوب، به‌عنوان گام بعدی، مستلزم مطالعات طراحی‌پژوهی در کلاس‌های واقعی است؛ امری که آگاهانه خارج از دامنه این مقاله قرار گرفته است.

تاریخ حد و پیوستگی

مفهوم حد در تاریخ ریاضیات نه از دل تعاریف صوری، بلکه از دل تجربه‌ای شهودی و حرکتی زاده شد. در آثار اولیه حسابان، هم‌چون نیوتن و لایبنیتس، حد اساساً پاسخی عملی به مسئله «نزدیک‌شدن» بود: نزدیک‌شدن یک مقدار به مقدار دیگر، حرکت یک نقطه به‌سوی موقعیتی خاص، یا تغییر تدریجی یک کمیت درطول زمان. این شهود حرکتی، که ریشه در تجربه فیزیکی و ادراک پیوستگی حرکت داشت، ستون فقرات قلمرو زایشی مفهوم حد را تشکیل می‌داد [۴، ۵]. در این مرحله تاریخی، حد نه به‌عنوان یک شی ریاضی مستقل، بلکه به‌مثابه یک فرایند درک می‌شد. عبارات کلاسیکی مانند «x به a میل می‌کند» یا «مقدار تابع به L نزدیک می‌شود» حامل هیچ معیار صریحی برای سنجش این «نزدیکی» نبودند. با این حال، این فقدانِ صراحت در بستر زایشی مشکل‌زا تلقی نمی‌شد، زیرا شهود حرکتی، نقش تنظیم‌کننده معنا را ایفا می‌کرد.

مسئله اما زمانی پدیدار شد که این شهودها می‌بایست به زبان ریاضی ترجمه شوند. ترجمه مفاهیمی مانند «بسیار نزدیک‌شدن»، «کوچک‌تر از هر مقدار قابل تصور» یا «تغییر آنی» به نمادهای جبری، به‌جای آن‌که ساختار معنایی شهود را حفظ کند، اغلب آن را مخدوش می‌ساخت [۶]. با گسترش دامنه کاربرد حسابان، به‌ویژه در سری‌های نامتناهی، توابع ناپیوسته و ساختارهای غیرهموار، شهود حرکتی به‌تدریج ناکافی شد. پدیده‌هایی مانند سری‌های واگرا با جملات میل‌کننده به صفر، یا توابعی که تقریباً همه‌جا رفتار منظم داشتند اما در نقاطی خاص دچار شکست می‌شدند، بحران‌هایی را پدید آوردند که دیگر با زبان شهودی قابل مهار نبودند [۴، ۵].

این بحران‌ها نشان از آن داشتند که معماری مفهومی موجود دیگر توانایی پشتیبانی از گسترش‌های جدید را نداشت. در زبان معماری دانش ریاضی، ابزارهای فشرده‌سازی و هماهنگی لازم برای تعمیم‌های جدید فراهم نشده بودند. ریاضی‌دانان با مفاهیمی کار می‌کردند که ازنظر عملی موفق بودند، اما از نظر انسجام منطقی، به‌شدت لرزان. این وضعیت، به‌تدریج ضرورت یک بازآرایی بنیادین در معماری مفهوم حد را آشکار ساخت [۶].

---

[11] Thought Experiments

نخستین تلاش‌ها برای تعریف حد و پیوستگی، اغلب در قالب تعاریف کلامی و شبه‌فلسفی ظاهر شدند. تعاریفی نظیر «تابع پیوسته است اگر نمودارش بدون برداشتن قلم رسم شود» یا «حد مقداری است که متغیر هرچه بخواهیم به آن نزدیک می‌شود» نمونه‌هایی از این رویکردند. این تعاریف، اگرچه از نظر شهودی قابل‌فهم بودند، اما از منظر معرفتی ناتوان محسوب می‌شدند؛ زیرا فاقد معیارهای عملیاتی و مستقل از شهود بودند.

می‌توان این مرحله را نمونه‌ای از فشرده‌سازی ناکام دانست: تلاش برای تبدیل یک فرایند پیچیده به یک شی مفهومی، بدون آن‌که ساختار درونی آن فرایند به‌درستی مهندسی شده باشد. نتیجه، تعاریفی بود که بیش‌از آن‌که ابزار انسجام باشند، خود به منبع ابهام تبدیل می‌شدند.

این ناتوانی به‌ویژه در مواجهه با مثال‌های مرزی آشکار شد؛ مثال‌هایی که به‌طور کامل با شهود حرکتی ناسازگار بودند اما ازنظر تحلیلی قابل‌دفاع محسوب می‌شدند. چنین مثال‌هایی نشان دادند که تعریف‌های اولیه نه‌تنها قادر به حل بحران‌های موجود نیستند، بلکه خود بخشی از مسئله‌اند. انباشت این بحران‌ها، در نهایت به یک گذار معرفتی در نیمه دوم قرن نوزدهم انجامید؛ گذاری که با کارهای کوشی و نهایتاً وایرشتراس به‌ثمر نشست. تعریف $\varepsilon - \delta$ را می‌توان نقطه عطف این تحول دانست: لحظه‌ای که مفهوم حد از یک فرایند شهودی به یک شی صوریِ دقیق فشرده شد. این گذار صرفاً افزودن یک تعریف جدید نبود، بلکه تغییر در معیارهای بنیادین صدق و فهم ریاضی را بازتاب می‌داد. نزدیکی دیگر یک تجربه حسی یا حرکتی نبود، بلکه رابطه‌ای کمّی و کنترل‌پذیر میان $\varepsilon - \delta$ محسوب می‌شد. این لحظه نمونه کامل یک گذار معرفتی است: جایگزینی معیار شهودی با معیار سازگاری منطقی درونی.

گذار وایرشتراسی نمونه‌ای کلاسیک از تغییر قانون اساسی دانش است. مفاهیمی چون حد و پیوستگی دیگر براساس «نزدیک‌شدن شهودی» تعریف نمی‌شوند، بلکه در قالب روابط کمّی دقیق میان فاصله‌ها صورت‌بندی می‌شدند. این تغییر، اگرچه به انسجام بی‌سابقه‌ای انجامید، اما به بهای گسست شدید از شهود اولیه تحقق یافت؛ گسستی که پیامدهای پداگوژیک آن تا امروز باقی مانده است [۱۹].

این روایت تاریخی نشان می‌دهد که مفهوم حد ذاتاً مفهومی بحران‌خیز است؛ مفهومی که تنها از رهگذر شکست‌های مکرر شهود و بازآرایی‌های ساختاری به ثبات رسیده است. در آموزش رسمی، اما، این تاریخ فشرده و حذف می‌شود و یادگیرنده مستقیماً با تعریف $\varepsilon - \delta$ در قلمرو بازسازانه مواجه می‌شود. اهمیت این تاریخ نه در بازگویی وقایع، بلکه در آشکارسازی منطق درونی بحران‌هاست: هر بحران تاریخی، نشانه‌ای از ناهماهنگی معماری دانش با نیازهای ساختاری مفهوم بوده است. در نتیجه، همان شکستی که در تاریخ ریاضی رخ داده بود، در سطح شناختی یادگیرنده تکرار می‌شود: شهود حرکتیِ حل‌نشده دربرابر یک تعریف صوریِ تحمیل‌شده. این وضعیت، زمینه‌ساز حفظ الگوریتمی تعریف، بدون درک نقش آن در حل بحران‌های مفهومی است.

از این منظر، تاریخ حد و پیوستگی نه‌صرفاً یک پیش‌زمینه نظری، بلکه یک نقشه راه شناختی برای طراحی آموزش محسوب می‌شود. چارچوب MKA امکان می‌دهد این تاریخ به‌مثابه الگویی برای بازآفرینی هدایت‌شده در کلاس درس به‌کار گرفته شود؛ الگویی که در آن، یادگیرنده از مسیر بحران‌های کنترل‌شده، ضرورت تعریف صوری را تجربه می‌کند، نه‌صرفاً آن را بپذیرد. این تحلیل مستقیماً به پرسش محوری مقاله بازمی‌گردد: اگر تاریخ ریاضیات خود صحنه تنش‌ها و گذارها بوده است، آیا می‌توان کلاس درس را طوری طراحی کرد که یادگیرنده، در مقیاسی شناختی و هدایت‌شده، همان تنش‌ها و گذارها را تجربه کند؟ پاسخ به این پرسش، مستلزم ترجمه این تحلیل تاریخی به یک طراحی آموزشی است؛ امری که در بخش بعد، در قالب بازآفرینی هدایت‌شده مفاهیم حد و پیوستگی پی گرفته می‌شود.

وینیت‌های گذار معرفتی در حد و پیوستگی

وینیت ۱. موقعیت آموزشی: بررسی حد تابع $f(x) = x^2$ وقتی $x \to 2$.

رایان در برخورد با این حد به این صورت عمل می‌کند: «ابتدا 1.9 را جای‌گذاری می‌کنم می‌شود 3.61. حالا 1.95 می‌شود 3.80، بعد 1.97 می‌شود 3.88. خیلی واضح است! هرچه زمان می‌گذرد (x نزدیک‌تر می‌شود)، مکان هم دقیق‌تر می‌شود. حدش قطعاً ۴ هست. اصلاً در خود $x = 2$ مقدار تابع هم که ۴ است.»

در این‌جا، مکانیسم ترجمه بدون اصطکاک عمل می‌کند. شهود حرکتیِ «نزدیک‌شدن» با داده‌های عددی هم‌راستا است. این تکیه‌گاه شناختی برای ورود به مبحث حد ضروری است، اما از منظر MKA یک «تعادل ناپایدار» است؛ زیرا یادگیرنده هنوز حد را یک «فرایند» می‌بیند، نه یک «شی ریاضی».

وینیت ۲. موقعیت آموزشی: مواجهه با تابع نوسانی $f(x) = \sin(1/x)$ حوالی $x = 0$.

رایان که حد قبلی را دیده است در برخورد با این حد به این صورت عمل می‌کند: مقادیر $x = 0.1$، $x = 0.01$، $x = 0.001$، $x = 0.0001$ را به تابع می‌دهد و متوجه می‌شود تابع بالا و پایین می‌پرد. مجدداً مقادیر را محاسبه می‌کند تا ببیند «اشتباه» کجاست! با خودش می‌گوید «هرچه به صفر نزدیک‌تر می‌شوم رفتار تابع ناجورتر می‌شود.»

مکانیسم ترجمه که در وینیت اول موفق بود، در این‌جا دچار فروپاشی می‌شود. استعاره «حرکت به سوی مقصد» دربرابر این «تابع ناجور» ناتوان است. این لحظه، بازآفرینی شناختی همان بحرانی است که در قرن نوزدهم، شهود هندسی را در مواجهه با توابع نوسانی ناکافی نشان داد.

وینیت ۳. موقعیت آموزشی: تلاش برای تعریف حد با زبان طبیعی (بدون $\varepsilon - \delta$).

معلم: «چطور می‌گویی حد تابع L می‌شود؟»

رایان: «وقتی x خیلی زیاد به a نزدیک می‌شود، فاصله تابع با L نیز بسیار ناچیز می‌شود. تقریباً صفر می‌شود.»

معلم: «این «ناچیز» یعنی چقدر؟ یک‌میلیاردم؟»

رایان: «آره، شاید هم کم‌تر. هرچقدر که لازم باشد.»

معلم: «اگر تابع را در 10^{100} ضرب کنیم، باز هم آن فاصله «ناچیز» است؟»

رایان: «نه، در این حالت خیلی بزرگ می‌شود!»

در این‌جا یادگیرنده می‌کوشد با واژه‌های کیفی («خیلی نزدیک»، «ناچیز») پیچیدگی را فشرده کند. این فشرده‌سازی ناپایدار است، زیرا وابسته‌به مقیاس و بافت باقی می‌ماند. درست همانند بحران تاریخی حساب دیفرانسیل پیشا–وایرشتراسی، زبان طبیعی فاقد دقت لازم برای کنترل تغییرات است و نیاز به یک ابزار صوری آشکار می‌شود.

وینیت ۴. موقعیت آموزشی: معرفی منطق $\varepsilon - \delta$ به‌عنوان چالشِ «حبس‌کردن تابع».

معلم: « یک محدوده (بازه ε) دور عدد L می‌گذارم و می‌گویم: آیا می‌توانی x را به‌صورتی کنترل کنی که تابع از این محدوده بیرون نرود؟»

رایان: «اگر محدوده را خیلی کوچک‌تر کنید؟»

معلم: «هرچقدر بخواهم آن را کوچک می‌کنم. آیا می‌توانی شعاع امن (δ) را پیدا کنی؟»

رایان (با مکث): «آهان! یعنی من باید کنترلش کنم؟ پس باید δ را پیدا کنم؟»

این‌جا نقطه عطف است. معیار صدق از مشاهده روند به اثبات کنترل‌پذیری (تعریف صوری حد) تغییر می‌کند. رایان حالا نقش فاعلی می‌گیرد. این آغاز عاملیت معمارانه است؛ جایی‌که تعریف صوری نه یک فرمول تحمیلی، بلکه ابزار قدرت دانش‌آموز می‌شود.این لحظه، گذار معرفتی رخ می‌دهد. تعریف $\varepsilon - \delta$ نه به‌عنوان یک قرارداد صوری، بلکه به‌عنوان ابزار قدرت شناختی ظاهر می‌شود.

وینیت ۵. موقعیت آموزشی: بررسی پیوستگی تابع دیریکله (1 برای گویا، 0 برای گنگ).

رایان: «این تابع را اصلاً نمی‌شود کشید. در همه‌جا سوراخ است. چگونه پیوستگی آن را بررسی کنیم؟»

معلم: «مگر برای این کار به چشم‌هایت نیاز داری؟ ابزار جدیدت (اپسیلون–دلتا) کمکی نمی‌کند؟»

رایان: «اگر $\varepsilon = 0.5$ باشد، چون تابع مدام بین ۰ و ۱ می‌پرد، از محدوده بیرون می‌زند. پس مهم نیست شکلش به چه‌صورت است، منطقاً نمی‌شود آن را حبس کرد. پیوسته نیست!»

مکانیسم بازآرایی (به‌همراه گذار معرفتی) رخ داده است. یادگیرنده وابستگی خود را به بازنمایی بصری قطع می‌کند و به‌طور مستقیم با منطق ساختاری کار می‌کند. این همان لحظه‌ای است که تفاوت رویکرد خبره و مبتدی توصیف می‌شود؛ یادگیرنده دیگر به شکل ظاهری اثبات نگاه نمی‌کند، بلکه به منطق درونی آن (تعریف صوری) می‌نگرد.

وینیت ۶. موقعیت آموزشی: مواجهه با حد در بی‌نهایت ($\lim_{x\to\infty} f(x) = L$) برای اولین بار.

رایان: «این‌جا دیگر δ معنی نمی‌دهد چون x به عددی نزدیک نمی‌شود. ولی منطق «کنترل کردن» باید همان باشد. من هنوز هم می‌خواهم خروجی را در ε حبس کنم. پس برای ورودی، به‌جای یک بازه کوچک، باید یک مرز بزرگ (M) بگذارم. اگر x از M رد شود، تابع در محدوده حبس می‌شود. پس باید به این صورت باشد: $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \ldots$»

این مرحله، غایت آموزشی چارچوب MKA است. یادگیرنده معماری تعریف را به بافتی جدید منتقل می‌کند و آن را توسعه می‌دهد. او دیگر مصرف‌کننده تعریف نیست، بلکه توان بازسازی و خلق معماری‌های مفهومی جدید را دارد. هم‌راستایی معرفتی در این نقطه تثبیت می‌شود.

وینیت‌های ارائه‌شده نشان می‌دهند که گذار از شهود حرکتی به تعریف صوری حد و پیوستگی، نه از مسیر انباشت مثال‌ها، بلکه از طریق تجربه نظام‌مند بحران‌ها و بازآرایی‌های شناختی محقق می‌شود. این بازآفرینی شناختی، امکان فعال‌سازی عاملیت معمارانه را فراهم می‌سازد و نشان می‌دهد چگونه تاریخ مفهومی می‌تواند به‌صورت مهندسی‌شده در معماری یادگیری کلاس درس ادغام شود.

هم‌راستایی معرفتی در عمل: از حرکت تا معماری

تحلیل تاریخی و طراحی فضای مثال ارائه‌شده در بخش‌های پیشین، امکان صورت‌بندی دقیق‌تری از مفهوم هم‌راستایی معرفتی را در آموزش حد و پیوستگی فراهم می‌سازد. در چارچوب معماری دانش ریاضی هم‌راستایی معرفتی به‌معنای انطباق صوری دانش‌آموز با تعریف رسمی نیست، بلکه به‌معنای هم‌نوا شدن معماری شناختی یادگیرنده با منطق زایشیِ شکل‌گیری مفهوم در تاریخ ریاضیات است. در این بخش استدلال می‌کنیم که چگونه گذار از شهودهای اولیه به تعریف $\varepsilon - \delta$، می‌تواند نه به‌صورت جهشی و تحمیلی، بلکه به‌مثابه یک فرایند مهندسی‌شده شناختی تحقق یابد.

نقطه عزیمت شناختی مفهوم حد، در تجربه‌های حرکتی و پویای یادگیرنده ریشه دارد: نزدیک‌شدن، میل‌کردن، و تغییر تدریجی. این شهودها در تاریخ ریاضیات نیز نقش محوری داشته‌اند، اما همان‌گونه که تحلیل تاریخی نشان داد، ترجمه مستقیم این تجربه‌های حرکتی به گزاره‌های تحلیلی، همواره با شکست‌های مفهومی همراه بوده است. در طراحی فضای مثال، هدف نه حذف این شهودها، بلکه قرار دادن آن‌ها در معرض ترجمه‌های ناکامِ کنترل‌شده است؛ موقعیت‌هایی که در آن‌ها زبان حرکت، قادر به تضمین دقت و کنترل ساختاری نیست.

در این مسیر، مثال‌هایی که رفتارهای ظاهراً نزدیک‌شونده اما ناپایدار را نمایش می‌دهند، نقش ماشه‌های شناختی را ایفا می‌کنند. یادگیرنده به‌تدریج درمی‌یابد که شهود حرکتی، هرچند نقطه آغاز و ضروری است، اما فاقد ابزارهای لازم برای قضاوت صوری درباره حد است. این تجربه، زمینه پذیرش ضرورت یک زبان دقیق‌تر، یعنی زبان $\varepsilon - \delta$، را فراهم می‌سازد. بدین‌ترتیب، تعریف $\varepsilon - \delta$ نه به‌عنوان یک قرارداد دل‌بخواهی، بلکه به‌مثابه پاسخ ساختاری به شکست ترجمه‌های شهودی معنا می‌یابد.

یکی از موانع اصلی در یادگیری حد و پیوستگی، درک تعریف $\varepsilon - \delta$ به‌عنوان مجموعه‌ای از نمادهای پیچیده و بی‌معناست. در چارچوب MKA این مشکل را می‌توان به شکست در مکانیسم فشرده‌سازی نسبت داد: فرایندهای طولانی و وابسته به شهود، بدون آن‌که به یک شی مفهومی پایدار فشرده شوند، به یادگیرنده تحمیل می‌شود.

طراحی فضای مثال پیشنهادی، با قراردادن یادگیرنده در موقعیت‌هایی که کنترل محاسباتی یا شهودی به‌تنهایی ناکافی است، شرایط لازم برای فشرده‌سازی موفق را ایجاد می‌کند. در این نقطه، $\varepsilon - \delta$ دیگر صرفاً یک تکنیک اثباتی نیست، بلکه به‌عنوان معیار ساختاری «نزدیکی» درک می‌شود؛ معیاری که مستقل از نمودار، فرمول خاص، یا رفتار محلی تابع عمل می‌کند. این فشرده‌سازی، گذار از «فرایند دیدن نزدیک‌شدن» به «شی مفهومی حد» را ممکن می‌سازد.

اوج هم‌راستایی معرفتی زمانی رخ می‌دهد که یادگیرنده، تعریف $\varepsilon - \delta$ را نه‌صرفاً به‌عنوان ابزاری برای حل تمرین، بلکه به‌عنوان بخشی از معماری دانش تحلیل ریاضی به رسمیت بشناسد. این لحظه را می‌توان نمونه‌ای از گذار معرفتی دانست: تغییری در معیارهای بنیادین اعتبار، از اتکا به شهود حرکتی یا محاسبات عددی، به پذیرش سازگاری منطقی درونی یک دستگاه صوری.

در این سطح، یادگیرنده قادر است درباره خودِ تعریف حد استدلال کند: تشخیص دهد چرا این تعریف کار می‌کند، چه نوع رفتارهایی را پوشش می‌دهد، و چرا تعریف‌های شهودی پیشین ناکافی بوده است. چنین درکی، نشانه ورود به تفکر ریاضی پیشرفته است [۱۵]؛ نه به‌معنای تسلط بر تکنیک‌ها، بلکه به‌معنای توانایی عمل‌کردن بر معماری مفهومی. از این منظر، هم‌راستایی معرفتی در حد و پیوستگی، تحقق همان عاملیت معمارانه است که چارچوب معماری دانش ریاضی آن را غایت آموزش ریاضیات پیشرفته می‌داند.

این بخش استدلال کرد که هم‌راستایی معرفتی در آموزش حد و پیوستگی، حاصل انتقال مستقیم تعریف $\varepsilon - \delta$ نیست، بلکه نتیجه طراحی مسیری است که در آن شکست‌های ترجمه‌ای، فشرده‌سازی‌های ناپایدار، و در نهایت گذار معرفتی، به‌صورت هدایت‌شده بازآفرینی می‌شوند. بدین‌سان، کلاس درس می‌تواند— در مقیاس شناختی— با تاریخ ریاضیات هم‌نوا شود، نه از طریق روایت صرف تاریخ، بلکه از راه مهندسی معماری تجربه یادگیری.

هم‌راستایی معرفتی؛ فراتر از روایت تاریخی و تنوع مثال

یکی از سوبرداشت‌های رایج در بهره‌گیری از تاریخ ریاضیات در آموزش، تقلیل آن به روایت‌های خطی یا داستان‌گونه از تحولات تاریخی است. در چنین رویکردهایی، تاریخ اغلب به‌عنوان پس‌زمینه‌ای الهام‌بخش یا ابزار انگیزشی به‌کار می‌رود، بی‌آن‌که نقشی ساختاری در طراحی مسیر یادگیری ایفا کند. درمقابل، رویکرد حاضر نه به‌دنبال بازگویی تاریخ حد و پیوستگی، بلکه در پی بازسازی عقلانیِ منطق درونیِ شکست‌ها و گذارهای معرفتی آن است.

در چارچوب MKA تاریخ ریاضیات نه مجموعه‌ای از وقایع، بلکه تجلی حرکت‌های معماری دانش است؛ حرکت‌هایی که از خلال ترجمه‌های ناکام، فشرده‌سازی‌های ناپایدار و گذارهای معرفتی پرتنش شکل گرفته‌اند. به‌این‌ترتیب، تاریخ حد و پیوستگی در این مقاله به‌مثابه نقشه تنش‌های زایشی تلقی می‌شود که طراحی آموزشی می‌تواند از آن برای مهندسی مسیرهای یادگیری بهره گیرد. بنابراین، تفاوت اصلی این رویکرد با تاریخ‌گویی آموزشی در آن است که تاریخ نه به‌عنوان محتوا، بلکه به‌عنوان منبع طراحی معماری شناختی عمل می‌کند.

نظریه تنوع در یادگیری مارتُن چارچوبی مهم برای تحلیل یادگیری از طریق تشخیص وجوه بحرانی یک موضوع و طراحی الگوهای تغییر و ناوردایی فراهم می‌کند. با این حال، تعیین وجوه بحرانی و انتخاب مثال‌های مناسب برای آموزش، به‌طور کامل از اصول کلی این نظریه به دست نمی‌آید و به تحلیل محتوای ریاضی و تصمیم‌گیری معلم درباره آن‌چه باید در کانون توجه یادگیرندگان قرار گیرد وابسته است [۱۰، ۱۱]. افزون بر این، پرسش محوری مقاله حاضر صرفاً این نیست که چگونه می‌توان وجوه بحرانی یک مفهوم را از طریق تغییر و ناوردایی آشکار کرد؛ بلکه این است که چگونه می‌توان از تحلیل تحولات تاریخی یک مفهوم برای طراحی توالی‌ای از موقعیت‌های آموزشی بهره گرفت که محدودیت‌های فهم اولیه را آشکار سازد و ضرورت بازآرایی مفهومی و گذار به معیارهای صوری را برای یادگیرنده قابل‌درک کند. در این معنا، چارچوب MKA در مقاله حاضر نقشی مکمل دارد: این چارچوب برای تحلیل سازوکارهای شناختی درگیر در تحولات تاریخی و نگاشت آن‌ها به مراحل طراحی فضای مثال به کار گرفته می‌شود، نه برای نفی اصول نظریه تنوع در یادگیری.

رویکرد حاضر، با تکیه‌بر MKA یک لایه تحلیلی مکمل به نظریه تنوع در یادگیری می‌افزاید. در این مقاله، تغییر در فضای مثال تنها زمانی معنادار تلقی می‌شود که بتوان آن را به فعال‌سازی یک مکانیسم شناختی مشخص نسبت داد. برای نمونه، تغییر از توصیف حرکتی حد به تعریف ε–δ صرفاً یک تغییر در بازنمایی نیست، بلکه مصداق یک گذار معرفتی است که مستلزم تغییر معیار صدق از شهود حرکتی به سازگاری منطقی درونی است.

به این ترتیب، درحالی‌که نظریه تنوع در یادگیری به پرسش «چه چیزی باید تغییر کند؟» پاسخ می‌دهد، MKA امکان پاسخ به پرسش بنیادی‌تر «این تغییر چه کاری در معماری دانش انجام می‌دهد؟» را فراهم می‌سازد.

سهم اصلی این مقاله در نشان‌دادن آن است که شکست‌های تاریخی و آموزشی در مفهوم حد و پیوستگی را می‌توان در قالب ناهم‌راستایی معرفتی تحلیل کرد؛ ناهم‌راستایی‌ای میان سه قلمرو زایشی، بازسازانه و بازتابی. در تاریخ ریاضیات، بحران حد ناشی‌از ناتوانی ترجمه شهود حرکتی به زبان صوری پایدار بود؛ در آموزش رسمی نیز همین بحران، در قالب اتکای افراطی به شهود نموداری یا محاسباتی، بازتولید می‌شود.

چارچوب معماری دانش ریاضی نشان می‌دهد که حل این بحران نه با افزودن مثال‌های بیشتر، بلکه با طراحی توالی‌ای از مثال‌ها با نقش‌های شناختی متمایز ممکن است. در فضای مثال پیشنهادی، هر مثال نه به‌عنوان مصداقی از تعریف، بلکه به‌عنوان ماشه‌ای برای فعال‌سازی یکی از مکانیسم‌های ترجمه، فشرده‌سازی یا گذار معرفتی طراحی شده است. از این منظر، طراحی آموزشی حد و پیوستگی به یک فعالیت مهندسی تبدیل می‌شود که در آن، هم‌راستایی معرفتی به‌طور هدفمند پیگیری می‌شود.

تحلیل ارائه‌شده در این مقاله پیشنهاد می‌کند که هدف آموزش حد و پیوستگی نباید صرفاً توانایی محاسبه حد یا کاربرد تعریف $\varepsilon - \delta$ باشد، بلکه باید به‌سوی شکل‌گیری نوعی عاملیت معمارانه در فهم ریاضی حرکت کند. یادگیرنده‌ای که به هم‌راستایی معرفتی دست یافته است، نه‌تنها می‌داند «حد چیست»، بلکه می‌تواند تشخیص دهد چرا شهود حرکتی ناکافی است، چرا فشرده‌سازی‌های اولیه شکست می‌خورند، و چرا گذار به معیارهای صوری ضرورت می‌یابد.

از این منظر، هم‌راستایی معرفتی نه یک وضعیت پایانی، بلکه نتیجه مشارکت فعال یادگیرنده در همان فرایندهای پویایی است که تاریخ ریاضیات را شکل داده‌اند. چارچوب معماری دانش ریاضی با فراهم‌کردن زبان و ابزار تحلیل این فرایندها، امکان آن را فراهم می‌سازد که کلاس درس ریاضی، نه تقلیدی سطحی از تاریخ، بلکه بازآفرینی هدایت‌شده منطق زایشی آن باشد.

بحث

در نهایت، این مقاله مدعی ارائه یک الگوی جهان‌شمول یا نسخه‌ای آماده برای کلاس درس نیست، بلکه تلاشی مفهومی‌ـ طراحی‌محور برای نشان‌دادن امکان هماهنگ‌سازی آموزش رسمی با منطق تاریخی‌ـساختاری مفاهیم ریاضی است. پژوهش‌های آینده می‌توانند با بررسی تجربی این نوع طراحی‌ها در بافت‌های آموزشی مختلف، ابعاد عملی هم‌راستایی معرفتی را دقیق‌تر مطالعه کنند و دامنه کاربست چارچوب MKA را گسترش دهند.

تحلیل‌های تاریخی نشان می‌دهد که بسیاری از جهش‌های مفهومی در ریاضیات، نه حاصل تعمیم تدریجی، بلکه نتیجه بازآرایی‌های ساختاری عمیق بوده‌اند. گذار از هندسه اقلیدسی به هندسه‌های نااقلیدسی، ظهور تعریف $\varepsilon - \delta$ برای حد یا شکل‌گیری مفهوم فضای برداری همگی مستلزم کنارگذاشتن چارچوب‌های پیشین و بازسازمان‌دهی بنیادی روابط میان اشیای ریاضی بوده‌اند [۷، ۹]. این بازآرایی‌ها معمولاً با مقاومت شدید همراه بوده‌اند.

حتی ریاضی‌دانان برجسته، در پذیرش اشیای جدید، معیارهای صدق نوین، یا زبان‌های صوری تازه، دچار تردید و سردرگمی شده‌اند [۱۳]. به‌عنوان نمونه، بحران‌های قرن نوزدهم پیرامون مفهوم حد و پیوستگی نشان می‌دهد که شهود حرکتی و عددی، برای کنترل رفتار توابع «ناجور» ناکافی بوده است. تعریف $\varepsilon - \delta$ نه از سر میل به صوری‌سازی، بلکه به‌مثابه پاسخی ناگزیر به فروپاشی شهودهای پیشین شکل گرفت.

این لحظات تاریخی نمونه‌های بارز فعال‌سازی مکانیسم بازآرایی هستند: زمانی که نه ترجمه شهودی پاسخ‌گوست، نه فشرده‌سازی‌های موجود پایدارند، و تنها راه پیش روی، بازسازی معماری مفهومی است.

در مقابل، کلاس درس ریاضی غالباً به‌گونه‌ای طراحی می‌شود که این بازآرایی‌ها رخ ندهند. ساختار آموزشی، معمولاً در پی کاهش تنش، حذف بحران، و هموارسازی مسیر یادگیری است. مفاهیم به‌صورت تعاریف نهایی، قضایا و تکنیک‌ها ارائه می‌شوند، بدون آن‌که یادگیرنده با دلایل وجودی آن‌ها یا شکست‌های تاریخی پیشین مواجه شود. در چنین چارچوبی، مکانیسم گذار معرفتی عملاً غایب است. یادگیرنده با تعریف $\varepsilon - \delta$ مواجه می‌شود، اما نه به‌عنوان پاسخی به بحران، بلکه به‌عنوان یک قاعده صوری که باید حفظ شود. نتیجه آن است که تعریف، هرگز به‌عنوان یک ابزار کنترل ساختاری در معماری شناختی یادگیرنده تثبیت نمی‌شود.

این وضعیت را می‌توان به‌عنوان یکی از علل اصلی شکاف میان توانایی محاسباتی و ناتوانی مفهومی در آموزش ریاضیات تحلیل کرد [۱۴]. یادگیرنده قادر است تمرین‌هایش را حل کند، اما در تشخیص موقعیت‌های مرزی، تحلیل مثال‌های غیرشهودی، یا انتقال دانش به بافت‌های جدید، دچار مشکل می‌شود.

نکته ظریف اما تعیین‌کننده آن است که گذار معرفتی حتی در تاریخ ریاضی نیز فرایندی آسان یا خطی نبوده است. ریاضی‌دانان نیز بارها در برابر تغییر چارچوب‌ها مقاومت کرده‌اند [۱۳، ۱۲]. این امر نشان می‌دهد که گذار معرفتی، نه یک مهارت ساده، بلکه یکی از پرهزینه‌ترین مکانیسم‌های شناختی در ریاضیات است. با این حال، تفاوت اساسی در آن است که تاریخ ریاضی، ناگزیر از عبور از این گذارها بوده است؛ درحالی‌که کلاس درس اغلب می‌کوشد آن‌ها را دور بزند. نتیجه، یادگیری‌ای است که از نظر صوری صحیح، اما از نظر معماری شناختی شکننده است.

از منظر چارچوب معماری دانش ریاضی، مسئله اصلی آموزش ریاضی در همین نقطه قرار دارد: چگونه می‌توان شرایطی را طراحی کرد که گذار معرفتی — در مقیاس شناختی دانش‌آموز— امکان‌پذیر شود، بدون آن‌که آموزش به بازسازی ساده تاریخ یا ایجاد سردرگمی کنترل‌نشده فروکاسته شود؟

نکته مهم آن است که هم‌راستایی کلاس درس با تاریخ ریاضی، به‌هیچ‌وجه به معنای بازگویی خطی تاریخ یا تکرار مسیرهای واقعی کشف نیست. تاریخ واقعی، پر از بن‌بست‌ها، خطاها و مسیرهای فرعی است که بازتولید آن‌ها در کلاس نه ممکن است و نه مطلوب.

آن‌چه چارچوب MKA پیشنهاد می‌کند، بازآفرینی هدایت‌شده مکانیسم‌هاست، نه وقایع. هدف، فعال‌سازی بحران‌هایی است که از نظر شناختی هم‌ارز بحران‌های تاریخی‌اند، نه بازسازی دقیق آن‌ها. فضای مثال، روایت معماری، و طراحی شوک‌های مفهومی، ابزارهایی هستند که امکان این بازآفرینی را فراهم می‌کنند. در این معنا، کلاس درس می‌تواند با کشف تاریخی ریاضی «هماهنگ» شود، نه در سطح محتوا، بلکه در سطح منطق تحول مفهومی.

تحلیل فوق نشان می‌دهد که مسئله اصلی آموزش ریاضی، نه انتخاب محتوای درست، بلکه طراحی معماری شناختی مناسب برای فعال‌سازی مکانیسم‌های بنیادین است. اگر بازآرایی و گذار معرفتی در تاریخ ریاضی نقش محوری داشته‌اند، حذف آن‌ها از کلاس درس به‌معنای حذف موتور اصلی فهم مفهومی است. در این چارچوب، هم‌راستایی معرفتی به‌عنوان هدف غایی آموزش، نه یک وضعیت ایستا، بلکه پیامد یک فرایند پویا تلقی می‌شود؛ فرایندی که در آن یادگیرنده، در مقیاسی کنترل‌شده، با همان تنش‌هایی مواجه می‌شود که مفاهیم ریاضی را در تاریخ به حرکت درآورده‌اند.

نتیجه‌گیری

یکی از نتایج محوری چارچوب معماری دانش ریاضی آن است که شکاف میان تاریخ ریاضیات و آموزش رسمی را نمی‌توان صرفاً با بازسازی محتوای تاریخی یا افزودن روایت‌های زمینه‌دار به کلاس درس پُر کرد. مسئله بنیادین، نه در «چه چیزی» آموزش داده می‌شود، بلکه در «چگونه عمل‌کردن شناختی» یادگیرنده نهفته است. تاریخ ریاضیات عرصه کنش فعال ریاضی‌دانانی است که به‌طور مستمر معماری دانش موجود را تحلیل، نقد، بازآرایی کرده‌اند و گسترش داده‌اند؛ درحالی‌که کلاس درس ریاضی اغلب یادگیرنده

را به مصرف‌کننده ساختارهای تثبیت‌شده تقلیل می‌دهد. این ناهم‌ترازی را می‌توان به فقدان آن‌چه «عاملیت معمارانه» نامیده می‌شود نسبت داد.

مطالعه تاریخ مفاهیم ریاضی نشان می‌دهد که پیشرفت‌های بنیادین همواره با بروز کنش‌های معمارانه همراه بوده‌اند. این کنش‌ها معمولاً در واکنش به بحران‌های معرفتی رخ داده‌اند: لحظاتی که معماری موجود دیگر قادر به پاسخ‌گویی به مسائل نوظهور نبوده است. برای مثال، گذار از شهود هندسی پیوستگی به تعریف $\varepsilon - \delta$ نه‌صرفاً یک پالایش صوری، بلکه یک بازآرایی عمیق و تغییر معیار صدق در آنالیز ریاضی بود. وایرشتراس و هم‌عصرانش نه‌تنها تعریفی جدید ارائه دادند، بلکه به‌طور فعال تصویر مفهومی مسلط بر نزدیک‌شدن را به چالش کشیدند [۱۶] و معماری تازه‌ای را بنا نهادند که در آن کنترل کمّی جایگزین شهود حرکتی شد. چنین کنش‌هایی مصداق بارز عاملیت معمارانه‌اند: ریاضی‌دان نه تابع معماری موجود، بلکه معمار آن است. تاریخ ریاضیات مملو از این لحظات است.

همان‌طور که در این مقاله استدلال شد، فضای مثال یکی از ابزارهای کلیدی برای فعال‌سازی عاملیت معمارانه است. وقتی مثال‌ها صرفاً برای تمرین یا نمایش کاربرد یک تعریف استفاده می‌شوند، یادگیرنده در نقش کاربر باقی می‌ماند. اما هنگامی که مثال‌ها به‌گونه‌ای طراحی شوند که ترجمه‌های شهودی را ناکافی نشان دهند، فشرده‌سازی‌های ناپایدار را به بن‌بست برسانند و ضرورت بازآرایی را آشکار کنند آن‌گاه یادگیرنده ناگزیر وارد کنش معمارانه می‌شود. در این وضعیت، تعریف صوری دیگر یک «داده» نیست، بلکه نتیجه یک انتخاب معماری است. این تجربه، هرچند در مقیاسی شناختی و آموزشی، از نظر ساختاری هم‌ریخت با کنش ریاضی‌دانان در تاریخ است [۱۹].

از طرفی رویکرد بازآفرینی هدایت‌شده فرویدنتال، در پرتو MKA زمانی به بلوغ می‌رسد که هدف آن صرفاً بازتولید مسیر تاریخی نباشد، بلکه پرورش عاملیت معمارانه یادگیرنده باشد. هدایت معلم نه در جهت ارائه پاسخ، بلکه در جهت مهندسی بحران‌ها، توقف‌ها و انتخاب‌های معماری معنا می‌یابد. در این معنا، معلم طراح موقعیت‌هایی است که یادگیرنده را به کنش معمارانه سوق می‌دهد، بی‌آن‌که مسیر را به‌طور کامل از پیش تعیین کند. این ظرافت، نقطه تمایز بازآفرینی هدایت‌شده از تاریخ‌گویی یا تمرین‌محوری صرف است.

پرداختن صریح به عاملیت معمارانه، چند پیامد مهم برای پژوهش و عمل آموزشی نیز دارد. نخست آن‌که معیار موفقیت آموزش ریاضی از توانایی حل مسئله به توانایی بازاندیشی معماری دانش ارتقا می‌یابد؛ دوم آن‌که تاریخ ریاضیات نه به‌عنوان محتوای جانبی، بلکه به‌عنوان منبع طراحی موقعیت‌های معمارانه بازتعریف می‌شود؛ و سوم آن‌که تفکر ریاضی پیشرفته به‌مثابه یک توان تدریجی و قابل پرورش در آموزش رسمی بازشناسی می‌شود.

به بیان دیگر، هدف آموزش نباید بازسازی جزییات تاریخی باشد، بلکه باید بازآفرینی نقش‌هایی باشد که در تاریخ توسط ریاضی‌دانان ایفا شده‌اند: نقش مواجهه با بحران، نقش تشخیص ناکافی بودن یک فشرده‌سازی ناپایدار، و نقش طراحی معیارهای جدید. بازآفرینی هدایت‌شده فرویدنتال، در این‌جا معنا می‌یابد: یادگیرنده نه تاریخ را تکرار می‌کند و نه‌صرفاً تعریف‌ها را می‌پذیرد، بلکه در مقیاس شناختی خود، همان مکانیسم‌های معمارانه را تجربه می‌کند.

از این رو، نتیجه اصلی مقاله حاضر آن است که مسئله هم‌راستایی معرفتی، در نهایت به مسئله عاملیت بازمی‌گردد: آیا کلاس درس به یادگیرنده اجازه می‌دهد معمار دانش شود، یا او را صرفاً به ساکن جهان صوری تقلیل می‌دهد؟ پاسخ به این پرسش، جهت‌گیری بنیادین آموزش ریاضی را تعیین می‌کند.

مراجع

[۱] م. سبزی و ر. بهمانی، *معماری دانش ریاضی: ازکشف تاریخی تا یادگیری فردی*، نشریه ریاضی و جامعه، (۱۴۰۵) https://doi.org/10.22108/msci.2026.148823.1797.

[۲] م. سبزی، ر. بهمانی و م. سیاوشی، *دیالکتیک تعمیم و انتزاع در آموزش ریاضی*، مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی، **۱۵**(۴) (۱۴۰۴) ۱۳۳–۱۴۶.

[۳] م. سبزی، م. نامداری، و م. سیاوشی، *سازوکار مقاومت دربرابر یادگیری؛ بازخوانی موانع معرفتی در ریاضیات پیشرفته*، به‌سوی علوم ریاضی، **۵** (۱۴۰۴) ۶۸–۸۰.

[4] C.B. Boyer, The history of the calculus and its conceptual development, Dover Publications, 1949.

[5] C.B. Boyer and U.C. Merzbach, A History of mathematics, (3rd ed.) Wiley, 2011.

[6] F. Cajori, *A history of mathematical notations* (Vol. II). The Open Court Publishing Co, 1929.

[7] J. Dieudonné, *History of functional analysis*. Amsterdam: North-Holland, 1981.

[8] H. Freudenthal, *Revisiting mathematics education: China lectures*. Kluwer Academic Publishers, 1991.

[9] Kleiner, I. *The evolution of the modern concept of a vector space,* Historia Math., **16**(2) (1989) 161–172. https://doi.org/10.1016/0315-0860(83)90048-4

[10] A. Kullberg, U. Runesson Kempe, and F. Marton, *What is made possible to learn when using the variation theory of learning in teaching mathematics?* ZDM Math. Educ., **49**, (2017) 559–569. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0858-4

[11] F. Marton, *Necessary conditions of learning*, New York, NY: Routledge, 2015.

[12] M. Sabzi, *Born as solutions: how equations reveal mathematical objects,* The Math. Gaz. **17** (2026) 1–5. https://doi.org/10.1080/00255572.2026.2746492.

[13] A. Sfard, *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as two sides of the same coin,* Educ. Stud. Math., **22** (1991) 1–36.

[14] R.R. Skemp, *Relational understanding and instrumental understanding,* Math. Teach., **77** (1976) 20–26.

[15] D. Tall, *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

[16] D. Tall and S. Vinner, *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity,* Educ. Stud. Math., **12** (1981) 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619.

[17] A. Watson and J. Mason *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2005.

[18] A. Watson and J. Mason *Seeing an exercise as a single mathematical object,* Educ. Stud. Math., **62** (2006) 91–105. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0802_1.

[19] K. Weber, P. Dawkins and J.P. Mejia-Ramos *The relationship between mathematical practice and mathematics pedagogy in mathematics education research,* ZDM Math. Educ., **52** (2020) no. 6, 1063–1074. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01173-7.

Towards Mathematical Sciences

Vol. 6, No. 2, Autumn and Winter 2026, pp. 179–192

DOI.10.22067/tmsj.2026.99222.1093

Expository Article

به سوی علوم ریاضی

https://tmsj.um.ac.ir

CAN A MATH CLASSROOM BE ALIGNED WITH THE HISTORY OF MATHEMATICS?

MOHAMAD SABZI

[1]Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Shahid Chamran University of Ahvaz Ahvaz, Iran
sabzi.mohamad@gmail.com

Abstract. One of the fundamental issues in mathematics education is the epistemic gap between mathematics in the historical context of production, mathematics in the form of formal and educational structures, and mathematics in the cognitive architecture of the learner. This article pursues the central question of whether the mathematics classroom can be designed in a way that aligns with the logic of historical developments in mathematics.To answer, the history of the formation of limit and continuity is reexamined as a prominent example of epistemic failures and crises, and it is shown that these concepts have been established not through direct intuition, but through failed translations, unstable compressions, and epistemic Shifts. Then, inspired by this historical analysis, an example space for teaching limit and continuity is designed, which aims to guide the reinvention of this cognitive path in the classroom. We argue that achieving epistemic alignment requires the development of architectural agency in the learner; the ability to consciously act on the architecture of knowledge through foundational mechanisms. Finally, we show that mathematics education can lead to the development of advanced mathematical thinking when it goes beyond the mere transmission of content and focuses on the design of architected learning experiences.

2020 Mathematics Subject Classification. 47A55, 39B52, 34K20, 39B82.

Keywords. Mathematical knowledge architecture (MKA), Epistemic alignment, Example space, Guided reinvention, Architectural agency.

Date: Rceived 07-06-2026 Revised 09-11-2026 Accepted 21-11-2026 Available Online 24-11-2026

©Ferdowsi University of Mashhad.