

دوره ۱، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۰



tmsj.um.ac.ir

بسم الله الرحمن الرحيم

به سوی علوم ریاضی

دارای پروانه انتشار شماره ۸۶۳۹۶ به تاریخ ۱۳۹۹/۲/۱۵ از وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی



دوره ۱، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۰

صاحب امتیاز: دانشگاه فردوسی مشهد

مدیر مسئول

محمد صال مصلحیان

سر دبیر

شیرین حجازیان

مدیر اجرایی

محمد جانفدا

اعضای هیات تحریریه

مسعود آرین نژاد، دانشگاه زنجان

محمد جانفدا، دانشگاه فردوسی مشهد

آرزو حبیبی راد، دانشگاه فردوسی مشهد

داود خجسته سالکویه، دانشگاه گیلان

امیر دانشگر، دانشگاه صنعتی شریف

مهدی دوست پرست، دانشگاه فردوسی مشهد

علی دولتی، دانشگاه یزد

فرزاد راد مهر، دانشگاه فردوسی مشهد

حبیب رجبی مشهدی، دانشگاه فردوسی مشهد

بختیار شعبانی ورکی، دانشگاه فردوسی مشهد

احمد صفاپور، دانشگاه ولیعصر رفسنجان

معصومه فشنندی، دانشگاه فردوسی مشهد

غلامرضا محتشمی برزادران، دانشگاه فردوسی مشهد

احسان ممکن، دانشگاه یاسوج

علی اصغر مولوی، دانشگاه حکیم سبزواری

مجید میرزا وزیری، دانشگاه فردوسی مشهد

اعضای مشورتی هیات تحریریه

فائزه توتونیان مشهد، دانشگاه فردوسی مشهد

رحیم زارع نهندی، دانشگاه تهران

امیدعلی شهنی کرم زاده، دانشگاه شهید چمران اهواز

محمد قاسم وحیدی اصل، دانشگاه شهید بهشتی

حسن صادقی، دانشگاه فردوسی مشهد

بهمن هنری، دانشگاه فردوسی مشهد

این نشریه به صورت دوفصلنامه (دو شماره در سال) منتشر می شود.

کلیه حقوق برای دانشگاه فردوسی مشهد محفوظ است

نشانی:

مجله به سوی علوم ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، ص.پ. ۱۱۵۹، مشهد ۹۱۷۷۵

ایمیل: tmsj@um.ac.ir

آدرس وبسایت: <https://tmsj.um.ac.ir>

فاکس: ۰۵۱-۳۸۸۰۷۳۵۸

تلفن: ۰۵۱-۳۸۸۰۶۲۲۲

مجله به سوی علوم ریاضی با هدف عمومی سازی ریاضیات، کمک به آشنایی جامعه به طور عام و جامعه دانشگاهی به طور خاص با جنبه‌های مختلف و کاربردهای ریاضی، آمار، و کامپیوتر و ارتباط آنها با سایر علوم در قالب چاپ مقالات علمی-ترویجی مرتبط می‌باشد.

این مجله مقالات در زمینه‌های ریاضی محض، ریاضی کاربردی، آمار و احتمال، علوم کامپیوتر، آموزش ریاضی، تاریخ و فلسفه ریاضی، کاربردهای ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر در سایر علوم، و نقدهای علمی را برای بررسی می‌پذیرد. همچنین ترجمه مقالاتی در موضوعات گفته شده نیز با شرایط خاص مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مقالات باید به گونه‌ای نوشته شوند که قابل فهم برای افرادی با اطلاعات پایه‌ای ریاضی در سطح کارشناسی یا دانشجویان تحصیلات تکمیلی باشند.

ارسال مقاله به این مجله به این معنی است که کلیه نویسندگان مقاله از این ارسال آگاه بوده، اصالت محتوای علمی آن را تأیید و با ارسال آن به مجله‌ی به سوی علوم ریاضی موافق بوده‌اند و به علاوه متعهد هستند که مقاله ارسالی به این مجله به طور همزمان در مراحل بررسی و یا چاپ در هیچ نشریه دیگری نیست. با ارسال مقاله به این مجله، همه نویسندگان متعهد می‌شوند که حقوق مالکیت فکری و اخلاق پژوهشی را رعایت نموده‌اند و کلیه حقوق استفاده از محتوا، جداول، تصاویر و ... را به ناشر واگذار کرده‌اند.

ارسال مقاله تنها از طریق لینک <https://tmsj.um.ac.ir> و به صورت الکترونیک امکان‌پذیر است. همچنین راهنمای نویسندگان و [فایل فشرده فرمت مجله](#) در این لینک قابل مشاهده است.

فهرست مطالب

۱.....[افت نوع اول و دوم در فرآیند یاددهی-یادگیری ریاضی در آموزش عمومی](#)

ا. رفیع پور

۱۴.....[مروری بر پیدایش و تحول مفهوم تابع](#)

م. امیاری

۲۴.....[تعبیر فیزیکی و هندسی مشتق گیری و انتگرال گیری کسری](#)

ح. غلامی چهکنند؛ م. گنج پزان

۳۵.....[راز فالنامه شیخ بهائی](#)

م. صال مصلحیان

۴۰.....[نامساوی های ابرانقباضی و سوبولف لگاریتمی](#)

س. ابوالفتح بیگی

۶۹.....[ریاضیات زیستی چیست و کاربرد آن چگونه است؟](#)

آ. فریدمن، مترجم: ا. خسروی



جلد ۱، شماره ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۰) صص ۱۳-۱

شناسه DOI: 10.22067/tmsj.2021.39659

<https://tmsj.um.ac.ir>

مقاله علمی-ترویجی

افت نوع اول و دوم در فرآیند یاددهی-یادگیری ریاضی در آموزش عمومی*

ابوالفضل رفیع پور

بخش آموزش ریاضی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان

Rafiepour@uk.ac.ir; drafiepour@gmail.com

چکیده. در این مقاله، ابتدا پدیده افت ریاضی کشور از دو منظر کمی و کیفی بررسی خواهد شد. در ضمن این بررسی، با استفاده از آمارها و نتایج تحقیقات مختلف، این پدیده افت، مورد موشکافی بیشتر قرار خواهد گرفت. در ادامه دو نوع افت در آینه مطالعه تیمز و در آینه آمار وزارت آموزش و پرورش، شناسایی و معرفی می شوند. افت در آینه تیمز (افت نوع اول) به عملکرد ضعیف دانش آموزان ایرانی در مطالعات بین المللی اشاره دارد و افت در آینه آمار وزارت آموزش و پرورش (افت نوع دوم)، اقبال کم دانش آموزان را برای ادامه تحصیل در رشته ریاضی-فیزیک نشان می دهد. مقاله حاضر، علت اصلی این دو نوع افت را عدم توجه به ریاضی ناب معرفی می کند. سپس چپستی و حدود و ثغور مفهوم "ریاضی ناب" ترسیم می شود. در پایان، راهکارهایی برای تقویت آموزش ریاضی ناب ارائه خواهد شد. این راهکارهای پنجگانه شامل توجه به ریاضیات قومی، استفاده از رویکرد مدل سازی و کاربرد برای آموزش ریاضی، تقویت نهادهای مرتبط با عمومی کردن ریاضی، تشویق به درگیر شدن استادان توانمند کشور در فرآیند آموزش معلمان ریاضی در دانشگاه فرهنگیان، برگزاری دوره های آموزشی مختلف برای معلمان ریاضی و دانش آموزان به منظور آشنایی آنان با ریاضی ناب است.

2020 Mathematics Subject Classification. 97B20, 97C70, 97D10

کلید واژگان. افت ریاضی، ریاضی ناب، آموزش ریاضی زمینه مدار، عمومی کردن ریاضی، آموزش معلمان.
تاریخ: دریافت ۹۹/۶/۱ پذیرش ۹۹/۷/۲۹.

* نسخه اولیه و کوتاه تر مقاله حاضر در دومین سمینار علوم ریاضی و چالش ها ارائه شده است.

۱. مقدمه

گزارش‌های آماری وزارت آموزش و پرورش در مورد جمعیت دانش‌آموزی کشور در رشته‌های مختلف تحصیلی (ریاضی-فیزیک، علوم تجربی و علوم انسانی) در دوره دوم متوسطه نظری، نشان می‌دهد که تمایل دانش‌آموزان برای انتخاب رشته ریاضی-فیزیک، سال به سال کاهش می‌یابد. به گفته مدیر کل آموزش متوسطه نظری^۱ در وزارت آموزش و پرورش، فقط ۱۰ درصد از دانش‌آموزان دوره متوسطه نظری، رشته ریاضی-فیزیک را برای ادامه تحصیل در سال تحصیلی ۹۹-۱۳۹۸ انتخاب کرده‌اند. این در حالی است که ۴۱ درصد دانش‌آموزان رشته علوم تجربی و ۲۶ درصد دانش‌آموزان نیز رشته علوم انسانی را انتخاب کرده بودند. این افت کمی تعداد دانش‌آموزان در رشته ریاضی-فیزیک، باعث ایجاد نگرانی‌هایی در خصوص نیروی کار مورد نیاز کشور در آینده شده است. به گونه‌ای که همه سازمان‌ها و نهادهای مرتبط با آموزش کشور، نسبت به این مسئله، واکنش نشان داده‌اند. همین پدیده افت، انگیزه اصلی برگزاری سمینارهای مختلف به منظور بررسی همه جانبه این پدیده بوده است. لازم به ذکر است که این اولین باری نیست که تعداد دانش‌آموزان رشته ریاضی-فیزیک با کاهش جدی مواجه می‌شود. مشابه همین پدیده در دهه ۱۳۶۰ شمسی نیز رخ داده بود که مسئولان وقت با اندیشیدن برخی تمهیدات، توانستند جمعیت دانش‌آموزی کشور در رشته ریاضی-فیزیک را افزایش بدهند [۲]. البته پدیده افت کمی تعداد دانش‌آموزان ورودی به رشته ریاضی-فیزیک تنها چالش نظام آموزشی کشور نیست بلکه افت دیگری را نیز می‌توان در آینه مطالعه بین‌المللی تیمز^۲ مشاهده کرد که در آن عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی در مقایسه با عملکرد ریاضی هم‌تایان‌شان در سایر کشورهای جهان، مطلوب نیست. در وضعیت کنونی، توجه بسیاری از صاحب‌نظران و متخصصان، به سمت تعداد کم دانش‌آموزان که مایل به ادامه تحصیل در رشته ریاضی-فیزیک معطوف شده است، در حالی که باید به جنبه دیگری از افت ریاضی (که نشان دهنده عملکرد ضعیف دانش‌آموزان ایرانی در مقایسه با هم‌تایان‌شان در سطح جهان است)، نیز پرداخته شود. در این مقاله، از واژه “افت نوع اول” برای ارجاع به پدیده ضعف عملکرد دانش‌آموزان ایرانی در مطالعات بین‌المللی استفاده شده است. برای پدیده کاهش تعداد دانش‌آموزان در رشته ریاضی-فیزیک، واژه “افت نوع دوم” به کار گرفته شده است. به زعم نگارنده، توجه به افت نوع اول مهم‌تر و مقدم‌تر از اهتمام به افت نوع دوم است. در ادامه، این دو نوع افت با شرح و بسط بیشتری توضیح داده خواهند شد.

۲. افت نوع اول (عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی در مطالعه تیمز)

میانگین نمره دانش‌آموزان ایرانی شرکت‌کننده در مطالعه بین‌المللی تیمز در طی سالهای ۱۹۹۵ تا ۲۰۱۵ پایین‌تر از میانگین بین‌المللی بود. مطالعه تیمز یک مطالعه بر مبنای برنامه درسی ریاضی کشورهای شرکت

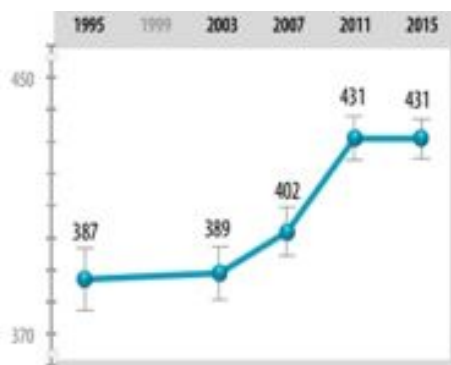
^۱ <https://www.medu.ir/fa/news/item/۹۰۸۸۱۷>

^۲ (TIMSS) Trend International Mathematics and Science Study

کننده در مطالعه است که هر چهار سال یک بار در پایه های چهارم و هشتم، برگزار می شود^۳. برنامه درسی ریاضی مطالعه تیمز بر اساس نقاط مشترک برنامه درسی ریاضی کشورهای شرکت کننده در مطالعه تدوین می شود و سوالات آزمون بر اساس این برنامه درسی طراحی می شوند. طبق گزارش های مطالعه تیمز، میزان هم پوشانی سوالات مطالعه تیمز با برنامه درسی ریاضی اعلام شده از طرف مجری مطالعه تیمز در ایران، بالای ۹۰ درصد بوده است، اما عملکرد ریاضی دانش آموزان ایرانی شرکت کننده در مطالعه تیمز در هر دو پایه چهارم و هشتم، اختلاف معناداری با میانگین بین المللی دارد. جدول ۱ نشانگر میانگین عملکرد ریاضی دانش آموزان پایه چهارم ایرانی در مطالعه تیمز از سال ۱۹۹۵ تا سال ۲۰۱۵ است. نمودار شماره ۱ نیز روند تغییر نمره عملکرد ریاضی دانش آموزان ایرانی را در پایه چهارم از سال ۱۹۹۵ تا سال ۲۰۱۵ نشان می دهد^۴. لازم به ذکر است که میانگین نمرات در مطالعه تیمز ۵۰۰ و انحراف استاندارد ۱۰۰ می باشد. بنابراین اطلاعات جدول ۱ نشان می دهد که میانگین نمره دانش آموزان ایرانی شرکت کننده در مطالعه تیمز، حدود یک انحراف استاندارد پایین تر از میانگین بین المللی است.

جدول ۱: میانگین عملکرد دانش آموزان ایران در درس ریاضی پایه چهارم ابتدایی

سال	۱۹۹۵	۲۰۰۳	۲۰۰۷	۲۰۱۱	۲۰۱۵
میانگین نمره ریاضی	۳۸۷	۳۸۹	۴۰۲	۴۳۱	۴۳۱



نمودار ۱: روند تغییر نمره عملکرد ریاضی دانش آموزان ایرانی در پایه چهارم از سال ۱۹۹۵ تا سال ۲۰۱۵.

جدول ۲ رتبه ایران را در مقایسه با کل کشورهای شرکت کننده در مطالعه تیمز نشان می دهد. همان طور که مشاهده می شود، در سال ۱۹۹۵ بیست و شش کشور در مطالعه تیمز شرکت داشتند و ایران از آخر دوم شده است. نتایج مطالعه تیمز ۱۹۹۵ کمی بعدتر و در سال ۱۹۹۸ منتشر شد و این نتیجه با اول شدن تیم المپیاد

^۳ برای توضیحات بیشتر، به وبسایت مطالعه تیمز به آدرس <https://timssandpirls.bc.edu> مراجعه شود.

^۴ تا ماه اوت ۲۰۲۰ نتایج مطالعه تیمز ۲۰۱۹ منتشر نشده بود.

ریاضی ایران، همزمان شد. در آن زمان، نتایج مطالعه تیمز برای بسیاری از ریاضیدان‌ها و اعضای جامعه آموزشی ایران باورپذیر نبود [۶]، اما باید توجه داشت که نتایج دانش‌آموزان ایرانی در مطالعه تیمز و المپیاد ریاضی دو مقوله جدا از هم هستند.

جدول ۲: رتبه دانش‌آموزان ایرانی در درس ریاضی پایه چهارم ابتدایی

سال	۱۹۹۵	۲۰۰۳	۲۰۰۷	۲۰۱۱	۲۰۱۵
رتبه ایران	۲۵	۲۲	۲۸	۴۳	۴۳
تعداد کشورهای شرکت کننده	۲۶	۲۵	۳۶	۵۰	۴۹

عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی پایه هشتم نیز در مطالعه تیمز مطلوب نبود و در تمام سال‌های برگزاری این مطالعه، میانگین نمره دانش‌آموزان ایرانی پایه هشتم که در مطالعه تیمز شرکت داشتند، پایین‌تر از میانگین بین‌المللی بود. جدول ۳ نشانگر میانگین عملکرد ریاضی دانش‌آموزان پایه هشتم ایرانی در مطالعه تیمز از سال ۱۹۹۵ تا سال ۲۰۱۵ است. نمودار شماره ۲ نیز روند تغییر نمره عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی را در پایه هشتم از سال ۱۹۹۵ تا سال ۲۰۱۵ نشان می‌دهد.

جدول ۳: میانگین عملکرد دانش‌آموزان ایرانی در درس ریاضی پایه هشتم

سال	۱۹۹۵	۱۹۹۹	۲۰۰۳	۲۰۰۷	۲۰۱۱	۲۰۱۵
میانگین نمره ریاضی	۴۱۸	۴۲۲	۴۱۱	۴۰۳	۴۱۵	۴۳۶



نمودار ۲: روند تغییر نمره عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی در پایه هشتم از سال ۱۹۹۵ تا سال ۲۰۱۵.

جدول ۴ رتبه دانش آموزان ایرانی پایه هشتم را در مقایسه با کل کشورهای شرکت کننده در مطالعه تیمز (پایه هشتم) نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در سال ۱۹۹۵، چهل و یک کشور در مطالعه تیمز شرکت داشتند و ایران از آخر پنجم شده است.

جدول ۴: رتبه دانش‌آموزان ایرانی در درس ریاضی پایه هشتم

سال	۱۹۹۵	۱۹۹۹	۲۰۰۳	۲۰۰۷	۲۰۱۱	۲۰۱۵
رتبه ریاضی	۳۷	۳۳	۳۴	۳۴	۳۲	۲۹
تعداد کشورهای شرکت کننده	۴۱	۳۸	۳۶	۴۹	۴۲	۳۹

همان‌طور که در جدول‌های ۱ و ۳ (به همراه نمودارهای ۱ و ۲) دیده می‌شود، روند عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی شرکت کننده در مطالعه تیمز تغییر چندانی نداشته است. حتی تغییر اخیر کتاب‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای نیز اثر معناداری بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی شرکت کننده در مطالعه تیمز نگذاشته است. گویا و غلام‌آزاد [۱۳] دلایلی را برای عدم موفقیت تغییر اخیر کتابهای درسی ریاضی برشمردند. دلایلی که می‌تواند توجیه‌گر تداوم عملکرد ضعیف دانش‌آموزان ایرانی شرکت کننده در مطالعه تیمز باشد. به برخی از این عوامل در ادامه اشاره شده است.

- عدم انسجام نظری برنامه درسی ریاضی؛
- ترکیب و به‌کارگیری نظریه‌های مختلف و گاهی متناقض؛
- استفاده سطحی از یافته‌های پژوهشی در نوشتن کتاب‌های درسی؛
- عدم حمایت از معلمان ریاضی در اجرا (آموزش‌های ضمن خدمت)؛
- ضعف آموزش‌های پیش از خدمت در دانشگاه فرهنگیان.

۳. افت نوع دوم (آمار پایین دانش‌آموزان در رشته ریاضی-فیزیک)

۱- بر اساس آمار نیمه رسمی (آمار اعلام شده در رسانه‌ها توسط مسئولین وزارت آموزش و پرورش) تعداد کمی از دانش‌آموزان پایه دهم در متوسطه دوره دوم، رشته ریاضی-فیزیک را برای ادامه تحصیل انتخاب می‌کنند. به گفته مدیرکل دفتر آموزش متوسطه نظری وزارت آموزش و پرورش، در مجموع ۲ میلیون و ۶۲۱ هزار و ۵۱۷ دانش‌آموز دوره دوم متوسطه در سال تحصیلی ۹۸-۹۷، مشغول به تحصیل هستند. این آمار شامل همه دانش‌آموزان شاغل به تحصیل در همه شاخه‌های کاردانش، فنی-حرفه‌ای و نظری است. از این تعداد، یک میلیون و ۷۱۳ هزار و ۸۷۲ دانش‌آموز در شاخه نظری، و بقیه در شاخه فنی-حرفه‌ای و کار و دانش مشغول به تحصیل هستند. در شاخه نظری، ۱۵/۴۹ درصد از دانش‌آموزان در رشته ریاضی، ۴۳/۴۸ درصد در رشته تجربی، ۴۰/۲۴ درصد در رشته ادبیات و علوم انسانی و ۷۹/۰ درصد در رشته علوم و معارف

اسلامی ادامه تحصیل می‌دهند (خبرگزاری ایرنا^۵). در اینجا نوع دیگری از افت (افت نوع دوم) نمایان می‌شود. اینکه تعداد اندکی از دانش‌آموزان ایرانی، رشته ریاضی-فیزیک را برای ادامه تحصیل خود در پایه دهم انتخاب می‌کنند. دلایل احتمالی ذیل را می‌توان برای افت نوع دوم برشمرد.

- اثر جامعه (شامل بازار کار و منزلت اجتماعی)؛
- نظر خانواده‌ها در انتخاب رشته فرزندان؛
- توانایی‌های فردی (شامل علاقه و استعداد دانش‌آموزان).

به زعم نگارنده مقاله حاضر، مشکل اصلی در آموزش ریاضی کشور و علت ریشه‌ای افت نوع اول و دوم عدم آشنایی دانش‌آموزان با ریاضی ناب است. ریاضیاتی که در زندگی آینده فردی و اجتماعی آنها نقش کلیدی خواهد داشت و به آنها در حل مسایل دنیای واقعی شان کمک خواهد کرد. در مورد ریاضی ناب در بخش بعدی توضیح مفصلی خواهد آمد. اما قبل از آن، بهتر است به این سوال پاسخ داده شود که اگر به افت نوع اول و دوم و ریشه اصلی آن (نادیده گرفتن ریاضی ناب) توجه نکنیم، چه اتفاقی خواهد افتاد؟

- در صورت تداوم این وضعیت و کاهش تدریجی دانش‌آموزان در رشته ریاضی-فیزیک، در آینده نزدیک همه مشاغل مرتبط به رشته ریاضی-فیزیک با کمبود نیروی انسانی مواجه خواهند شد. به این ترتیب برای داشتن مهندسان و نیروی فنی محتاج متخصصان سایر کشورهای جهان خواهیم شد و در نتیجه شغل‌های زیادی را در آینده از دست می‌دهیم. همانطور که میلگرام [۱۶] پس از مشاهده عملکرد ریاضی دانش‌آموزان آمریکایی شرکت کننده در تیمز و مقایسه آن با عملکرد ریاضی دانش‌آموزان کشورهای جنوب شرقی آسیا، به این جمع بندی رسید که در آینده بسیاری از مشاغل برای آمریکا از دست خواهند رفت و به جای آن در جنوب شرق آسیا رونق خواهند گرفت. امروزه شاهد آن هستیم که گفته میلگرام به وقوع پیوسته است. در اینجا لازم به ذکر است که امروزه رقابت بین کشورها فقط در بالا بردن سطح عملکرد ریاضی دانش‌آموزان نیست. بلکه رقابت کشورهای دنیا در تسخیر آینده جهان از طریق توسعه زبان‌های ساده برنامه‌نویسی و آشنا کردن کودکان با نحوه تعامل با ربات‌ها است. به طوری که در اسناد بالادستی بسیاری از کشورهای پیشرفته جهان توسعه تفکر محاسباتی (الگوریتم‌نویسی و برنامه‌نویسی) ذکر شده است. در این زمینه استفان [۱۸] به توافق سه وزارتخانه ژاپنی «وزارت آموزش، فرهنگ، ورزش، علوم و فناوری» و «وزارت اقتصاد، تجارت و صنعت» و «وزارت کشور و ارتباطات» در زمینه توسعه تفکر الگوریتمی در دانش‌آموزان، برای ایجاد اشتغال پایدار در بازار آینده کشور، اشاره می‌کند.
- ریاضی نابود می‌شود و به این ترتیب، روند کلی علم در کشور، آسیب جدی خواهد دید. چراکه یک ملت بدون دستاورد علمی عمیق در حوزه ریاضی خواهیم شد و در ادامه این رکود روی جریان پیشرفت کلی کشور در سایر عرصه‌های علمی و فناوری، نیز اثر نامطلوبی خواهد داشت.

۴. ریاضی ناب چیست؟

در بخش قبلی، از عدم توجه به ریاضی ناب به عنوان علت اصلی رخ دادن افت نوع اول و دوم، نام برده شد. اما واقعاً این ریاضی ناب چیست؟ در این بخش تلاش می‌شود با مثال و ضد مثال، چیستی ریاضی ناب تبیین شود. شکل‌گیری مفهوم ریاضی ناب به دومین سمینار راهبردی انجمن ریاضی ایران باز می‌گردد که در اسفند ماه ۱۳۹۴ در شهر خوانسار برگزار گردید. در یکی از روزهای این سمینار، معاون محترم وزیر آموزش و پرورش در آموزش متوسطه نیز شرکت داشت. در آن سمینار و در حضور معاون محترم وزیر آموزش و پرورش، یک سخنرانی با عنوان نقدی بر محاسبات ذهنی سریع، ارائه کردم. در آن سخنرانی، محاسبات ذهنی سریع با استفاده از چرتکه را که تازه در کشور شروع شده بود، نقد کردم. قبل از سمینار خوانسار، یک جلسه مناظره بین طرفداران و منتقدان برنامه آموزش سریع محاسبه با استفاده از چرتکه در خانه ریاضیات اصفهان برگزار شد. در جلسه مناظره، عنوان شد که بنا به گزارش‌های پژوهشی، چرتکه به عنوان یک ابزار فرهنگی در برخی جوامع (مثل جامعه چینی‌های مقیم مالزی) در ارتقا سطح عملکرد حل مسئله مفید بوده ولی برای همه جوامع (مثلاً مالایی‌های مقیم مالزی) مفید نبوده است (کلمنتس و الرتون [۹]). چراکه در جامعه چینی‌های مقیم مالزی، چرتکه یک ابزار فرهنگی است که در محاسبات روزمره والدین کودکان چینی مقیم مالزی، مورد استفاده قرار می‌گرفته؛ در حالی که برای سایر خانواده‌های مالایی، چرتکه چنین ابزاری محسوب نمی‌شده است. بنابراین، بر اساس ادبیات پژوهشی حوزه آموزش ریاضی می‌توان گفت که احتمال اثرگذاری چرتکه ژاپنی بر افزایش توانایی حل مسئله دانش‌آموزان ایرانی، کم است. پس از سمینار خوانسار نیز یک سخنرانی در خانه ریاضیات کرمان حول همین موضوع ارائه نمودم. هسته اصلی همه این سخنرانی‌ها این بود که آموزش محاسبه سریع با استفاده از چرتکه، یک برنامه انحرافی است و از آموزش ریاضی ناب که در خانه‌های ریاضیات کشور دنبال می‌شود، به طور جدی فاصله دارد. اما این روش محاسبه سریع با استفاده از چرتکه ژاپنی (!) در غیاب نظرات کارشناسانه متخصصان به طور قارچ‌گونه در سرتاسر کشور رشد یافتند، به گونه‌ای که در رسانه ملی نیز نفوذ کردند و تبلیغات موسسات مجری برنامه آموزش محاسبه سریع با چرتکه ژاپنی در همه جا از برنامه کودک گرفته تا برنامه عصر جدید، منتشر شد. عدم آگاهی برخی از والدین نسبت به چیستی ریاضی و عدم واکنش سریع و مناسب انجمن‌های علمی ریاضی در سطح کشور می‌توانند از دلایل رشد سریع این روش‌های غیر ریاضی در سطح کشور باشند. آموزش محاسبه سریع با استفاده از چرتکه ژاپنی، ریاضی نیست! چیستی ریاضی در سند برنامه درسی ملی آمده است. در آنجا از ریاضی به عنوان علم مطالعه الگوها و زبان علم یاد شده است و به کاربردهای ریاضی در دنیای واقعی توجه شده است. یک سوال جدی در به چالش کشیدن روش آموزش محاسبه سریع با استفاده از چرتکه ژاپنی، این است که از خود پیرسیم فردی که تحت آموزش محاسبه سریع قرار گرفته است، تا چه اندازه احتمال دارد در آینده یک ریاضیدان برجسته همچون مریم میرزاخانی بشود؟ با بررسی رفتار ریاضی‌وار ریاضیدان‌ها می‌توان گفت با احتمال نزدیک به صفر. برای تصدیق این احتمال نزدیک به صفر نقل قولی از ریچارد فاینمن برنده جایزه نوبل فیزیک، در این زمینه، اشاره می‌شود. فاینمن پس از

بازدید از موسسات برزیل در زمان اقامت خود در آنجا، می‌گوید در این کشور (برزیل) علم ندیدم چون همه چیز حفظی بود و تجربه و آزمایشی وجود نداشت (هیگنسون [۱۴]). اکنون سوالی که مطرح می‌شود این است که تا چه اندازه علوم و ریاضی در کشور ما حفظی است؟ در اثر امواج کنکور سراسری که به پایه‌های پایین دوره ابتدایی نیز نفوذ کرده است، آموزش ریاضی به نکته، تست و تکنیک تنزل یافته است. موسسات آموزش محاسبه سریع با استفاده از چرتکه هم مزید بر علت شده‌اند. اما ادعای مبلغان روش محاسبه سریع ذهنی با استفاده از چرتکه این است که با استفاده از این روش ارتباط و هماهنگی نیمکره چپ و راست در مغز فرد رخ می‌دهد. پاسخ این ادعا را می‌توان در هر دست‌سازه دیگری به غیر از چرتکه ژاپنی نیز یافت. حتی می‌توان یک دست‌سازه را که ابزار فرهنگی متناسب با جامعه ایرانی است، انتخاب کرد. مبلغان روش محاسبه سریع ذهنی با استفاده از چرتکه، ادعا می‌کنند^۶ که روش آنها چند هوش از هوش‌های چندگانه معرفی شده توسط هوارد گاردنر را در ذهن فعال می‌کند^۷. نظریه هوش چندگانه گاردنر [۱۱] انواع هوش (شامل هوش منطقی-ریاضی، هوش زبانی-کلامی، هوش دیداری-فضایی، هوش موسیقایی، هوش بدنی-جنبشی، هوش بین فردی، هوش درون-فردی، هوش طبیعت‌گرا، هوش هستی‌گرا) را به جای تعبیر سنتی از هوش، معرفی کرد. این ادعای طرفداران آموزش محاسبه سریع با استفاده از چرتکه، در حالی مطرح می‌شود که خود گاردنر در [۱۲] دیدگاه جدیدی را ارائه نموده و از نظریه هوش چندگانه خود عبور کرده است. او نظریه «پنج ذهن برای آینده»^۸ را معرفی کرد که بیشتر یک سیاست‌گذاری آموزشی برای آینده است. این پنج ذهن شامل ذهن تخصص محور، ذهن ترکیب‌گر، ذهن خلاق، ذهن احترام‌گذار و ذهن اخلاق‌مدار هستند. به طور خلاصه می‌توان گفت روش‌های انجام محاسبه سریع، محاسبه با استفاده از چرتکه ژاپنی، و نکاتی برای یافتن راه میان‌بر (آنچه برای کنکور ضروری می‌دانند) ریاضی ناب نیستند. اما ریاضی ناب چیست؟ ریاضیاتی که فرد را وادار به تفکر می‌کند و لذت حل مسئله را به او می‌چشانند. در فرآیند حل مسئله ریاضی یک حالت عدم تعیین وجود دارد که زیباست ولی بسیاری از ریاضی‌کاران کمتر آن را تجربه کرده‌اند. این همان حالتی است که پولیا [۱] از آن تعبیر به طعم تمشک کرده است. در این زمینه لازم است که انجمن ریاضی ایران نقش مرجعیت خود را ایفا کند و ریاضی ناب را با ارائه مثال‌های مناسب معرفی کند و همین طور اعلام نماید که «محاسبه سریع با استفاده از چرتکه ژاپنی، ریاضی نیست».

۵. راهکارهایی برای دستیابی به ریاضی ناب

در بخش‌های قبلی در مورد افت نوع اول و دوم صحبت شد و علت اصلی این دو نوع افت در مفهوم ریاضی ناب ریشه‌یابی شد. در ادامه پنج راهکار برای دستیابی به ریاضی ناب، آمده است. دو راهکار اول

^۶ اینها در سطح ادعا مطرح شده‌اند و برای اثبات این ادعاها، ارائه نتایج تحقیق‌های عمیق و دقیق ضروری هستند.

^۷ ابزارها و فعالیت‌های دیگری (همچون برنامه نویسی با برنامه اسکرتچ) وجود دارند که می‌توانند دست کم ۷ هوش اول از

هوش‌های چندگانه گاردنر را درگیر کند.

^۸ Five Mind for Future

برآمده از تجربه زیسته نگارنده در پژوهش‌های حوزه مدل‌سازی و کاربردها در آموزش ریاضی است. سه راهکار بعدی بر اساس تجربیات علمی-اجرایی نگارنده به عنوان مدرس دوره‌های ضمن خدمت و کارگاه‌های گوناگون، مدرس درس‌های مختلف در دانشگاه فرهنگیان، مدیر خانه ریاضیات کرمان و نایب رییس شورای خانه‌های ریاضیات کشور است.

۱۰۵ استفاده از ریاضیات قومی به عنوان مثالی از ریاضی ناب منظور از ریاضی قومی شناسایی عناصر ریاضی در گروه‌های مختلف قومی است. این واژه در سال ۱۹۸۴ توسط دی‌آمبروسیو، ریاضی‌دان برزیلی ابداع شد (دی‌آمبروسیو، [۱۰]). به عقیده بارتن [۸] ریاضیات قومی شامل برنامه‌ای است که به بررسی راه‌های فهمیدن، بیان و به کار بردن مفاهیم و شیوه‌های ریاضی در گروه‌های مختلف فرهنگی می‌پردازد، که همچنین می‌تواند به عنوان شیوه‌های جدید ریاضی نیز شناسایی شود. در همه اقوام برخی از مفاهیم و مولفه‌های ریاضی در زندگی روزمره به کار برده می‌شود و با انجام تحقیق و شناسایی این مولفه‌های ریاضی، می‌توان مسایل ریاضی مرتبط با آن را در روند یاددهی-یادگیری ریاضی مورد استفاده قرار داد. به مسأله ریاضی قومی زیر که مربوط به فرش‌بافی است (برگرفته از مرادعلی زاده و رفیع پور، [۷])، توجه کنید.

- یک قالبیاف برای اینکه دست مایه‌ی کار خود را با قیمت مناسب به فروش برساند باید قواعد حاکم بر شکل هندسی قالبی که معمولاً مستطیل است، را بداند. به عنوان مثال قالبیاف می‌داند در قالبی‌هایی که عرض آنها ۳ متر و طول آن ۴ متر است، اندازه‌ی قطر ۵ متر خواهد بود. اگر این اندازه، همان اندازه به دست آمده باشد نشان دهنده‌ی این است که همه اصول قالبیافی رعایت شده، در غیر این صورت نقایص قالبی را به نمایش می‌گذارد. به عنوان مثالی دیگر اندازه حاشیه قالبی به کل قالبی برابر است با یک سوم نصف عرض قالبی و یا دو ششم عرض قالبی.
- در بعضی قالبی‌ها، نقشه و طرح آن یکسره است و شباهت‌هایی بین قسمت‌های مختلف قالبی وجود ندارد (در واقع تقارنی در قالبی وجود ندارد). در این قالبی‌ها معمولاً یک نفر، کار بافت قالبی را انجام می‌دهد. در بعضی از قالبی‌ها، نصف نقش آن تهیه می‌شود و دو نیمه قالبی عیناً شبیه به هم هستند. بافت این قالبی‌ها به طور همزمان توسط دو نفر بافته می‌شود. به این ترتیب که یکی از قالبیافان نقشه‌خوانی می‌کند و از نیمه‌ی مرکزی قالبی به سمت راست می‌بافد و قالبیاف دیگر از نیمه‌ی مرکزی قالبی به سمت چپ می‌بافد.

۲۰۵ استفاده از مسایل مدل‌سازی و کاربرد در آموزش ریاضی به عنوان مثالی دیگر از ریاضی ناب منظور از مدل‌سازی و کاربرد در آموزش ریاضی فرآیندی است که با یک مسئله که در موقعیت دنیای واقعی قرار دارد، شروع می‌شود. سپس با صورتبندی مسئله دنیای واقعی و تبدیل آن به یک مسئله ریاضی، دنبال می‌شود. در ادامه، این مسئله ریاضی در دنیای ریاضی حل می‌شود. در نهایت این جواب که در دنیای ریاضی به دست آمده است باید به دنیای واقعی برده شود تا با زمینه واقعی مسئله متناسب گردد. در این قسمت ممکن است جواب دنیای ریاضی نیاز به تفسیر داشته باشد. بعد از تفسیر جواب، میزان دقت آن در دنیای واقعی

سنجیده می‌شود تا در صورت لزوم، چرخه مدلسازی دوباره تکرار شود تا جوابی معنادار برای مسأله به دست آید (ورشافل [۱۹] و کیاسر و شوارتز [۱۵]). مثال زیر، برگرفته از مقاله عبدالله پور و رفیع پور [۵]، مسئله‌ای را معرفی می‌کند که بر اساس یک تجربه از دنیای واقعی طراحی شده است.

• (مسئله نان شهری و نان محلی) در زمستان سال ۱۳۹۲، برنامه خبری شبکه استانی کرمان اعلام کرد که در رودبار جنوب کرمان، تعداد کمی از مردم برای خرید نان به نانوائی‌ها مراجعه می‌کنند و بیشتر مشتریان نانوائی‌ها، مسافران هستند. از طرف دیگر، اکثر مردم نان خود را در خانه پخت می‌کنند. استدلال کنید که خرید نان شهری به صرفه‌تر است یا پخت نان محلی؟ دلایل خود را به زبان ریاضی بیان کنید.

۳.۵ توجه به نهادهایی که به عمومی کردن ریاضی می‌پردازند خانه‌های ریاضیات یکی از نهادهایی هستند که به نهادینه شدن آموزش ریاضی ناب در کشور، کمک کرده‌اند. لازم است توجه بیشتری به خانه‌های ریاضیات معطوف شود تا فعالیت‌های مفید آن بیش از پیش گسترش یابد. در این زمینه لازم است قدر داشته‌هایمان را بدانیم و جلوی انحراف‌های احتمالی را بگیریم، چرا که بسیاری از موسسات مبلغ محاسبه سریع ذهنی با استفاده از چرتکه به دنبال سوءاستفاده از شهرت خانه‌های ریاضیات برای کسب سود بیشتر بودند، اما با هوشیاری مسئولان شورای خانه‌های ریاضیات کشور، جلوی این انحراف گرفته شد. خانه‌های ریاضیات کارکردهای مختلفی دارند. بخشی از این کارکردها در مقالات مختلف مانند [۲، ۳] به تصویر کشیده شده‌اند. اما یکی از کارکردهای مهم خانه‌های ریاضیات ارتقاء سطح فرهنگی جامعه است که ارتباط نزدیکی با ریاضی قومی دارد. به عنوان مثال، خانه‌های ریاضیات می‌توانند با بیان تاریخ ریاضی در بین عموم مردم، ریاضیات فرهنگ مبنا را گسترش دهند. منظور از ریاضیات فرهنگ مبنا، ریاضیاتی است که توسط هر فرهنگ با مشخصات خاص تولید می‌شود. ریاضیات مبتنی بر فرهنگ برای اولین بار توسط بیشاپ^۹ (نقل شده در کلمنتس و التون [۹])، در سال ۱۹۹۸ مطرح شد، او معتقد بود که ریاضیات مستقل از فرهنگ نیست و همه اقوام دنیا در توسعه دانش ریاضی نقش داشته‌اند، در حالی که در حال حاضر فقط ریاضیات غربی است که در ریاضیات رسمی مدرسه‌ای گنجانیده شده است.

۴.۵ توجه به آموزش معلمان ریاضی در دانشگاه فرهنگیان پیش از آنکه معلمان با ریاضی ناب آشنا شوند، نمی‌توان انتظار داشت که دانش‌آموزان قادر به شناسایی ریاضی ناب باشند. برای این کار لازم است بیش از پیش، اساتید ریاضی مجرب با دانشگاه فرهنگیان همکاری نمایند و دست کم سالیانه یک درس را در دانشگاه فرهنگیان تدریس نمایند. اتفاقی که در سالهای اخیر رخ داده منجر به فاصله گرفتن اساتید مجرب ریاضی از دانشگاه فرهنگیان شده است، در حالی که معلمان ریاضی آینده، پرورش دهنگان نسل آینده کشور در عرصه ریاضی خواهند بود. پس لازم است در حد توان به آموزش بهتر معلمان ریاضی آینده همت گماشته شود. در این

Bishop^۹

زمینه لازم است هر یک از اعضای جامعه ریاضی دانشگاهی کشور، ارتباط مؤثری با آموزش و پرورش و انجمن معلمان ریاضی استان‌ها ایجاد نمایند و از این طریق برای ارتقا دانش معلمان ریاضی تلاش نمایند. آشنایی دانش‌آموزان با ریاضیات ناب از طریق درگیر کردن آنها در فرآیند حل مسئله پیش از این در خانه ریاضیات کرمان مجموعه‌ای از فعالیت‌ها تحت عنوان جشنواره خانه ریاضیات در دهه ریاضیات (اول تا دهم آبان) برگزار می‌گردید. در این جشنواره‌ها که تا کنون چندین دوره از آن برگزار شده است، چندین کارگاه برای دانش‌آموزان در سنین مختلف طراحی و اجرا گردید. دانش‌آموزان شرکت‌کننده در این جشنواره از سرتاسر استان انتخاب می‌شدند تا به این ترتیب فرصت برابر در اختیار همه قرار گیرد. در حاشیه این کارگاه‌های دانش‌آموزی، کارگاه ویژه معلمان ریاضی هم برگزار می‌شد. در این راستا یک طرح پژوهشی کشوری در مرکز پژوهشی ریاضی ماهانی، دانشگاه شهید باهنر کرمان تعریف شد. در این طرح پژوهشی، بخش‌های مختلفی برای مخاطبان مختلف (از جمله دانش‌آموزان، خانواده‌هایشان، و معلمان ریاضی) تدارک دیده شده و هدف اصلی آن آشنایی مخاطبان با ریاضیات ناب است. طراحان و مجریان کارگاه‌ها در این طرح پژوهشی، اساتید مجرب ریاضی از سرتاسر کشور هستند که تجربه کار با دانش‌آموزان و معلمان را دارند. در این زمینه، رایزنی‌های اولیه با برخی نهادها برای حمایت مالی از این طرح پژوهشی انجام شده است.

۶. سخن پایانی

در این مقاله به دو نوع افت ریاضی اشاره شد. افت نوع اول به عملکرد ضعیف دانش‌آموزان ایرانی در مطالعه بین‌المللی تیمز اشاره داشت و افت نوع دوم بیشتر در رسانه‌ها بازتاب یافته بود و به عدم تمایل دانش‌آموزان برای انتخاب رشته ریاضی-فیزیک در پایه دهم مربوط می‌شد. در این نوشتار ریشه هر دو نوع افت، عدم توجه به ریاضی ناب معرفی شد. ریاضی ناب همان ریاضیاتی است که افراد را برای زندگی آینده‌شان آماده می‌کند، حل مسئله‌ها برای یادگیرندگان لذت بخش و معنادار است. اما آنچه در سطح جامعه آموزشی کشور رواج پیدا کرده است، یادگرفتن روش‌های سریع محاسبه، نکات میان‌بر و مطالبی از این دست است که صرفاً فرد را برای آزمون‌های غیراستاندارد آماده می‌کند و در اینجا، این روش‌های محاسبه سریع و نکات میان‌بر به عنوان ضدمثال‌هایی برای ریاضی ناب معرفی شده‌اند. نتیجه عدم آشنایی دانش‌آموزان با ریاضیات ناب این است که یادگیری ریاضی برایشان بدون معنا می‌شود، در نتیجه در انجام ریاضی استرس دارند، چراکه آن را علمی بدون کاربرد و غیر مرتبط با زندگی واقعی‌شان می‌یابند. به زعم نگارنده، چالش اصلی (حلقه مفقوده) آموزش ریاضی در سطح آموزش عمومی کشور، فقدان آموزش ریاضیات ناب است. نهادهایی مانند خانه‌های ریاضیات که به دنبال ترویج ریاضی ناب هستند، برنامه‌های انحرافی از قبیل محاسبه سریع با استفاده از چرتکه را تایید نمی‌کنند. خانه‌های ریاضیات به دنبال تقویت قدرت حل مسئله و تفکر هستند، چرا که زندگی عرصه حل مسئله است. همه مشاغل به نوعی با مسئله‌ها دست و پنجه نرم می‌کنند. از معلم و پزشک گرفته تا رئیس جمهور. پس ”بیایید از طریق یادگرفتن ریاضی ناب با اندیشه و تفکر، مسایل دنیای واقعی مان را حل کنیم“.

مراجع

- [۱] ۱. آرام (مترجم)، چگونه مسئله را حل کنیم؟ (جرج پولیا، ۱۹۴۵)، نشر کیهان، تهران، ۱۳۷۷.
- [۲] ۲. آ. پروانه و ع. رجالی، هشدار به جامعه ریاضی ایران و علاقه‌مندان به توسعه پایدار کشور، مجله فرهنگ و اندیشه ریاضی ۳۸ (۱۳۹۸)، شماره ۲، ۱۳-۳۵.
- [۳] ۳. ع. رجالی، ریاضیات چالش‌آور (بررسی خانه‌های ریاضیات در ایران)، مجله رشد آموزش ریاضی ۱۰۷ (۱۳۹۱) ۵۴-۵۵.
- [۴] ۴. ۱. رفیع‌پور، خانه‌های ریاضیات: تبیین نقش بی‌بدیل آن‌ها در عمومی‌کردن ریاضیات، دوفصلنامه ترویج علم انجمن ترویج علم ایران، ۵ (۱۳۹۲) ۵۹-۶۲.
- [۵] ۵. ک. عبدالله‌پور و ۱. رفیع‌پور، پدیدارشناسی چرخه مدلسازی دانش‌آموزان پایه نهم در حل یک مسئله اصیل، فناوری آموزش ۱۱ (۱۳۹۶)، شماره ۳، ۲۳۷-۲۴۸.
- [۶] ۶. ز. گویا، یادداشت سردبیر، مجله رشد آموزش ریاضی، ۴۸ (۱۳۷۶) ۳-۴.
- [۷] ۷. ۱. مرادعلی‌زاده و ۱. رفیع‌پور، ریاضیات قومی: مطالعه قوم‌نگاری فرش‌بافان کرمانی، فصلنامه تعلیم و تربیت ۱۳۱ (۱۳۹۶)، شماره ۳، ۳۵-۵۴.
- [8] B. Barton, *Cultural and social aspects of mathematics education: responding to Bishop's challenge*, In: P. Clarkson, N and Presmeg (Eds.) In critical issues in mathematics education, pp. 121-134. Springer, New York, 2008.
- [9] M.A. Clements and N.F. Elerton, *Mathematics Education Research: Past, Present, and Future*, UNESCO Principal Regional Office for Asia and Pacific, Bangkok, 1996.
- [10] U. D'Ambrosio, *Ethnomathematics link between traditions and modernity*, Sense Publishers, Rotterdam-Taipei, 2001.
- [11] H. Gardner, *Intelligence Reframed Multiple Intelligences for 21st Century*, Basic Books, New York, 1999.
- [12] H. Gardner, *Five Minds for Future*, Harvard Business School Press, New York, 2006.
- [13] Z. Gooya and S. Gholamazad, *An overview of changes in school mathematics curriculum in Iran*, In: Proceeding of ICMI Study 24: School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes, and Opportunities. Tsukuba, pp. 125-132, 2018.
- [14] W.C. Higginson, *Freire, D'Ambrosio, oppression, empowerment and mathematics: Background notes to an interview*, For The Learning of Mathematics, **17** (3) (1993) 3-4.
- [15] G. Kaiser and B. Schwarz, *Mathematical modelling as bridge between school and university*, ZDM-The International J. Math. Ed. **36**(2) (2006) 196-208.
- [16] R.J. Milgram, *What is mathematical proficiency?* In: Alan H. Schoenfeld (ed.), *Assessment Mathematical Proficiency*, pp.31-58, Cambridge University Press, New York, 2007.
- [17] I.V.S. Mullis, M.O. Martin, P. Foy and M. Hooper, *TIMSS 2015 International Results in Mathematics*, Retrieved from Boston College, TIMSS PIRLS International Study Center website: <http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results>, 2016.

- [18] M. Stephan, *Embedding algorithmic thinking more clearly in the mathematics curriculum*, In: Proceedings of ICMI Study 24: School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes, and Opportunities. Tsukuba, pp. 483–490, 2018.
- [19] L. Verschaffel, *Taking the modeling perspective seriously at the elementary school level: promises and pitfalls (plenary lecture)*, In: A.D. Cockburn and E. Nardi (eds.), Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, pp. 64–80, Norwich, England University of East Anglia, 2002.



جلد ۱، شماره ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۰) صص ۲۳-۱۴

شناسه DOI: 10.22067/tmsj.2021.39660

<https://tmsj.um.ac.ir>

مقاله علمی-ترویجی

مروری بر پیدایش و تحول مفهوم تابع

مریم امیاری

گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد

amyari@mshdiau.ac.ir

چکیده. در این مقاله به بررسی تکامل تدریجی مفهوم تابع که یکی از اساسی‌ترین مفاهیم در ریاضیات امروزی است، می‌پردازیم و سیر تحول این مفهوم را از قرون وسطی تا عصر حاضر مرور می‌کنیم.

۱. مقدمه

شاخه‌های متنوع ریاضیات به طور مستقیم یا غیر مستقیم با تابع سر و کار دارند. آنالیز ریاضی توابعی با یک یا چند متغیر و خواص آنها و مشتقات آنها را مورد بررسی قرار می‌دهد، نظریه دیفرانسیل و معادلات انتگرالی در صدد حل معادلاتی است که جواب آنها تابع است. آنالیز تابعی روی فضاهایی که عناصر آنها تابع هستند کار می‌کند، آنالیز عددی فرآیندهای کنترل خطاها در ارزیابی انواع مختلف تابع را مطالعه می‌کند. برخی دیگر از زمینه‌های ریاضی، با گسترش‌هایی از مفهوم تابع سر و کار دارند، به عنوان نمونه، در جبر عمل و رابطه و در منطق ریاضی توابع بازگشتی مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

مفهوم "تابع"، که امروزه اکثر ریاضیدانان پذیرفته‌اند، بسیار آهسته شکل گرفت. این مفهوم به راستی یکی از مهمترین مفاهیم ریاضی است. در این مقاله مروری مختصر بر چگونگی شکل‌گیری آن داریم. همان‌گونه که

2020 Mathematics Subject Classification. 01A65

کلید واژگان. تابع، رابطه، تابع تحلیلی، متغیر مستقل، متغیر وابسته.

تاریخ: دریافت ۹۹/۸/۳ پذیرش ۹۹/۱۱/۱۰.

نقطه، خط و صفحه، مفاهیم بنیادین در هندسه اقلیدسی هستند، تابع، مشتق و انتگرال نیز اساس آنالیز ریاضی را که به مثابه قلب ریاضیات است، تشکیل می‌دهد.

مثال‌های خاصی از تابع را می‌توان در ریاضیات کهن یافت. به عنوان نمونه، شمارش به عنوان تناظری بین مجموعه‌ای از اشیاء و قطعه‌ای متناهی از اعداد طبیعی؛ چهار عمل اصلی به عنوان توابعی از دو متغیر؛ جدول‌های تقابلی بابلی^۱؛ محاسبه مربع‌ها و مکعب‌ها و همچنین ریشه‌های دوم و سوم. از دیدگاه تاریخی، برخی از ریاضی‌دانان تصور درستی از مفهوم امروزی تابع داشته و به نوعی به آن نزدیک شده بودند.

به عنوان مثال نیکلا اورسم^۲ (1382 – 1323) که در بررسی پدیده فیزیکی دما، بین دما در یک نقطه و گسترش آن در راستای یک میله تمایز قائل شد و برای این دو کمیت اصطلاحات عرض (Latitudo) و طول (Logitudo) را به کار برد. در کارهای او ایده‌ای کلی از متغیرهای مستقل و وابسته دیده می‌شود. ولی ضرورت وجود مفهومی به نام تابع به عنوان یک مفهوم بنیادین در پژوهش‌های ریاضی، نسبتاً جدید است و قدمت آن به قرن ۱۷ میلادی باز می‌گردد.

واقعیت این است که مفهوم تابع در ریاضیات به‌طور اتفاقی پدیدار نشد. بنتو کاراچا^۳ در سال ۱۹۵۱ نشان داد که استفاده از ابزارهای ریاضی در بررسی کمی پدیده‌های طبیعی توسط گالیله (1642 – 1564) و کیپلر (1630 – 1571) به دلیل نیاز به آن آغاز شد. گسترش استفاده از این ابزارها بر اساس توانایی‌هایی که جبر جدید (ابداع شده توسط ویت^۴) در بیان مطالب فراهم می‌نمود و به خصوص هندسه تحلیلی که توسط دکارت و فرما ابداع شد، امکان پذیر گردید. بر خلاف تفکر قرون وسطایی، گالیله بر این باور بود که ریاضیات مناسب‌ترین زبان برای مطالعه طبیعت است. طبق نظر گالیله برای مطالعه یک پدیده می‌بایستی کمیت‌ها اندازه‌گیری شده و نظم بین آن‌ها مشخص شود و پس از آن، قواعد ریاضی که این روابط را توصیف می‌کنند به ساده‌ترین شکل ممکن به دست آیند.

در قرن‌های ۱۷ و ۱۸ میلادی، ریاضی و فیزیک بیشترین درهم‌آمیختگی را داشتند. نیوتون به عنوان یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان تمام دوران، فیزیکدان برجسته‌ای نیز بود. علاوه بر او بسیاری دیگر از ریاضی‌دانان شاخص مانند برنولی، لاگرانژ و فوریه نیز علاقه زیادی به مسائل فیزیکی داشتند. سه عامل تاثیرگذار در شکل‌گیری و گسترش مفهوم تابع در قرن‌های ۱۷ و ۱۸ میلادی را می‌توان به ترتیب زیر برشمرد:

۱- استفاده از نمادگذاری جبری که حامل جنبه‌های مهمی مانند سادگی و دقت بود و دستکاری در عبارت‌های تحلیلی را مجاز می‌نمود و علاوه بر آن اطلاعات بسیاری را در خود جای می‌داد.

^۱ Babylonian tables of reciprocals

^۲ Nicola Oresme

^۳ Bento Caraça

^۴ Viète

۲- نمایش هندسی که ابزار شهودی درک مسئله را فراهم می‌کرد. مثال مهمی از آن ارتباط بین مماس بر یک خم و مشتق تابع است.

۳- روابط بین پدیده‌های فیزیکی که به دلیل وجود نظم، انگیزه اصلی را برای مطالعه خانواده‌های توابع فراهم آورد.

توابع ابزارهای فوق‌العاده‌ای برای مسائل وردشی هستند. یک کمیت ممکن است با زمان، یا در مکان، یا نسبت به کمیت‌های دیگر و یا به‌طور همزمان در ابعاد متعدد، تغییر کند. چنین تغییری ممکن است سریع یا کند باشد و یا در نقطه‌ای ناپدید شود. این تغییرات ممکن است از الگوهای ساده یا پیچیده و محدودیت‌های مختلف پیروی کنند. با ادراک امروزی ما همه این‌ها به کمک توابع قابل بیان هستند. اما ریاضی‌دانان در طول زمان با توابعی کار کردند که صرفاً متناظر با یک عبارت تحلیلی، یک نمایش هندسی یا یک پدیده مشخص فیزیکی نبودند. به این ترتیب مفهوم تابع شروع به تحول نمود و از مفهوم اولیه خود فاصله گرفت. این تحول لحظه‌های شگفت‌آوری نیز داشت، به عنوان مثال، پدیدار شدن تابعی که در همه نقاط پیوسته است ولی در هیچ نقطه‌ای مشتق پذیر نیست.

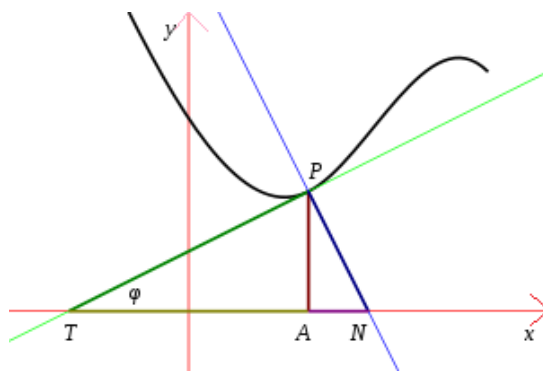
به‌طور خلاصه، دو جنبه اصلی در تکامل مفهوم تابع از اولویت برخوردار بودند: سازگاری و کلیت. البته بحث‌های پیش آمده تنها به جنبه‌های مجرد محدود نمی‌شد بلکه در راستای مسائل اصلی ریاضیات در عصر خود حرکت می‌کرد. در ادامه با جزئیات بیشتری به بررسی سیر این تحول می‌پردازیم. عمده مطالب این مقاله برگرفته از مراجع [۲، ۷] است.

۲. مفهوم تابع در قرن هفدهم، هجدهم و نیمه اول قرن نوزدهم

ضرورت وجود مفهوم تابع به عنوان یک شیء مستقل ریاضی را می‌توان در آغاز حساب بی‌نهایت کوچک‌ها ردیابی کرد. دکارت (1650 – 1596) آشکارا بیان کرد که یک معادله از دو متغیر که از نظر هندسی به وسیله یک خم نمایش داده می‌شود، وابستگی بین مقادیر متغیرها را نشان می‌دهد، و به این ترتیب ایده مشتق به عنوان راهی برای یافتن مماس بر این خم در هر نقطه، پدیدار شد.

لایبنیتس (1716 – 1646) اولین کسی بود که در سال ۱۶۷۳ از اصطلاح “تابع” استفاده کرد. او اصطلاح تابع را برای نشان دادن این که کمیت‌های هندسی مانند پاره‌خط‌های تحت مماس (TA) و تحت قائم (AN) بر یک خم به مکان نقطه روی خم وابسته هستند، به کار برد، نمودار ۱ را ببینید. وی همچنین اصطلاحات “ثابت”، “متغیر” و “پارامتر” را معرفی کرد.

با گسترش مطالعه خم‌ها به کمک روش‌های جبری، اصطلاحی برای نمایش مقادیر وابسته به یک متغیر با استفاده از یک عبارت تحلیلی، به طور روزافزون لازم شد. سرانجام، بین سالهای ۱۶۹۴ و ۱۶۹۸، اصطلاح “تابع” برای این هدف در مکاتبات ممتد بین لایبنیتس و ژان برنولی (1748 – 1667) پذیرفته شد. با این وجود، اصطلاح تابع تا انتشار واژه نامه ریاضی در سال ۱۷۱۶ ظاهر نگردید. ولی دو سال بعد برنولی مقاله‌ای نوشت که بازتاب گسترده‌ای داشت و تعریف تابع را از قید صورت‌های هندسی آن رها کرد و نوشت



نمودار ۱: نمایش پاره خط مماس و پاره خط تحت قائم بر یک خم

“تابع یک مقدار متغیر، کمیتی است که به نوعی از آن متغیر و مقادیر ثابت تشکیل شده است.” اوایلر دانشجوی سابق برنولی، بعداً از اصطلاح “عبارت (ضابطه) تحلیلی^۵” به جای “کمیت” برای تعریف تابع استفاده کرد. بنابراین مفهوم تابع در عمل با مفهوم “عبارت تحلیلی” یکسان گرفته شد. این اصطلاح به زودی به تناقض های متعددی منجر شد. در واقع، یک تابع می تواند توسط چندین عبارت تحلیلی متفاوت مشخص شود. از سوی دیگر و به زبان امروزی، می توان گفت که تعریف اوایلر فقط توابع تحلیلی، که یک زیر مجموعه کوچک از مجموعه کوچک دیگری یعنی توابع پیوسته است، را در بر می گرفت.

نیوتن (1642 – 1727) یکی از اولین ریاضی دانانی بود که مفهوم تابع را به کار برد. او از لغت “fluent” برای معین کردن متغیر مستقل و همچنین از کلمه “relata quantitas” برای نمایش متغیرهای وابسته و لغت “genita” برای ارجاع به مقادیر بدست آمده از بقیه با استفاده از چهار عمل اصلی حسابان، استفاده کرد. او همچنین نشان داد چگونه توابع می توانند به صورت یک سری توانی نامتناهی نمایش داده شوند.

اوایلر (1707 – 1793) با آگاهی از کاستی ها تعریف دیگری ارائه داد که در آن زمان مورد توجه قرار نگرفت، او تابع را با یک نمودار تعبیر کرد ولی هرگز کاری ساختار یافته در مورد توابع انجام نداد. در کارهای اوایلر و در زمان او، توجه معطوف به توابع خاص حقیقی بود که در هندسه، مکانیک، نجوم، احتمال و سایر کاربردها ظاهر می شدند. مطالعه این توابع زمینه ای گسترده و چندجانبه در پژوهش را گشود که خیلی زود چندجمله ای های متعامد را نیز شامل شد، حالت خاصی از نظریه ای کلی که در آینده ای دور پدید آمد.

در یک مسیر متفاوت، لاگرانژ (1736 – 1813) حساب دیفرانسیل خود را بر این اساس بنا نهاد که همه توابع تحلیلی هستند و به صورت موضعی در نزدیکی هر نقطه ای بسط سری توانی دارند.

تا آنجا که به جریان اصلی ریاضیات مربوط می شود، در طول قرن هجده میلادی، مشخص کردن یک تابع از طریق عبارت تحلیلی بدون تغییر باقی ماند. اما در قرن نوزدهم، مفهوم تابع طوری دستخوش گسترش و شفاف سازی های پی در پی قرار گرفت که ماهیت و معنی آن را عمیقاً تغییر کرد.

Analytical expression ^۵

بحث و جدل در مورد مساله "تارهای مرتعش" پیشرفت قابل توجهی در جهت گسترش مفهوم تابع ایجاد کرد. این مساله توسط معادله زیر بیان می‌شود

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

که در آن y متغیر وابسته است و تغییر مکان از موقعیت تعادل را نشان می‌دهد. همچنین x فاصله از مبدا و t زمان را نشان می‌دهند. مجادله در گرفته میان دالامبر (1783 – 1717) که توابعی را در نظر می‌گرفت که در واقع باید جواب این مساله باشند، با ریاضی‌دانانی مانند اویلر و برنولی منجر به بحث در مورد جواب‌های کلی معادله شد.

کارهای فوریه (1830 – 1768) که جریان دما در یک جسم را مطالعه می‌کرد، سهم مهمی در تکامل مفهوم تابع توسط معاصرانش داشت. در واقع تعبیر اویلر از توابع حقیقی دلخواه که توسط نمودارهای آنها داده می‌شد، از حدود سال ۱۸۰۷ مورد توجه ژوزف فوریه قرار گرفت و در سال ۱۸۲۲ در شاهکار او^۶ که نقطه عطفی در تکامل آنالیز کلاسیک و فیزیک ریاضی بود، اوج گرفت (به [۵] مراجعه کنید). فوریه دما را تابعی از دو متغیر زمان و فضا در نظر می‌گرفت. وی از کشف اویلر که در سن ۷۰ سالگی به آن دست یافته بود در مورد دستگاه متعامد از توابع مثلثاتی که در سری

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ظاهر می‌شوند، استفاده کرد تا نشان دهد که حتی یک تابع ناپیوسته متناوب را می‌توان بر حسب یک سری مانند فوق، بسط داد. امروزه به افتخار کار فوریه، این سری‌ها که ضرایب آن توسط فرمول اویلر به صورت

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

داده می‌شود، سری فوریه نامیده می‌شوند، هرچند که فوریه هیچ نقشی در نظریه بنیادی این سری‌ها نداشته است و در واقع ابداع آنها توسط دانیل برنولی در سال ۱۷۵۰ و در ارتباط با مساله تارهای مرتعش، انجام پذیرفته است. فوریه حدس زد که شاید بتوان هر تابع را در یک بازه مناسب به یک سری مثلثاتی بسط داد ولی هرگز اثبات ریاضی از این حدس ارائه نداد.

این ادعای فوریه، که توابع ناپیوسته می‌توانند توسط یک سری نامتناهی با توابع پیوسته (و حتی تحلیلی) از توابع بیان شوند، معاصرانش به ویژه، دیریکله (1859 – 1805) در برلین و ریمان (1866 – 1826) در گوتینگن، را حیرت زده کرد. دیریکله که در پاریس تحصیل کرده بود، اولین اثبات دقیق از همگرایی سری فوریه را برای رده بزرگی از توابع متناوب (آنهايي که به جز در تعداد متناهی ماکزیمم و مینیمم موضعی پیوسته هستند

^۶. La Théorie de Analytique la Chaleur (۱۸۲۲).

و منحنی پرشی تا بی نهایت ندارد) ارائه داد. برای انجام این کار، او ناچار بود مفهوم تابع را از نمایش تحلیلی آن جدا کند و این کار را در سال ۱۸۳۷ با ارائه تعریف تابع به عنوان تناظری دلخواه بین متغیرهای عددی، انجام داد. به تعبیر او، "یک تابع تناظری است بین دو متغیر که به هر مقدار از متغیر مستقل، یک و فقط یک مقدار از متغیر وابسته متناظر می‌کند". چندی بعد "جمله به هر مقدار از متغیر مستقل" به جمله "به هر مقدار از متغیر مستقل که متعلق به مجموعه خاصی (دامنه تابع) است" تغییر یافت. این تعریف آنقدر کلی بود که می‌توانست تابع را بدون داشتن فرمول (ضابطه) ریاضی فقط با کلمات معین کرد. مثلاً وی تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{x گویا است} \\ 0 & \text{x گنگ است} \end{cases}$$

را به عنوان تابعی که در هیچ نقطه‌ای پیوسته نیست معرفی کرد [۳]. این تابع بعدها به نام تابع دیریکله معروف شد. از دیدگاه ریاضی دانان قرن هجدهم، هیچ فرمول (ضابطه) ریاضی وجود ندارد که به کمک آن بتوان تابع دیریکله را محاسبه کرد. در صورتی که چنین تعریفی تابع را به طور کامل مشخص می‌کند. مثلاً می‌توانیم بگوییم $f(\frac{2}{3}) = 1$, $f(\sqrt{2}) = 0$.

حتی قبل از تلاش‌های دیریکله برای دقت بخشیدن به نتایج فوریه، لویی کوشی (۱۷۸۹ – ۱۸۵۷) کارهای زیادی برای روشن شدن مفهوم تابع انجام داده بود. وی نه تنها اثبات قابل قبولی را از این واقعیت که هر تابع پیوسته انتگرال‌پذیر است به انجام رسانده بود، بلکه یک مثال از یک تابع کراندار بی نهایت بارمشتق‌پذیر

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-2}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

را ارائه کرد که نمی‌تواند در همسایگی $x = 0$ با یک سری توانی بر حسب x بیان شود.

۳. مفهوم تابع در نیمه دوم قرن نوزدهم

بیش از همه، این ریمان (۱۸۶۶ – ۱۸۲۶) و وایراشتراس (۱۸۹۷ – ۱۸۱۵) بودند که ایده‌های آنها حول و حوش سال ۱۸۸۰ نظریه توابع را چه در حالت حقیقی و چه مختلط، احاطه کرده بود. مقاله ریمان در سال ۱۸۵۴ بر اساس کار دیریکله، دومین پیشرفت اساسی در نظریه سری‌های فوریه بود. ریمان انگیزه یافته بود تا نظریه انتگرال توابع کراندار را بسیار دقیق‌تر و کلی‌تر از نظریه انتگرال کوشی برای توابع پیوسته، خلق کند. او در سال ۱۸۵۴ تابعی به شکل زیر تعریف کرد (این نتایج در سال ۱۸۶۷ منتشر شد):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = [x] + \frac{1}{2} \\ x - [x] & x < [x] + \frac{1}{2} \\ x - [x] - 1 & x > [x] + \frac{1}{2}, \end{cases}$$

سپس نشان داد $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$ به ازای هر x حقیقی تعریف می‌شود نقاط ناپیوستگی f دقیقاً نقاط $x = \frac{p}{2n}$ هستند که p و n نسبت به هم اولند. همچنین این تابع در نقاط ناپیوستگی، حد چپ و راست دارد و پرش‌ها در این نقاط با نزدیک شدن به نقطه صفر به مقدار صفر نزول می‌کنند. با این تعریف تابع f انتگرال‌پذیر ریمان است و اگر F تابع اولیه آن باشد، تابعی پیوسته است که در نقاط ناپیوستگی f مشتق‌پذیر نیست. از آنجا که تصور هندسی F ناممکن بود، این تابع در آن روزگار چندان خوشایند به نظر نمی‌رسید، ولی چون نقاطی که تابع در آن مشتق‌پذیر نبود زیر مجموعه‌ای از اعداد گویا بود، مورد پذیرش قرار گرفت.

کارهای ریمان نقطه آغاز بحث‌های بعدی در مورد سری فوریه و توابع حقیقی توسط ریاضی‌دانانی مانند هاینه، اسکولی، دینی و ریموند بین سال‌های ۱۸۷۰ تا ۱۸۷۵ شد. در مقالات این سالها پرش‌هایی مانند همگرایی، انتگرال‌گیری جمله به جمله، مجموعه ناپیوستگی‌ها و مانند آن، مطرح شدند.

موثرترین مدافع دقت در این دوران، وایراشتراس (1897 – 1815) بود. وی در طول زندگی طولانی خود، برخلاف ریمان که از شهود هندسی و فیزیکی استفاده می‌کرد، بر دقت فرمول‌بندی آنالیزی تاکید بسیار داشت. تاکید او بر تعریف‌های دقیق و کلی در آنالیز مختلط و همچنین روحیه نقادانه او نسبت به آنالیز حقیقی اصطلاح “دقت وایراشتراسی” را که توسط کلاین ابداع شده بود، بر سر زبان‌ها انداخت. وایراشتراس در سال ۱۸۷۲ تابع حقیقی

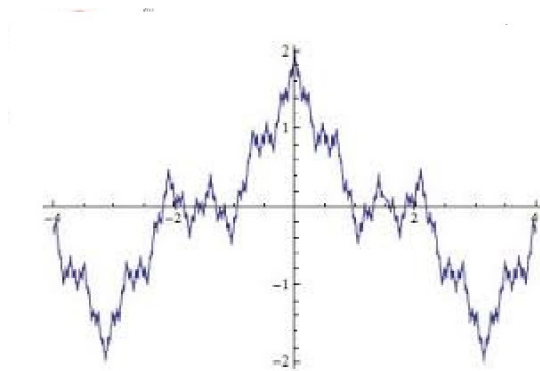
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad 0 < a < 1, ab > 1 + \frac{3}{2}\pi,$$

عدد صحیح فرد است

را معرفی کرد که در سرتاسر مجموعه اعداد حقیقی پیوسته و در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست، شکل ۲ را ببینید.

از سوی دیگر داربو (1917 – 1842) در نوشته معروف خود (۱۸۷۵) مثالی از تابعی پیوسته ارائه کرد که در هیچ بازه‌ای صعودی یا نزولی نیست، و علاوه بر آن که قابل نمایش به وسیله سری توانی نیست نمی‌توان آن را رسم کرد.

این مثال‌ها سبب بازنگری اساسی در آنالیز ریاضی گردید و این شیوه برخورد با مسئله، پرسش‌ها و مفاهیم جدیدی را در ارتباط با توابع مطرح کرد. آیا توابع کلی که با سری مثلثاتی نمایش داده می‌شوند برای ریاضی‌دانان مزیتی دارند یا فقط توابعی که با سری‌های توانی نمایش داده می‌شوند، مفید هستند؟ فایده این توابع عجیب



نمودار ۲: یکی از مجموع‌های جزئی سری $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$ که به تابع وایراشتراس معروف است. این تابع همه جا پیوسته است ولی هیچ جا مشتق پذیر نیست.

و غریب یا آنهایی که نمایشی به صورت سری توانی ندارند چیست؟ آیا وحشت هرمیت (1822 – 1901) از توابع پیوسته‌ای که هیچ جا مشتق‌پذیر نیستند، موجه است؟

۴. تابع از آغاز قرن بیستم تا عصر حاضر

وضعیت پیش آمده در اواخر قرن نوزده، توسط فرژ^۷ (1848 – 1925) به درستی جمع‌بندی شد [۴]. او دریافت که اطلاق کلمه “تابع” با گسترش علم، وسعت یافته است. در واقع اعمال سنتی مانند چهار عمل اصلی، توان‌ها و وارون آنها، دیگر برای ساختن توابع کافی نبود و اعمالی مانند حدگیری نیز وارد کار شده بودند. فرژ از این هم فراتر رفت و اظهار داشت که لزومی ندارد فقط اشیاء ریاضی دامنه و مقدار تابع را مشخص نمایند. به عنوان مثال او می‌گوید ” اگر امپراطوری آلمان را به عنوان مقداری در دامنه متغیر فرض کنیم، آنگاه برلین می‌تواند مقدار تابع برای این مقدار متغیر را نشان دهد“.

در اواخر قرن نوزدهم، با گسترش نظریه مجموعه‌ها که توسط گئورگ کانتور (1845 – 1918) آغاز شد و باعث تحولی عمیق در ریاضیات گردید، مفهوم تابع نیز به تکامل ادامه داد. در قرن بیستم، تابع به همه تناظرهای دلخواه بین مجموعه‌ها (چه عددی و چه غیر عددی) که در شرط یکتایی مقدار صدق کند، گسترش یافت. در سال‌های آغازین قرن بیستم، پس از کارهای وایراشتراس، داربو و کانتور وضعیت روشن‌تر ولی بسیار متغیر بود. در حالی که بسیاری از ریاضی‌دانان به این موضوع علاقه‌ای نشان نمی‌دادند و حتی از آن اجتناب می‌ورزیدند، عده کمی با انگیزه‌های متفاوت سعی در پاسخ دادن به سؤالات گوناگون داشتند، برای اطلاعات دقیق‌تر به [۱] رجوع کنید.

با ادامه تکامل مفهوم تابع، ریاضی‌دانان تابع را از تناظر به سمت رابطه سوق داده‌اند. یک خویشاوند نزدیک به مفهوم تابع، مفهوم ریخت در نظریه رسته‌ها است. از طرفی در نظریه محاسبات، تابع به عنوان یک قاعده محاسباتی در نظر گرفته می‌شود. همچنین در منطق و علوم رایانه از الگوریتم‌ها استفاده می‌شود که نمونه‌ای از توابع بازگشتی هستند.

امروزه ریاضیات مانند گذشته به طور اختصاصی به علوم فیزیکی وابسته نیست. این علم به طور گسترده‌ای دامنه کاربرد خود را وسعت داده و به ابزاری قوی در مطالعه پدیده‌های زیست‌شناسی، علوم انسانی و اجتماعی، اقتصاد و تجارت، ارتباطات، مهندسی و فن آوری تبدیل شده است. ریاضیات زیرساختی را برای توصیف، تشریح، پیش‌بینی و کنترل فراهم می‌آورد. تمام کاربردهای ریاضیات زمینه‌ای برای مفهوم مدل هستند. یک مدل ریاضی نمایشی است که عناصر اساسی در یک وضعیت داده شده را توصیف و در عین حال عناصر غیر ضروری را حذف می‌کند. یک مدل می‌تواند صورت‌های متفاوتی داشته باشد، ولی معمولاً از متغیرها، روابط بین این متغیرها و نرخ تغییرات آنها تشکیل می‌شود. فرآیند ساختن یک مدل مرحله‌ای دارد، از شناخت موقعیت اولیه گرفته تا توصیف ریاضی آن و سپس بازگشت دوباره به آن موقعیت. بسیار مهم است که در هر مرحله تاثیر عوامل بیرونی مختلف را مشخص نماییم. به این منظور لازم است که روابطی به فرم تابع بین پارامترهایی که این عوامل را تعریف می‌کنند و متغیرهای اصلی برقرار کنیم. بنابراین می‌توان گفت که امروزه مدل‌های ریاضی از مهمترین کاربردهای مفهوم تابع در شاخه‌های مختلف علم هستند.

این دامنه نفوذ همچنان ادامه دارد و بدون تردید با هر پیشرفت جدید علمی، گستره کاربرد این مفهوم ریاضی نیز وسیع‌تر می‌شود و با قدرت و زیبایی به توصیف پدیده‌های نو یاری می‌رساند.

۵. سخن پایانی

دیدیم که در آغاز، مفهوم تابع برای معین کردن تناظر بین اشیای هندسی به کار برده می‌شد و در ادامه از طریق ارتباطش با مطالعه عبارت‌های تحلیلی، جایگاه ویژه‌ای در جریان اصلی تفکر ریاضی به خود اختصاص داد. برای نشان دادن نقش تاریخی این مشارکت، یوشکوویچ در [۷] می‌گوید:

”معرفی تابع به روش تحلیلی، تحولات بنیادین در ریاضیات ایجاد کرد و به دلیل کارایی فوق‌العاده، این مفهوم دارای جایگاه کانونی در تمام علوم شده است.“

در واقع ارتباط بین عبارت‌ها (ضابطه‌ها)ی تحلیلی و اشیاء هندسی (نمودارها) آنقدر پرثمر است که هنوز هم جایگاه خود را در عمل و در ریاضیات امروزی آشکار می‌سازد.

در طول زمان مفهوم تابع دستخوش دگرگونی‌های بسیار شد. توابعی با رفتارهای کاملاً نامتعارف ظهور کردند و موجب طرح سؤالات بسیاری گردیدند. تابع هم به نفوذ خود در سایر علوم ادامه داد و هم در شاخه‌های نوپدید ریاضیات با دیدگاه‌هایی متفاوت ظاهر شد.

خلاصه آن که، قالب واحدی برای نگرش به مفهوم تابع و به کار بردن آن وجود ندارد و هر شاخه علم بسته به نیاز خود، قالب مورد نیاز خود را برمی‌گزیند. امروزه توابعی که در آنالیز ریاضی مورد مطالعه قرار می‌گیرند

و در برنامه‌های کاربردی استفاده می‌شوند، در بررسی وابستگی بین متغیرهای عددی نقش اساسی دارند و به همین دلیل، مفهوم تابع عددی به عنوان تناظری بین متغیرها، صرف نظر از ماهیت آنها، در کاربردهای امروزی هم به نقش کلیدی خود ادامه می‌دهد. توابعی که در جبر در نظر گرفته می‌شوند، بر مفهوم رابطه تاکید دارند و آنهایی که در منطق ریاضی و علوم رایانه ظاهر می‌گردند بیشتر از جنبه‌های الگوریتمی برخوردارند. برکسی پوشیده نیست که این مفهوم سایه خود را بر تمامی پهنای علم گسترانده است و پیشرفت‌های امروزی علم بدون وجود و به کار بردن آن قابل تصور نخواهد بود.

مراجع

- [1] L. Bianco, *The concept of function at the beginning of the 20th Century: A historiographical approach*, Transversal: International Journal for the Historiography of Science, **5** (2018) 171–192.
- [2] G. Birkhoff, E. Kreyszig, *The establishment of functional analysis*, Historia Math. **11** (1984), no. 3, 258–321.
- [3] G.L. Dirichlet, *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*, (French) J. Reine Angew. Math. **4** (1829) 157–169.
- [4] G. Frege, *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege* Oxford: Peter Geach and Max Black, 1960.
- [5] J.B.J. Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur*, Cambridge Library Collection - Mathematics, 2009.
- [6] J.P. Ponte, *The history of the concept of function and some educational implications*, The Mathematics **3** (1992) 9 pages.
- [7] A.P. Youschkevitch, *The concept of function up to the middle of the 19th century*, Arch. History Exact Sci. **16** (1976/77), no. 1, 37–85.



جلد ۱، شماره ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۰) صص ۲۴-۳۴

شناسه DOI: 10.22067/tmsj.2021.68234.1004

<https://tmsj.um.ac.ir>

مقاله علمی-ترویجی

تعبیر فیزیکی و هندسی مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری کسری

حسین غلامی چهکنند و مرتضی گچ‌پزان*

گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

gholamihosseini60@yahoo.com

gachpazan@um.ac.ir

چکیده. در این مقاله به توضیح تفسیر فیزیکی و هندسی مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری کسری (یعنی مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از مرتبه دلخواه) برای مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری کسری ریمان-لیوویل، مشتق‌گیری کسری کاپوتو و پتانسیل ریس پرداخته شده است.

۱. پیش‌گفتار

برای مشتق‌ها و انتگرال‌های مرتبه صحیح، تفسیرهای فیزیکی و هندسی وجود دارد که دانستن این تعبیرها، استفاده از آنها برای حل مسائل کاربردی در علوم مختلف را آسان می‌کند. اما در مورد مشتق‌ها و انتگرال‌های مرتبه کسری، وضع کمی فرق می‌کند. برای بیش‌تر از سیصد سال، تعبیر فیزیکی و هندسی قابل قبولی برای این نوع از مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری وجود نداشت. فقدان این، گواهی بر تشکیل اولین کنفرانس بین‌المللی حسابان کسری در سال ۱۹۷۴ در شهر نیوهایون^۱ در ایالات متحده است [۱۳]. اما در این کنفرانس،

2020 Mathematics Subject Classification. 26A33, 26A42.

کلید واژگان. مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری کسری ریمان-لیوویل، مشتق کاپوتو، پتانسیل ریس.
تاریخ: دریافت ۹۹/۱۰/۲۱ ویرایش ۰۰/۲/۱ پذیرش ۰۰/۲/۱۳

*نویسنده مسئول.

New Haven^۱

به این سوال پاسخی داده نشد و به همین خاطر، کنفرانس دیگری این بار در شهر استرثکلاید^۲ بریتانیا در سال ۱۹۸۴ برگزار شد [۷]. کنفرانس‌های بعدی نیز که در کشورهای ژاپن و بلغارستان برگزار شدند، نتوانستند برای این سوال پاسخ قابل قبولی ارائه دهند ([۴]، [۱۰]، [۳]، [۶]).

از آنجایی که مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری مرتبه‌کسری، تعمیم مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری مرتبه صحیح هستند، تعبیرهایی که برای مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری مرتبه کسری ارائه می‌شود بایستی ارتباط میان مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری مرتبه کسری و همتایان صحیحشان را به درستی نشان دهند. چندین محقق و ریاضی‌دان تلاش کردند تا مشتق‌ها و انتگرال‌های کسری را به هندسه تعابیر کسری ارتباط دهند و میان این دو موضوع ارتباط برقرار کنند که از جمله آن‌ها می‌توان به تلاش‌های نینگ‌ماتولین^۳ و مشرفی^۴ اشاره کرد ([۸]، [۹]). اما روتمن^۵ ثابت کرد که این روش مناسب نیست [۱۴]. یک رویکرد متفاوت برای تفسیر هندسی مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری کسری برپایه مرتبه α -ام توسط بن‌عدا^۶ پیشنهاد شد [۱]. اما به هر حال صحبت از یک تعبیر هندسی قابل پذیرش برای همه، کار دشواری است.

در این مقاله، یک روش جدید برای پاسخ به این چالش معرفی می‌کنیم. کار خود را با معرفی یک تفسیر هندسی برای چندین نوع انتگرال‌گیری مرتبه کسری آغاز می‌کنیم. آن چندین نوع عبارتند از: انتگرال‌گیری کسری از سمت چپ و راست ریمان-لیوویل^۷ و پتانسیل ریس^۸.

برهمن اساس، یک تفسیر فیزیکی برای انتگرال‌گیری کسری ریمان-لیوویل برحسب یک محور زمان ناهمگن پیشنهاد شده است. علاوه بر آن، یک تعبیر فیزیکی برای مشتق‌گیری کسری ریمان-لیوویل و مشتق‌گیری کسری کاپوتو^۹ پیشنهاد می‌دهیم. اما قبل از آن که وارد بحث پیرامون موضوع اصلی مقاله شویم لازم است در مورد نمادهای به کار رفته در این مقاله توضیح مختصری ارائه دهیم.

نماد ${}_a^c D_b^d u(x, t)$ به معنای گرفتن مشتق از تابع $u(x, t)$ است. در فرمول‌های مشتق کسری به طور معمول انتگرال نیز ظاهر می‌شود. دو اندیس پایین نماد فوق یعنی a و b ، حدود انتگرال‌گیری را مشخص می‌کنند و حرف c بالا سمت چپ نوع مشتق را مشخص می‌کند. به عنوان مثال اگر در این قسمت حرف R وجود داشته باشد یعنی مشتق ریمان-لیوویل به کار رفته است. نماد d بالا سمت راست نیز مرتبه مشتق را مشخص می‌کند. به عنوان نمونه، نماد ${}_0^R D_x^\alpha u(x, t)$ این طور خوانده می‌شود: مشتق ریمان-لیوویل تابع

Strathclyde^۲

R.R. Nigmatulin^۳

M. Moshrefi^۴

R.S. Rutman^۵

F. Ben Adda^۶

Riemann-Liouville^۷

Riesz potential^۸

Caputo^۹

$u(x, t)$ از 0 تا x و از مرتبه α . خوانندگان علاقه‌مند برای اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توانند به [۲] مراجعه کنند.

۲. توصیف هندسی عملگرهای مرتبه کسری

۱.۲ مفهوم هندسی عملگرهای مرتبه کسری (انتگرال کسری از سمت چپ ریمان-لیوویل). در این بخش یک مفهوم هندسی برای عملگر انتگرال ریمان-لیوویل ارائه خواهد شد. عملگر انتگرال ریمان-لیوویل را می‌توان به صورت رابطه (۱.۲) تعریف کرد:

$${}_0J_t^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \quad t \geq 0. \quad (1.2)$$

این رابطه را می‌توان به صورت رابطه زیر بازنویسی کرد [۱۲]:

$${}_0J_t^{(\alpha)} f(t) = \int_0^t f(\tau) dg_t(\tau) \quad (2.2)$$

که در این رابطه

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} [t^\alpha - (t-\tau)^\alpha]. \quad (3.2)$$

$g_t(\tau)$ دارای خواص قابل توجهی می‌باشد. در واقع اگر $t_1 = kt$ و $\tau_1 = k\tau$ در نظر گرفته شود، آن‌گاه

$$g_{t_1}(\tau_1) = g_{kt}(k\tau) = k^\alpha g_t(\tau). \quad (4.2)$$

با فرض ثابت بودن t در رابطه (۲.۲) و برای به دست آوردن تعبیر هندسی از این انتگرال، در فضای سه بعدی، سه محور عمود بر هم τ ، g و f در نظر گرفته می‌شود. در صفحه (τ, g) می‌توان دیواره‌ای به ارتفاع متغیر $f(\tau)$ رسم کرد که لبه بالایی این دیوار، یک خم سه بعدی در صفحه $(\tau, g_t(\tau), f(t))$ برای $0 \leq \tau \leq t$ خواهد بود. همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، دیواره‌ی رسم شده در این فضای سه بعدی را می‌توان بر روی دو صفحه عمود بر هم از این فضا تصویر کرد. با مشاهده تصویر این دیواره، بر روی این صفحات می‌توان گفت:

۱. مساحت تصویر این دیواره، بر روی صفحه (τ, f) نشان دهنده‌ی مقدار انتگرال رابطه (۵.۲) است:

$${}_0J_t^{(1)} f(t) = \int_0^t f(\tau) dg_t(\tau) \quad t \geq 0. \quad (5.2)$$

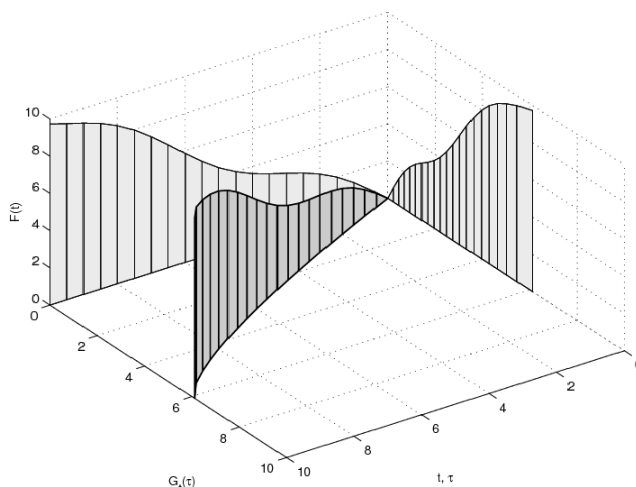
۲. مساحت تصویر این دیواره بر روی صفحه (g, f) ، مقدار انتگرال رابطه (۲.۲) یا همان مقدار انتگرال

مرتبه کسری (۱.۲) را نشان خواهد داد. به عبارت دیگر دیواره‌ی تعریف شده، دو سایه ایجاد خواهد

کرد. اولین سایه بر روی صفحه (τ, f) ایجاد می‌شود که همان تعریف مشهور سطح زیر منحنی تابع

$f(\tau)$ می‌باشد و این تعریف، تعریف انتگرال معمولی (مرتبه صحیح) خواهد بود. اما سایه ایجاد

شده بر روی (g, f) ، مفهوم هندسی انتگرال مرتبه کسری رابطه (۱.۲) برای یک نقطه ثابت t خواهد بود.



شکل ۱: تابع $f(t)$ و تصویر آن بر صفحات (τ, f) و (g, f)

اگر $\alpha = 1$ ، آنگاه $g_t(\tau) = \tau$ و هر دو تصویر مساوی خواهد بود. این موضوع به این معنی است که انتگرال معمولی (مرتبه صحیح)، از دیدگاه هندسی حالت خاصی از انتگرال مرتبه کسری ریمان-لیوویل است. حال سوال این است که اگر t تغییر کند چه حالتی رخ خواهد داد؟ اگر مقدار t تغییر کند، دیواره تعریف شده در قسمت قبل نیز همزمان با آن تغییر خواهد کرد. برای نشان دادن این موضوع می‌توان به شکل ۲ توجه کرد. تغییرات به وجود آمده در دیواره، بر تصویر آن در صفحه (g, f) تاثیر داشته و به طور همزمان آن را تغییر خواهد داد. بنابراین در این حالت با مفهوم هندسی دینامیکی انتگرال کسری برای یک تابع با متغیر t ، روبه‌رو خواهیم بود.

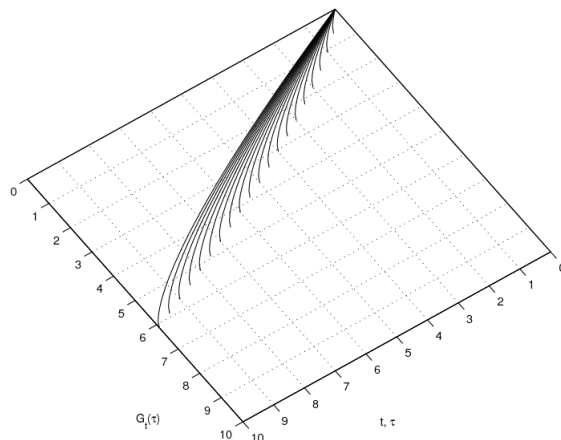
۲.۲ انتگرال کسری از سمت راست ریمان-لیوویل. انتگرال کسری از سمت راست ریمان-لیوویل را در نظر می‌گیریم [۱۲]:

$${}_t J_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b f(\tau) (\tau - t)^{\alpha-1} d\tau \quad (۶.۲)$$

که می‌توانیم (۶.۲) را به صورت زیر بازنویسی کنیم [۱۲]

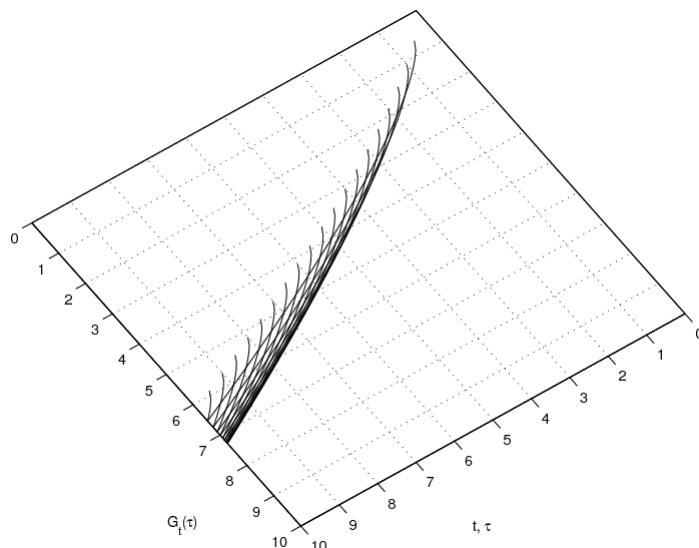
$${}_t J_b^\alpha f(t) = \int_t^b f(\tau) dh_t(\tau), \quad (۷.۲)$$

$$h_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \{t^\alpha + (\tau - t)^\alpha\} \quad (۸.۲)$$



شکل ۲: فرآیند تغییر دیواره برای $J_t^\alpha f(t)$ با $\alpha = 0.75$

با تغییر کران پایین در انتگرال (۷.۲) دیواره تعریف شده در قسمت قبل نیز همزمان با آن تغییر خواهد کرد. تغییرات به وجود آمده در دیواره بر تصویر آن در صفحه‌های (g, f) و (τ, f) به ترتیب نشان دهنده انتگرال کسری از سمت راست ریمان-لیوویل و انتگرال معمولی (مرتبه صحیح) می‌باشد.



شکل ۳: فرآیند تغییر دیواره برای $J_{10}^\alpha f(t)$ با $\alpha = 0.75$

نکته مهم دیگر آن است که شکل هندسی حاصل از فرآیند تغییر دیواره برای انتگرال‌های چپ و راست ریمان-لیوویل دارای تقارن می‌باشد اما این تقارن به معنی تقارن داشتن شکل نسبت به محور خاصی نمی‌باشد.

۳.۲ پتانسیل ریس. پتانسیل ریس^{۱۰} به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۲]:

$${}_0R_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b f(\tau) |\tau - t|^{\alpha-1} d\tau. \quad (9.2)$$

با کمی دقت متوجه می‌شویم که رابطه (۹.۲) با مجموع انتگرال‌های چپ و راست ریمان-لیوویل برابر می‌باشد، یعنی

$${}_0R_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau) (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b f(\tau) (\tau - t)^{\alpha-1} d\tau. \quad (10.2)$$

پتانسیل ریس را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود [۱۲]:

$${}_0R_b^\alpha f(t) = \int_0^b f(\tau) dr_t(\tau) \quad (11.2)$$

که در آن

$$r_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \{t^\alpha + \text{sign}(\tau - t) |\tau - t|^\alpha\} \quad (12.2)$$

شکل دیواره متناظر با پتانسیل ریس به وسیله تابع $r_t(\tau)$ توصیف می‌شود. در این حالت دیواره شامل دو قسمت است یکی برای $0 < \tau < t$ که متناظر با انتگرال چپ ریمان-لیوویل است و دیگری برای $t < \tau < b$ که متناظر با انتگرال راست ریمان-لیوویل می‌باشد.

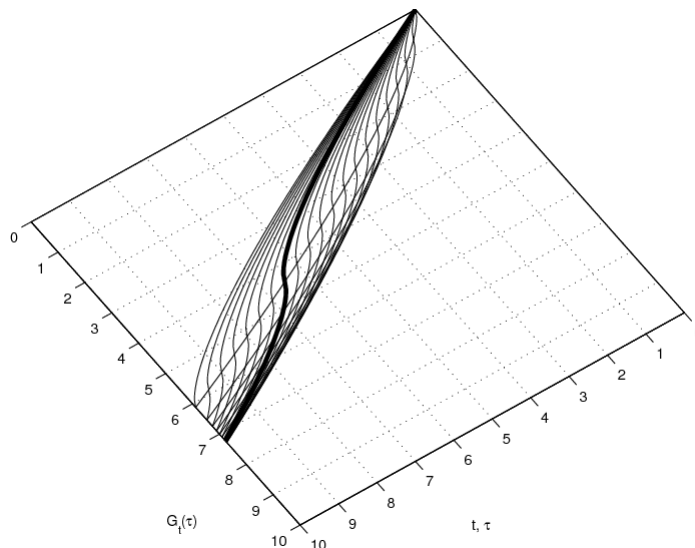
شکل ۴ از کنار هم قرار دادن شکل‌های ۲ و ۳ به دست آمده است که یک تعبیر هندسی برای (۱۰.۲) است. تصویر این دیواره روی صفحه (g, f) نشان‌دهنده پتانسیل ریس ذکر شده در (۹.۲) است. در حالی که تصویر آن در (τ, f) نشان‌دهنده انتگرال معمولی (مرتبه صحیح) است:

$$I(t) = \int_0^b f(\tau) d\tau.$$

از جمله کاربردهای پتانسیل ریس می‌توان به استفاده از آن در مدل‌سازی وسایل پزشکی از قبیل سمعک اشاره نمود. که در آن‌ها از معادله موج سه‌بعدی که برای قسمت وابسته به مشتق زمانی آن یعنی u_{tt} ، ضرایب معکوس وابسته به مکان مانند $\frac{1}{c(x)}$ در نظر گرفته می‌شود. این مسئله را می‌توان تبدیل به یک معادله انتگرال فردهم سه‌بعدی از نوع اول نمود که عملگر انتگرالی آن همان پتانسیل ریس می‌باشد [۵].

۴.۲ تعبیر فیزیکی مشتق کسری ریمان-لیوویل. در بخش قبل مفهوم هندسی انتگرال مرتبه کسری با اضافه کردن یک بعد سوم $(g_t(\tau))$ ، به صفحه $(\tau, f(\tau))$ مورد بررسی قرار گرفت. اگر در روابط بخش قبل،

^{۱۰}مارسل ریس (۱۸۸۶-۱۹۶۹) یک ریاضی‌دان مجارستانی است که به خاطر کار روی نظریه اعداد، نظریه پتانسیل، معادلات با مشتقات جزئی، میانگین ریس و تبدیل ریس مشهور است. او بیشتر عمر خود را در دانشگاه لوند سوئد گذراند.



شکل ۴: فرآیند تغییر دیواره برای پتانسیل ریس برای ${}_0R_{10}^\alpha f(t)$ با $\alpha = 0.75$

پارامتر τ به عنوان زمان در نظر گرفته شود، تابع $g(\tau)$ را می‌توان زمان انتقال یافته دانست. اما وجود دو محور زمان در این رابطه به چه معنی خواهد بود؟

برای پاسخ به این سوال نیاز است که برخی از تعبیرهای موجود در مورد زمان بررسی شود. در حال حاضر تصور ما از محور زمان، یک محور بی‌کران است که به بخش‌های مساوی تقسیم شده‌است (شکل ۵) [۱۲]. سوال این است که آیا تمام این قسمت‌ها با یکدیگر مساوی هستند؟

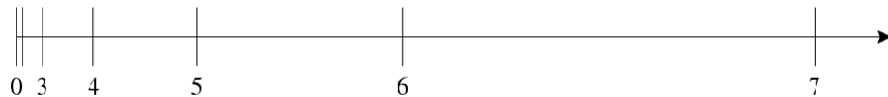
بدیهی است که قابلیت اندازه‌گیری و مقایسه دو بخش یا قسمت از هر کمیت فیزیکی، زمانی میسر خواهد بود که هر دو بخش به طور همزمان در اختیار باشد. به عبارت دیگر، در یک مکان و یک زمان، بتوان آن‌ها را با یک معیار ثابت اندازه‌گیری کرد و یا با کنار هم قراردادن این دو بخش آن‌ها را با هم مقایسه کرد و تساوی آن‌ها را بررسی نمود. با این استنباط از مساوی بودن دو کمیت، قسمت‌های محور زمان (تقسیمات زمانی محور نیمه بی‌کران) قابل مقایسه نخواهند بود چرا که این بخش‌ها تنها به صورت دنباله‌وار و پشت سر هم در اختیار ما هستند. به‌راستی چگونه می‌توان تقسیمات زمان را اندازه‌گیری کرد؟



شکل ۵: محور زمان همگن

محور زمانی که اکنون برای ما به عنوان یک محور بدیهی بوده و تمام روابط و معادلات بر اساس آن آنالیز و تحلیل می‌شود (شکل ۵) تنها با مشاهده برخی رویدادها، که حادث شدن آن‌ها به طور منظم و تکراری فرض

می‌شود، حاصل شده است. کلمنس^{۱۱} در مقاله خود می‌نویسد ”اندازه‌گیری زمان اساساً یک رویداد شمارشی است، هر پدیده‌ی تکراری در هر کجا که اتفاق بیفتد و قابل شمارش باشد در حقیقت یک اندازه از زمان در اختیار می‌گذارد. ساعت در واقع رویداد تیک را تکرار می‌کند و با شمارش این تیک‌ها، آن‌ها را ساعت، دقیقه و ثانیه و ... می‌نامیم. اما به واقع قادر نیستیم زمان مطلق بین دو تیک را مقایسه کنیم و نمی‌توان با قطعیت اعلام داشت که زمان بین دو تیک متوالی با یکدیگر برابر بوده است.“ مفهوم ناهمگن بودن زمان، در شکل ۶ نمایش داده شده است. این زمان مطلق را زمان می‌نامند. برای درک بیشتر فرض کنید شخص N در متحرکی نشسته است و دو وسیله اندازه‌گیری در اختیار دارد که یکی از آن‌ها یک سرعت‌سنج متحرک و دیگری یک ساعت است که زمان آن در حال کند شدن است، یعنی در این ساعت تفاوت بین هر دو بخش زمانی متوالی (هر دو تیک متوالی)، دو برابر بخش زمانی قبل از آن خواهد بود (جدول ۱).



شکل ۶: محور زمان ناهمگن (زمان کیهانی)

شخص N ، مقادیر سرعت نشان داده‌شده بر روی سرعت‌سنج را در هر ثانیه قرائت می‌کند، بدون آنکه از کند شدن ساعت در طول زمان آگاه باشد.

با استفاده از دو مجموعه داده، که یک مجموعه از آن‌ها داده‌های سرعت خودرو و دیگری زمان‌های قرائت شدن سرعت می‌باشد، شخص N می‌تواند مسافت پیموده شده را تخمین بزند. نتایج مشاهدات این آزمایش در جدول ۱ آمده است. بر اساس داده‌های ستون اول و سوم جدول، که توسط شخص N ، به ترتیب فوق‌الذکر

جدول ۱: سرعت ثبت شده با استفاده از ساعت

زمان محاسبه شده شخص N	زمان محاسبه شده شخص O	سرعت محاسبه شده شخص N
0	0	10
1	1	11
2	3	12
3	7	13
4	15	12
5	31	11
6	63	10
7	127	9

یادداشت شده است، می‌توان مسافت طی‌شده را محاسبه کرد:

$$S_N = 10 \times 1 + 11 \times 1 + 12 \times 1 + 13 \times 1 + 12 \times 1 + 11 \times 1 + 10 \times 1 = 79m. \quad (۱۳.۲)$$

با این حال اگر یک شاهد O ، از کند شدن زمان ساعت شخص N آگاه باشد و او مسافت طی‌شده را محاسبه کند مسافت طی‌شده واقعی توسط شخص N طبق رابطه (۱۴.۲) خواهد بود:

$$S_o = 10 \times 1 + 11 \times 2 + 12 \times 4 + 13 \times 8 + 12 \times 16 + 11 \times 32 + 10 \times 64 = 1368m. \quad (۱۴.۲)$$

اکنون با فهم دقیق صورت مساله، در ادامه سعی خواهد شد این مساله به مفهوم فیزیکی عملگرهای مرتبه کسری به ویژه مشتق کسری ریمان-لیوویل پیوند داده شود. بیان ریاضی مساله فوق به این ترتیب می‌باشد:

فرض کنید شخص N با دو وسیله اندازه‌گیری (ساعت و سرعت سنج) در داخل اتومبیلی نشسته است و در حال حرکت، داده برداری از زمان و سرعت حرکت در هر ثانیه را انجام می‌دهد. اما ساعت وی زمان صحیح و درستی را به او نشان نمی‌دهد. اگر τ زمان نادرست و $V(\tau)$ سرعت حرکت اندازه‌گیری شده توسط شخص N باشد، با توجه به نادرست بودن زمان، این شخص مسافت طی‌شده توسط اتومبیل، از لحظه شروع حرکت (مبدأ زمان) تا لحظه t ، را از رابطه (۱۵.۲) محاسبه خواهد کرد:

$$d_N(t) = \int_0^t V(\tau) d\tau. \quad (۱۵.۲)$$

حال فرض کنید که زمان درست T ، توسط شخص O محاسبه شده و این شخص از رابطه بین زمان درست T و زمان نادرست τ که به صورت $T = g(\tau)$ می‌باشد، آگاه است. بنابراین شخص N بازه‌های زمانی نادرست $d\tau$ را محاسبه می‌کند در حالیکه بازه زمانی درست $dT = dg(\tau)$ خواهد بود. پس شخص O ، مسافت طی‌شده حقیقی توسط اتومبیل را با استفاده از داده‌های سرعت‌سنج شخص N ، از رابطه زیر محاسبه خواهد کرد:

$$d_O(t) = \int_0^t V(\tau) dT = \int_0^t V(\tau) dg(\tau). \quad (۱۶.۲)$$

با توجه به مطالبی که در مورد مفهوم هندسی انتگرال مرتبه کسری بیان شد، می‌توان چنین نتیجه گرفت

$$d_O(t) = \int_0^t V(\tau) dg(\tau) = {}_0I_t^\alpha V(t). \quad (۱۷.۲)$$

بنابراین انتگرال مرتبه کسری تابع سرعت $V(t)$ یک متحرک، در حالتی که رابطه بین زمان محلی τ و زمان واقعی T ، توسط تابع $T = g_t(\tau)$ قابل بیان باشد، به مفهوم مسافت واقعی طی‌شده توسط آن متحرک خواهد بود. مسافت واقعی طی‌شده توسط یک متحرک، با استفاده از رابطه $d_O(t) = {}_0I_t^\alpha V(t)$ قابل بیان

است. بنابراین می‌توان چنین نتیجه گرفت

$$V(t) = {}_0D_t^\alpha d_O(t). \quad (۱۸.۲)$$

یعنی مشتق مرتبه کسری مسافت واقعی طی شده توسط یک متحرک که دارای زمان محلی τ و زمان واقعی $g_t(\tau)$ می‌باشد، به مفهوم سرعت محلی آن متحرک خواهد بود. از طرف دیگر سرعت واقعی متحرک از رابطه (۱۹.۲) قابل محاسبه است

$$V_O(t) = \frac{d}{dt} d_O(t). \quad (۱۹.۲)$$

با ادغام دو رابطه (۱۷.۲) و (۱۹.۲) می‌توان نتیجه گرفت

$$V_O(t) = \frac{d}{dt} {}_0I_t^\alpha V(t) = {}_0D_t^{1-\alpha} V(t). \quad (۲۰.۲)$$

بنابراین، مشتق مرتبه $(1 - \alpha)$ تابع سرعت محلی یک متحرک $(V(\tau))$ ، با زمان محلی τ و زمان واقعی $g_t(\tau)$ برابر با سرعت واقعی این متحرک، از دید یک ناظر خارجی خواهد بود.

۵.۲ تعبیر فیزیکی مشتق کسری کاپوتو. با به‌کاربردن انتگرال کسری از مرتبه $\beta = 1 - \alpha$ در دو طرف رابطه (۲۰.۲)، داریم

$$V(t) = {}_0I_t^{1-\alpha} V_O(t) = {}_0I_t^{1-\alpha} d'_O(t) = {}_0^C D_t^\alpha d_O(t)$$

که برای $0 < \alpha < 1$ مشتق کسری کاپوتو همان تعبیر فیزیکی مشتق کسری ریمان-لیوویل را داراست. این انطباق وقتی واضح‌تر می‌شود که $f(0) = 0$ ، در این صورت مشتق ریمان-لیوویل و مشتق کاپوتو از مرتبه α ($0 < \alpha < 1$) برابرند

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = {}_0D_t^\alpha f(t).$$

شرط $f(0) = 0$ ، یک شرط لازم برای مسئله است [۱۱].

۳. نتیجه‌گیری

مطالب ارائه شده در این مقاله می‌تواند در شفاف‌سازی پیرامون تعبیر فیزیکی و هندسی مشتق و انتگرال‌گیری کسری سودمند باشد. از آنجایی که مشتق و انتگرال‌گیری با مرتبه یک عدد صحیح تعبیرهای فیزیکی و هندسی روشنی دارد، این انتظار برای زمانی که مرتبه مشتق عدد صحیح نباشد یک انتظار به‌جا به شمار می‌رود. از این رو ارائه تعبیرهای فیزیکی و هندسی برای مشتق‌ها و انتگرال‌گیری‌های کسری می‌تواند منجر به ایجاد درک بهتر نسبت به حسابان کسری شود.

مراجع

- [1] F. Ben Adda, *Geometric interpretation of the fractional derivative*, J. Fract. Calc. **11** (1997) 21–52.
- [2] H.F. Ding and X.Y. Zhang, *New numerical methods for the Riesz space fractional partial differential equations*, Comput. Math. Appl. **63** (2012), no. 7, 1135–1146.
- [3] R. Gorenflo, *Afterthoughts on interpretation of fractional derivatives and integrals*, In: P. Rusev, I. Dimovski and V. Kiryakova (eds.), Transform Methods and Special Functions, pp. 589–591, Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1998.
- [4] V. Kiryakova, *A long standing conjecture failed?* In: P. Rusev, I. Dimovski and V. Kiryakova (eds.), Transform Methods and Special Functions, pp. 579–588, Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1998.
- [5] A.S. Leonov, *Applications of M. Riesz potentials for solving a 3D inverse problem of acoustic sounding*, J. Phys. Conf. Ser. **1205** (2019) 012036, 7 pp.
- [6] F. Mainardi, *Considerations on fractional calculus: interpretations and applications*, In: P. Rusev, I. Dimovski and V. Kiryakova (eds.), Transform Methods and Special Functions, pp. 594–597, Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1998.
- [7] A. McBride and G. Roach (eds.), *Fractional Calculus*, Research Notes in Mathematics 138, Pitman, Boston–London–Melbourne, 1985.
- [8] M. Moshrefi-Torbati and J.K. Hammond, *Physical and geometrical interpretation of fractional operators*, J. Franklin Inst. B **335** (1998), no. 6, 1077–1086.
- [9] R.R. Nigmatullin, *A fractional integral and its physical interpretation*, Theoret. and Math. Phys. **90** (1992), no. 3, 242–251.
- [10] K. Nishimoto (ed.), *Fractional Calculus and Its Applications*, Nihon University, Koriyama, 1990.
- [11] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [12] I. Podlubny, *Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation*, Fract. Calc. Appl. Anal. **5** (2002), no. 4, 367–386.
- [13] B. Ross, *Fractional Calculus and Its Applications*, Lecture Notes in Math. 457, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [14] R.S. Rutman, , *On physical interpretations of fractional integration and differentiation*, Theoret. and Math. Phys. **105** (1995), no. 3, 1509–1519.



جلد ۱، شماره ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۰) صص ۳۹-۳۵

شناسه DOI: 10.22067/tmsj.2021.40049

<https://tmsj.um.ac.ir>

مقاله علمی-ترویجی

راز فالنامه شیخ بهائی

محمد صال مصلحیان

گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

moslehian@um.ac.ir

چکیده. پس از مرور مختصر زندگی شیخ بهائی، فالنامه وی مورد کنکاش قرار گرفته و شیوه تدوین آن شرح داده شده است.

۱. زندگی نامه

بهاءالدین محمد بن عزالدین حسین بن عبدالصمد بن شمس الدین محمد جیل عاملی حارثی همدانی ملقب به شیخ بهایی یکی از معروف ترین علمای عصر صفوی است. او متولد سال ۹۲۵ هجری شمسی در بعلبک لبنان و متوفی سال ۱۰۰۰ هجری شمسی در اصفهان است و بنابر وصیتش در مشهد به خاک سپرده شد. در ۱۳ سالگی به همراه پدرش به قزوین مهاجرت کرد و ۳۰ سال در آنجا سکنی گزید. در زمان شاه عباس کبیر، شیخ الاسلام اصفهان شد و به این شهر خدماتی از جمله تعیین سمت قبله مسجد شاه، ساخت گلخن گرمابه‌ای موسوم به حمام شیخ بهایی، تقسیم آب زاینده رود به مناطق مختلف، و طراحی منار جنبان ارائه نمود. وی بر علوم زمان خود مسلط بود و حدود ۹۰ کتاب و رساله در اصول، فقه، حدیث، عرفان، ریاضی، هنر، ادبیات، نجوم، و مهندسی به رشته تحریر در آورد. از تالیفات او می توان حدیقه هلالیه، جامع عباسی، کشکول (مجموعه اشعار)، خلاصه الحساب، تشریح الافلاک، مثنوی نان و حلوا، مثنوی شیر و شکر، و فالنامه را نام

2020 Mathematics Subject Classification. 01-00, 01-01.

واژگان کلیدی. شیخ بهائی، فالنامه، زندگی‌نامه.

تاریخ: دریافت ۰۰/۲/۱ پذیرش ۰۰/۲/۲۰.

برد. در سال ۲۰۰۹، یونسکو برای گرامیداشت خدمات شیخ بهایی به علم ستاره شناسی نام او را به فهرست مفاخر ایران افزود.

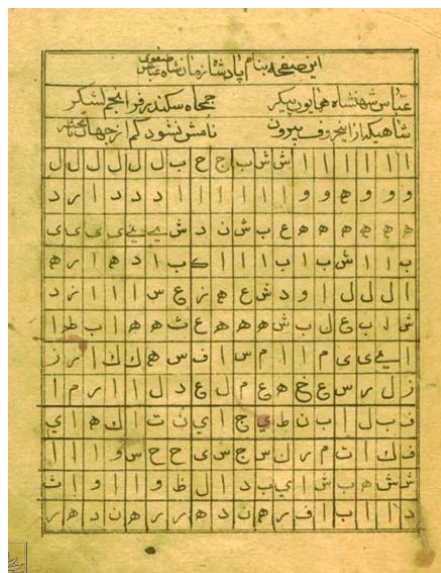


شکل ۱: فالنامه شیخ بهائی

۲. فالنامه

شیخ بهایی فالنامه اش را در سال ۹۷۳ هجری شمسی به درخواست شاه عباس کبیر تألیف کرد و یکی از فالنامه هایی است که سالیان دراز مورد توجه مردم قرار گرفته است. این فالنامه شامل ۲۶ جدول است: ستایش شاه عباس، دیدن سلاطین وقت، سرانجام زندگی، طلب هرگونه حاجت، زناشویی، نقل مکان، دیر یا زود آمدن غائب، حال غائب و مسافر، عاقبت کاری که در نظر است، ساختن بنا و عمارت، حصول مدعا و مقصود، مسافرت، وام گرفتن، معامله و تجارت، شرکت، فروختن جنس یا ملک، رفتن به گردش و شکار، زراعت، صاحب فرزند شدن، پسر یا دختر بودن حمل، خوبی و بدی طبیب، عاقبت حال بیمار، عاقبت کار زندانی و محبوس، غلبه بر دشمن، راست یا دروغ بودن خبر، پیدا شدن و نشدن گمشده. این فالنامه به عنوان بخشی از مجموعه صحف محمد وجدانی که صاحب صحف نهگانه در علوم خفیه بوده است در سال ۱۳۴۴ توسط انتشارات امیرکبیر به عنوان چاپ سوم منتشر گردید. روش تفأل زدن در مثال زیر گفته شده است:

پس از اطمینان از پاکیزگی جامه و بدن و با حضور قلب و توجه کامل به مبدأ آفرینش، نیت کنید و دو بیت مناجات را که در بالای جدول نوشته شده است بخوانید و بر محمد و آل محمد صلوات بفرستید. سپس یکی از حروف در جدول را نشان کنید (می توانید بعد از خواندن دو بیت، دیده بر هم نهاده، صلوات بفرستید، انگشت سبابه خود را روی یکی از خانه های جدول بگذارید). از همین حرف که مثلاً «ل» در سطر هفتم و ستون چهارم جدول است شمارش را شروع کرده رو به انتهای سطر و سپس پایین جدول حرکت کنید. شش حرف



شکل ۲: صفحه ای از فالنامه اصلی

ای ذره از ضیای تو شمس و قمر خواهیم که آگاه نمایی ما را												آگه ز وجود و عدم نوع بشر کاین نطفه ما پسر بود یا دختر											
ح	و	پ	م	ب	ک	ب	پ	ک	د	ک	ا	ر	ر	ی	ا								
پ	ی	س	آ	خ	ه	م	ص	ر	و	ن	ش	س	ق	ر	ی	ت							
ل	و	ح	ص	م	د	ر	ی	س	د	ر	ر	ن	ف	م	ا	ا							
ب	ن	ت	ت	ی	ا	ط	آ	چ	ح	ی	ی	ر	د	ا	ر	ن	د						
ف	ن	ی	ب	د	م	ک	ا	ی	ا	ی	خ	ه	ک	س	ف	ک	ت						
ن	ن	پ	د	ک	ت	ر	چ	ت	ر	ا	و	ا	ک	س	خ	ب	ر						
ا	و	ا	ل	ی	خ	ر	ا	ر	ت	خ	آ	ب	ن	ی	و	ن	ر						
خ	و	ک	ر	ت	م	ش	گ	ک	ش	ب	م	و	پ	ه	ی	خ	د						
ا	ه	ا	و	خ	ی	س	م	م	خ	و	س	ر	ر	م	د	د	و						
ش	ر	ی	و	ش	ت	ب	ی	ی	د	ش	ن	ب	ز	ش	م	ب							
ب	ا	آ	ن	خ	ح	ه	ا	ا	ل	ن	ف	ا	ش	ی	م	ت	ا						
ا	ش	ی	ق	ظ	ا	د	د	د	ا	ر	ل	د	د	د	ا	ر	ل						

شکل ۳: جدول ۱

می شماریم و حرف ششم را که «ر» است بر کاغذ می نویسیم. دوباره شش حرف می شماریم و حرف ششم را که «ی» است می نویسیم، و همچنان به سمت پایین جدول پیش می رویم تا سطر آخر جدول که آخرین حرف ششم «د» است:

ری ک ک ه ه م م ی ی ز آ ی ی د د

در ادامه انتخاب حروف به صورت شش حرف-شش حرف، به بالای جدول رفته شمارش را ادامه می دهیم تا به حرف «ا» قبل از «ل» (که ابتدا در نظر گرفتیم برسیم). حروف به دست آمده را به ترتیب بالای مجموعه حروف اول می نویسیم تا به مجموعه زیر دست یابیم:

د پ ر س ر ر ح س م ت چ ا ی س پ ت س ا
ری ک ک ه ه م م ی ی ز ا ا ی ی د د

حال برای مشخص شدن تقال، حروف مرتبه فرد را جداگانه و حروف مرتبه زوج را جداگانه می نویسیم و این دو سطر به دست می آید:

حروف مرتبه فرد: د ر ر ح م چ ی س ت ا ی ک ه م ی ا ی د
حروف مرتبه زوج: پ س ر س ت ا ی پ س ر ک ه م ی ز ا ی د
بنابراین جواب سوال و نتیجه حاصل فال ما عبارت است از:

در رحم چیست ای که می آید پسرست ای پسر که می زاید

در شبکه های اجتماعی بعضی افراد خود را با ۲۰ سال تجربه، متخصص گرفتن فال از کتاب فالنامه شیخ بهایی معرفی کرده اند. آنها ادعا می نمایند که در این فالگیری کاملاً مجرب هستند و آن را کمتر کسی بلد است. اما شیخ بهایی این جدول 12×18 خانه ای را چگونه تألیف کرده است. راز آن ساده است. در واقع او شش بیت شعر که مصرع هر کدام از ۱۸ حرف تشکیل شده است اختیار کرده و سپس حروف هر بیت را در یکی از دسته ستونهای

(۱-۳-۷)، (۲-۴-۸)، (۳-۹-۱۵)، (۴-۱۰-۱۶)، (۵-۱۱-۱۷)، و (۶-۱۲-۱۸)

نوشته است.

سپس از حرف اول مصرع اول شروع کرده به طور یک در میان افقی و از بالا به پایین آن را در خانه های جدول یادداشت کرده است.

سپس مصرع دوم را در خانه های خالی باقی مانده به طور افقی و از بالا به پایین وارد نموده است و با تکرار روند فوق جدول را تکمیل کرده است. برای مثال،

در رحم چیست ای که می آید پسرست ای پسر که می زاید

به صورت زیر در ستونهای ۳-۹-۱۵ جدول وارد می شود. جدول (۲) برای ورود مصرع اول و سپس جدول (۳) برای تکمیل ستونهای مربوط با مصرع دوم.

مابقی روند، شانس است و تابع قوانین احتمال!

۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
			ر						ر						د		
			م						چ						ح		
			س						ت						ی		
			ی						ك						ا		
			م						ی						ه		
			ی						د						آ		

شکل ۴: جدول ۲

۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
			ر						پ						و		
			ر						ر						س		
			م						س						ح		
			ا						چ						ت		
			س						ی						ی		
			س						ت						پ		
			ی						ر						ا		
			ه						ك						ك		
			م						م						ه		
			ز						ی						ی		
			ی						ا						آ		
			د						د						ی		

شکل ۵: جدول ۳

نکته: این مقاله در زمانی که نویسنده دانشجوی کارشناسی ارشد بوده است نگارش یافته است.

مراجع

- [۱] م. شیخ بهائی، فالنامه، اصفهان، ۹۷۳.
 [۲] نامعین، شیخ بهائی، ویکی پدیا، شیخ-بهایی/ <https://fa.wikipedia.org/wiki/شیخ-بهایی>



جلد ۱، شماره ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۰) صص ۴۰-۶۸

شناسه DOI: 10.22067/tmsj.2021.68541.1005

<https://tmsj.um.ac.ir>

مقاله علمی-ترویجی

نامساوی‌های ابرانقباضی و سوبولف لگاریتمی

سلمان ابوالفتح بیگی

پژوهشکده ریاضیات، پژوهشگاه دانشهای بنیادی

salman@ipm.ir

چکیده. نامساوی‌های ابرانقباضی و سوبولف لگاریتمی ابزارهای مهمی در ریاضیات هستند که کاربردهای زیادی در آنالیز، نظریه احتمالات، هندسه، علوم کامپیوتر و نظریه اطلاعات پیدا کرده‌اند. در این مقاله، مفاهیم و قضایای اولیه این نظریه بیان شده و به کاربردهایی از آن اشاره می‌شود.

۱. پیش‌گفتار

هر ماتریس تصادفی^۱ T یک نگاشت انقباضی^۲ تحت نرم L_p است، یعنی $\|T\|_{p \rightarrow p} \leq 1$ به ازای هر $1 \leq p \leq \infty$. این خاصیت نتیجه ساده‌ای از محدب بودن تابع $x \mapsto x^p$ است. بعضی از ماتریس‌های تصادفی در نامساوی قوی‌تری صدق می‌کنند:

$$\|Tf\|_p \leq \|f\|_q, \quad \forall f, \quad (1.1)$$

2020 Mathematics Subject Classification. 47D07, 60J25, 37A25, 39B62.

کلیدواژگان. نامساوی ابرانقباضی، نامساوی سوبولف لگاریتمی، نیم‌گروه مارکوف، زمان آمیختگی.

تاریخ: دریافت ۹۹/۱۱/۶ پذیرش ۰۰/۲/۳۰.

Stochastic matrix^۱

Contraction^۲

برای $1 \leq q < p \leq \infty$. این نامساوی به این دلیل قوی‌تر است که تابع $q \mapsto \|f\|_q$ نانزولی است. در نتیجه نامساوی (۱.۱) گزاره قوی‌تری از انقباضی بودن T را بیان می‌کند و به این دلیل به آن نامساوی ابرانقباضی^۳ گویند. اثبات نامساوی‌های ابرانقباضی معمولاً کار دشواری است. با این حال وقتی T متعلق به یک نیم‌گروه پیوسته از ماتریسهای تصادفی^۴ باشد، نامساوی‌های ابرانقباضی را می‌توان با استفاده از دسته دیگری از نامساوی‌ها به نام نامساوی‌های سوبولف لگاریتمی^۵ اثبات کرد.

نامساوی‌های ابرانقباضی ابتدا در مطالعه نظریه میدان‌های کوانتمی ظاهر شدند. سپس نامساوی‌های سوبولف لگاریتمی و ارتباط آنها با نامساوی‌های ابرانقباضی مورد توجه قرار گرفتند. برای اطلاع در مورد تاریخچه این مطالب به [۳] ارجاع می‌دهیم. در سال‌های اخیر این نامساوی‌ها کاربردهای زیادی در شاخه‌های مختلف ریاضی پیدا کردند. از جمله این کاربردها می‌توان به تقریب زمان آمیختگی^۶، اثبات نامساوی‌های تجمع اندازه^۷، مسأله هزینه ترابری^۸، نابرابری‌های هم‌محیطی^۹ و آنالیز توابع بولی اشاره کرد. هدف از این مقاله ارائه مقدماتی از نظریه نامساوی‌های ابرانقباضی و سوبولف لگاریتمی، و اشاره به بعضی از کاربردهای آنها است.

۲. نیم‌گروه‌های مارکوف

فرض کنید (Ω, Σ, π) یک فضای احتمال باشد. برای سادگی در ابتدا فرض می‌کنیم Ω یک مجموعه متناهی با حداقل دو عضو باشد. همچنین فرض می‌کنیم $\pi(x) \neq 0$ برای هر $x \in \Omega$. مجموعه $L^2(\pi)$ را فضای خطی توابع حقیقی $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ همراه با ضرب داخلی

$$\langle f, g \rangle_\pi = \mathbb{E}[fg], \quad (1.2)$$

بگیرید که در آن امید ریاضی نسبت به توزیع احتمال π است. این ضرب داخلی یک نرم روی این فضا القاء می‌کند:

$$\|f\|_2 = (\mathbb{E}f^2)^{1/2}.$$

ما در اینجا هر عدد حقیقی $c \in \mathbb{R}$ را نیز به عنوان یک تابع (تابع ثابت) عضو $L^2(\pi)$ می‌گیریم. به طور خاص 1 را به عنوان تابع ثابتی می‌گیریم که در هر نقطه x برابر 1 است. واریانس یک تابع $f \in L^2(\pi)$ برابر است

^۳Hypercontractivity inequality

^۴Continuous semigroup of stochastic matrices

^۵Logarithmic-Sobolev inequalities

^۶Mixing time

^۷Concentration of measure

^۸Transportation cost problem

^۹Isoperimetric inequalities

$$\text{Var} f = \mathbb{E}[f^2] - \mathbb{E}[f]^2.$$

تعریف ۱.۲. مجموعه $\{T_t : t \geq 0\}$ از نگاشت‌های خطی $T_t : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ یک نیم‌گروه مارکوف^{۱۰} خوانده می‌شود اگر خواص زیر برقرار باشند:

- (نیم‌گروه) $T_0 = I$ نگاشت همانی باشد و به ازای هر $s, t \geq 0$ داشته باشیم

$$T_s T_t = T_{s+t},$$

- (پیوستگی) تابع $t \mapsto T_t$ نگاشتی پیوسته باشد به این معنی که برای هر تابع $f \in L^2(\pi)$ و هر $x \in \Omega$ داشته باشیم:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T_t f(x) = f(x),$$

- (نگاشت تصادفی) برای هر $t \geq 0$ نگاشت T_t یک نگاشت تصادفی باشد یعنی

$$T_t 1 = 1 \quad (\text{نرمال‌سازی})$$

$$T_t f \geq 0 \quad \forall f \geq 0, \quad (\text{مثبت بودن})$$

که منظور از $f \geq 0$ این است که $f(x) \geq 0$ برای هر $x \in \Omega$.

توجه کنید که طبق خاصیت نرمال‌سازی، عدد 1 مقدار ویژه مشترک همه نگاشت‌های T_t است. به علاوه، با استفاده از از خاصیت مثبت بودن می‌توان نشان داد که 1 بزرگترین مقدار ویژه T_t است. به طور مشابه می‌توان نشان داد که نگاشت‌های T_t به طور یکنواخت کراندار هستند.

طبق تعریف، T_t روی فضای توابع عمل می‌کند. لذا ترانپاده آن روی فضای توزیع‌ها عمل می‌کند. در واقع اگر μ یک توزیع احتمال دلخواه روی Ω باشد، آنگاه

$$\tau = \mu T_t,$$

نیز یک توزیع احتمال است. در اینجا ما توزیع‌های احتمال را به عنوان بردارهای سطری در نظر می‌گیریم. توجه کنید که $\tau = \mu T_t$ یک توزیع احتمال است زیرا با استفاده از خاصیت مثبت بودن به ازای هر $f \geq 0$ داریم $\tau(f) = \mu(T_t f) \geq 0$ ، و با استفاده از خاصیت نرمال‌سازی داریم $\tau(1) = \mu(T_t 1) = \mu(1) = 1$.

^{۱۰}Markov semigroup

عملگر لیندبلاد. عملگر یا مولد لیندبلاد^{۱۱} متناظر با نیم‌گروه مارکوف $\{T_t : t \geq 0\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L} := - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (T_t - I).$$

برای خوش‌تعریفی این عملگر باید نشان دهیم که حد فوق وجود دارد. برای این کار با استفاده از خاصیت پیوستگی، برای $\epsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک داریم

$$\left\| I - \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon T_s ds \right\| < 1,$$

که در اینجا منظور از $\|\cdot\|$ نرم عملگری است. در نتیجه $\int_0^\epsilon T_s ds$ و $\epsilon^{-1} \int_0^\epsilon T_s ds$ وارون‌پذیر هستند. حال برای $0 < t < \epsilon$ داریم

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} (T_t - I) \int_0^\epsilon T_s ds &= \frac{1}{t} \left(\int_0^\epsilon T_{s+t} ds - \int_0^\epsilon T_s ds \right) \\ &= \frac{1}{t} \left(\int_t^{t+\epsilon} T_s ds - \int_0^\epsilon T_s ds \right) \\ &= \frac{1}{t} \left(\int_\epsilon^{t+\epsilon} T_s ds - \int_0^t T_s ds \right). \end{aligned}$$

سپس با ضرب کردن هر دو طرف در وارون $\int_0^\epsilon T_s ds$ داریم

$$\frac{1}{t} (T_t - I) = \frac{1}{t} \left(\int_\epsilon^{t+\epsilon} T_s ds - \int_0^t T_s ds \right) \cdot \left(\int_0^\epsilon T_s ds \right)^{-1}.$$

لذا با استفاده از خاصیت پیوستگی

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (T_t - I) = (T_\epsilon - I) \left(\int_0^\epsilon T_s ds \right)^{-1}.$$

در نتیجه حد مورد نظر وجود دارد و برابر است با

$$\mathcal{L} = -(T_\epsilon - I) \left(\int_0^\epsilon T_s ds \right)^{-1}.$$

توجه کنید که با استفاده از خاصیت نیم‌گروهی می‌توان نشان داد که برای هر $t \geq 0$

$$\frac{d}{dt} T_t = -\mathcal{L} T_t = -T_t \mathcal{L}.$$

در نتیجه

$$T_t = e^{-t\mathcal{L}}.$$

Lindblad generator^{۱۱}

به علاوه با استفاده از خاصیت نرمال سازی داریم

$$\mathcal{L}1 = 0.$$

برگشت پذیری. در این مقاله فرض می کنیم $\mathcal{L}$ به عنوان عملگری روی $L^2(\pi)$ خودالحاق است، یعنی برای هر $f, g \in L^2(\pi)$ داریم

$$\langle f, \mathcal{L}g \rangle_\pi = \langle \mathcal{L}f, g \rangle_\pi,$$

که در آن ضرب داخلی در (۱.۲) تعریف شده است. توجه کنید که چون $T_t = e^{-t\mathcal{L}}$ عملگر T_t نیز خودالحاق است و داریم

$$\langle f, T_t g \rangle_\pi = \langle T_t f, g \rangle_\pi.$$

به طور خاص اگر f, g را توابع مشخصه مجموعه های Ω $\{x\}, \{y\} \subseteq \Omega$ در نظر بگیریم، آنگاه رابطه بالا نتیجه می دهد

$$\pi(x)T_t(x, y) = \pi(y)T_t(y, x), \quad (2.2)$$

که در آن منظور از $T_t(x, y)$ درایه (x, y) ماتریس T_t است. به این تساوی خاصیت برگشت پذیری نیم گروه مارکوف گفته می شود. توجه کنید که طبق خاصیت برگشت پذیری، توزیع احتمال π تحت T_t ماناست^{۱۲}، یعنی $\pi T_t = \pi$. برای اثبات این ادعا داریم

$$\pi T_t(y) = \sum_x \pi(x)T_t(x, y) = \sum_x \pi(y)T_t(y, x) = \pi(y),$$

که در تساوی آخر از $T_t 1 = 1$ استفاده کردیم. به عنوان نتیجه دیگری از خاصیت برگشت پذیری می توان نشان داد که T_t امید ریاضی نسبت به π را تغییر نمی دهد، یعنی برای هر تابع f داریم

$$\mathbb{E}[T_t f] = \langle 1, T_t f \rangle_\pi = \langle T_t 1, f \rangle_\pi = \langle 1, f \rangle_\pi = \mathbb{E}f.$$

به طور مشابه می توان نشان داد $\mathbb{E}[\mathcal{L}f] = 0$.

Stationary^{۱۲}

نتیجه دیگری که در ادامه استفاده خواهد شد به شرح زیر است. فرض کنید μ توزیع احتمال دلخواهی روی Ω باشد و قرار دهید $f(x) = \mu(x)/\pi(x)$. همچنین قرار دهید $\tau = \mu T_t$ و $g = \tau/\pi$. در این صورت

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\tau(x)}{\pi(x)} \\ &= \sum_y \frac{\mu(y)T_t(y, x)}{\pi(x)} \\ &= \sum_y \frac{\mu(y)T_t(x, y)}{\pi(y)} \\ &= T_t f(x), \end{aligned}$$

که در خط سوم از خاصیت برگشت‌پذیری (۲.۲) استفاده کردیم. به طور خلاصه داریم

$$\frac{\mu T_t}{\pi} = T_t \left(\frac{\mu}{\pi} \right). \quad (۳.۲)$$

فرم دیریشله. فرم دیریشله^{۱۳} متناظر با یک نیم‌گروه مارکوف روی فضای توابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{E}(f, g) := \langle f, \mathcal{L}g \rangle_\pi = \mathbb{E}[f \mathcal{L}g] = -\frac{d}{dt} \langle f, T_t g \rangle_\pi \Big|_{t=0}.$$

ادعا می‌کنیم که فرم دیریشله مثبت است، یعنی به ازای هر تابع f

$$\mathcal{E}(f, f) \geq 0.$$

برای اثبات این ادعا فرض کنید $r < 0$ و تعریف کنید

$$\hat{T}_t = e^{t(rI - \mathcal{L})} = e^{rt} T_t.$$

در نتیجه

$$\frac{d}{dt} \hat{T}_t = (rI - \mathcal{L}) \hat{T}_t,$$

و

$$(rI - \mathcal{L}) \int_0^t \hat{T}_s ds = \hat{T}_t - I.$$

از طرف دیگر چون $r < 0$ و T_t کراندار است، داریم $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{T}_t = 0$. بنابراین

$$(rI - \mathcal{L}) \int_0^\infty \hat{T}_s ds = -I,$$

و $rI - \mathcal{L}$ وارون‌پذیر است. در نتیجه r مقدار ویژه $\mathcal{L}$ نیست. در واقع همه مقادیر ویژه $\mathcal{L}$ نامنفی هستند. لذا از آنجا که $\mathcal{L}$ خودالحاق است، فرم دیریشله که فرم دوخطی متناظر با آن است، مثبت است.

^{۱۳} Dirichlet form

شکاف طیفی. دیدیم که $\mathcal{L}$ عملگری مثبت نیمه‌معین و دارای یک مقدار ویژه صفر است، زیرا $\mathcal{L}1 = 0$. در این مقاله فرض می‌کنیم که بردار 1 تنها بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه صفر $\mathcal{L}$ است، یعنی تکرار این مقدار ویژه یک است. به این خاصیت، اولیه بودن^{۱۴} نیم‌گروه مارکوف گفته می‌شود. با این فرض، کوچکترین مقدار ویژه ناصفر $\mathcal{L}$ شکاف طیفی^{۱۵} نامیده و با λ نمایش داده می‌شود. با توجه به خودالحاق بودن $\mathcal{L}$ و اینکه فضای عمود به بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه صفر برابر $\{f : \langle f, 1 \rangle_\pi = \mathbb{E}f = 0\}$ است، داریم

$$\lambda = \inf_{\mathbb{E}[f]=0} \frac{\mathcal{E}(f, f)}{\mathbb{E}[f^2]}. \quad (۴.۲)$$

همچنین می‌توان نشان داد

$$\lambda = \inf_{f \neq 0} \frac{\mathcal{E}(f, f)}{\text{Var} f}.$$

گزاره ۲.۲. به ازای هر $t > 0$ و هر تابع f داریم

$$\|T_t f - \mathbb{E}f\|_2 \leq e^{-\lambda t} \|f - \mathbb{E}f\|_2. \quad (۵.۲)$$

برهان. طبق تعریف شکاف طیفی داریم

$$\text{Var} f = \|f - \mathbb{E}f\|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda} \mathcal{E}(f, f).$$

به این نامساوی، نامساوی پوانکاره^{۱۶} گویند. با استفاده از این نامساوی داریم

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|T_t f - \mathbb{E}f\|_2^2 &= \frac{d}{dt} \langle T_t f - \mathbb{E}f, T_t f - \mathbb{E}f \rangle \\ &= -2\mathcal{E}(T_t f, T_t f) \\ &\leq -2\lambda \|T_t f - \mathbb{E}f\|_2^2. \end{aligned}$$

حال قرار دهید $\varphi(t) = \|T_t f - \mathbb{E}f\|_2^2$. طبق نامساوی فوق $\varphi'(t) \leq -2\lambda \varphi(t)$ یا به طور معادل

$$\frac{d}{dt} \ln \varphi(t) \leq -2\lambda.$$

با محاسبه انتگرال دو طرف این نامساوی داریم

$$\ln \phi(s) - \ln \phi(0) = \int_0^s \frac{d}{dt} \ln \phi(t) dt \leq \int_0^s (-2\lambda) dt = -2\lambda s.$$

^{۱۴} Primitivity

^{۱۵} Spectral gap

^{۱۶} Poincaré inequality

به طور معادل داریم

$$\phi(s) \leq e^{-2\lambda s + \ln \phi(0)} = e^{-2\lambda s} \phi(0) = e^{-2\lambda s} \|f - \mathbb{E}f\|_2^2,$$

که معادل (۵.۲) است.

□

طبق این گزاره، با فرض اولیه بودن $\mathcal{L}$ ، برای هر f ، هرگاه $t \rightarrow \infty$ ، تابع $T_t f$ به تابع ثابت $\mathbb{E}f$ میل می‌کند. به طور معادل، با استفاده از (۳.۲) به ازای هر توزیع احتمال μ ، توزیع احتمال μT_t به توزیع مانای π میل می‌کند. به علاوه سرعت این همگرایی نمایی است.

این بخش را با ارائه مثالی ساده، ولی در عین حال مهم از یک نیم‌گروه مارکوف به پایان می‌رسانیم. قرار دهید $\mathcal{L} = I - \mathbb{E}$ که در آن $\mathbb{E}$ امید ریاضی نسبت به توزیع احتمال π است. در نتیجه برای هر تابع f داریم

$$\mathcal{L}f = f - \mathbb{E}f.$$

سپس با استفاده از $\mathbb{E}^2 = \mathbb{E}$ داریم

$$T_t f = e^{-t(I-\mathbb{E})} f = e^{-t} e^{t\mathbb{E}} f = e^{-t} (I + (e^t - 1)\mathbb{E}) f = e^{-t} f + (1 - e^{-t})\mathbb{E}f.$$

همچنین طبق تعریف داریم

$$\langle f, \mathcal{L}g \rangle_\pi = \langle f, g - \mathbb{E}g \rangle_\pi = \mathbb{E}[f(g - \mathbb{E}g)] = \mathbb{E}[fg] - \mathbb{E}[f]\mathbb{E}[g] = \langle \mathcal{L}f, g \rangle_\pi.$$

بنابراین $\mathcal{L}$ خودالحاق است. به علاوه

$$\mathcal{E}(f, f) = \langle f, \mathcal{L}f \rangle_\pi = \mathbb{E}[f^2] - \mathbb{E}[f]^2 = \text{Var} f \geq 0,$$

یعنی فرم دیریشله مثبت است. در نهایت، از آنجا که $\mathbb{E}$ یک عملگر تصویر با رتبه یک است، تکرار مقدار ویژه صفر $\mathcal{L} = I - \mathbb{E}$ یک است و باقی مقادیر ویژه آن برابر ۱ هستند. بنابراین $\lambda = 1$ و $\mathcal{L}$ اولیه است.

۳. نامساوی‌های ابرانقباضی

برای هر عدد حقیقی $p \geq 1$ تعریف کنید

$$\|f\|_p = (\mathbb{E}|f|^p)^{1/p},$$

که تعمیمی از تعریف ۲-نرم در بخش قبل است. تأکید می‌کنیم که در اینجا امید ریاضی نسبت به توزیع احتمال π است. همچنین به ازای $p = \infty$ تعریف می‌کنیم $\|f\|_\infty = \max_x |f(x)|$ که از حد $p \rightarrow \infty$ بدست می‌آید. $\|\cdot\|_p$ برای $1 \leq p \leq \infty$ در نامساوی مثلث صدق می‌کند^{۱۷} و در واقع یک نرم است.

^{۱۷}نامساوی مینکوفسکی

به ازای هر $1 \leq p \leq \infty$ مزدوج هولدر^{۱۸} آن را با $\hat{p}$ نشان می‌دهیم که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\hat{p}} = 1. \quad (۱.۳)$$

طبق نامساوی هولدر داریم

$$\|f\|_p = \max_{g \neq 0} \frac{\langle f, g \rangle_\pi}{\|g\|_{\hat{p}}}.$$

به طور خاص به ازای توابع f, g داریم

$$|\langle f, g \rangle_\pi| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{\hat{p}}.$$

نامساوی هولدر به ازای $p = \hat{p} = 2$ همان نامساوی کوشی-شوارتز است، و در حالت کلی با استفاده از نامساوی یانگ^{۱۹} اثبات می‌شود.

آنتروپی. آنتروپی تابع نامنفی $f \geq 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Ent}_\pi(f) := \mathbb{E}[f \ln f] - \mathbb{E}f \ln \mathbb{E}f.$$

در این تعریف فرض می‌کنیم $0 \ln(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0$. توجه کنید که با استفاده از محدب بودن تابع $s \mapsto s \ln s$ داریم $\text{Ent}_\pi(f) \geq 0$. آنتروپی به صورتی که در ادامه می‌آید با معیار واگرایی کولبک-لیبلر^{۲۰} مرتبط است. برای دو توزیع احتمال μ, π تعریف کنید

$$D(\mu \| \pi) = \sum_x \mu(x) (\ln \mu(x) - \ln \pi(x)). \quad (۲.۳)$$

حال با محاسبه‌ای ساده درمی‌یابیم که برای $f = \mu/\pi$

$$\text{Ent}_\pi(f) = D(\mu \| \pi).$$

دلیل اهمیت تابع آنتروپی برای ما ارتباط آن با مشتق p -نرم است که در گزاره زیر داده شده است. این گزاره با محاسبه‌ای ساده اثبات می‌شود.

گزاره ۱.۳. به ازای هر تابع $f \geq 0$ داریم

$$\frac{d}{dp} \|f\|_p = \frac{1}{p^2} \|f\|_p^{1-p} \text{Ent}_\pi(f^p).$$

^{۱۸}Hölder conjugate

^{۱۹}Young's inequality

^{۲۰}KL-divergence

توجه کنید که با استفاده از نامنفی بودن تابع آنتروپی که در بالا ذکر شد، از این گزاره نتیجه می‌شود که $p \mapsto \|f\|_p$ نانزولی است. این مطلب با استفاده از نامساوی هولدر نیز قابل اثبات است.

نرم عملگری. برای $1 \leq p, q \leq \infty$ نرم $q \rightarrow p$ نگاشت T_t به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|T_t\|_{q \rightarrow p} := \sup_{f \neq 0} \frac{\|T_t f\|_p}{\|f\|_q}. \quad (۳.۳)$$

در واقع $\|T_t\|_{q \rightarrow p}$ کوچکترین عدد $c > 0$ است به طوری که

$$\|T_t f\|_p \leq c \|f\|_q, \quad \forall f.$$

توجه کنید که با استفاده از خاصیت مثبت بودن T_t سوپریمم در (۳.۳) را می‌توان به توابع $f > 0$ محدود کرد. برای چنین توابعی با استفاده از محدب بودن $s \mapsto s^q$ می‌توان نشان داد $\|T_t f\|_q^q \leq \|f\|_q^q$. بنابراین

$$\|T_t\|_{q \rightarrow q} \leq 1 \quad \forall q \geq 1.$$

در نتیجه T_t یک نگاشت انقباضی تحت هر q -نرم است. با توجه به این مشاهده می‌گوییم T_t یک نگاشت ابرانقباضی است اگر $\|T_t\|_{q \rightarrow p} \leq 1$ یا به طور معادل

$$\|T_t f\|_p \leq \|f\|_q, \quad \forall f,$$

برای $1 \leq q < p \leq \infty$. توجه کنید که چون $p \mapsto \|f\|_p$ نانزولی است، این نامساوی قوی‌تر از نامساوی انقباضی $\|T_t\|_{q \rightarrow q} \leq 1$ است.

اثبات نامساوی‌های ابرانقباضی معمولاً کار بسیار دشواری است. با این حال از آنجا که ما فرض کردیم T_t متعلق به یک نیم‌گروه مارکوف است، می‌توانیم از ابزارهای دیگری برای این کار استفاده کنیم.

تعریف ۲.۳. به ازای $q > 1$ می‌گوییم نیم‌گروه مارکوف $\{T_t : t \geq 0\}$ در نامساوی q -سوبولف لگاریتمی با ثابت $c > 0$ صدق می‌کند اگر به ازای هر تابع $f > 0$ داشته باشیم

$$c \text{Ent}_\pi(f^q) \leq \frac{q^2}{4(q-1)} \mathcal{E}(f^{q-1}, f). \quad (۴.۳)$$

این نامساوی به ازای $q = 1$ (با در نظر گرفتن حد $q \rightarrow 1^+$) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c \text{Ent}_\pi(f) \leq \frac{1}{4} \mathcal{E}(f, \ln f). \quad (۵.۳)$$

در واقع بهترین ثابت $c > 0$ را که در نامساوی (۵.۳) صدق کند، برابر با α_1 است و α_q بهترین ثابتی است که در نامساوی (۴.۳) صدق می‌کند.

از آنجا که لگاریتم در تعریف تابع آنتروپی ظاهر می‌شود و سمت چپ نامساوی فوق بر حسب آنتروپی است، به آن نامساوی سوبولف لگاریتمی گفته می‌شود.

در نامساوی فوق قرار دهید $f = g^{1/q}$. در این صورت با استفاده از تعریف مزدوج هولدر ($\hat{q} = q/(q-1)$)، نامساوی q -سوبولف لگاریتمی معادل است با

$$c \text{Ent}_\pi(g) \leq \frac{q\hat{q}}{4} \mathcal{E}(g^{1/\hat{q}}, g^{1/q}), \quad \forall g > 0. \quad (۶.۳)$$

همچنین ثابت q -سوبولف لگاریتمی برابر است با

$$\alpha_q = \inf_g \frac{q\hat{q} \mathcal{E}(g^{1/\hat{q}}, g^{1/q})}{4 \text{Ent}_\pi(g)}. \quad (۷.۳)$$

با توجه به این تساوی داریم $\alpha_q = \alpha_{\hat{q}}$.

قضیه ۳.۳. (آ) به ازای هر $1 \leq q \leq p \leq 2$ داریم

$$q\hat{q} \mathcal{E}(g^{1/\hat{q}}, g^{1/q}) \geq p\hat{p} \mathcal{E}(g^{1/\hat{p}}, g^{1/p}), \quad \forall g \geq 0.$$

(ب) نگاشت $q \mapsto \alpha_q$ روی بازه $[1, 2]$ ناصعودی است. به علاوه α_2 کوچک‌ترین ثابت سوبولف لگاریتمی است.

برهان. (ب) نتیجه ساده (آ) و تعریف ثابت سوبولف لگاریتمی است. نامساوی (آ) استروک-واروپولوس^{۲۱} نامیده می‌شود. برای اثباتی از این نامساوی [۸] را ببینید. در اینجا اثباتی متفاوت ارائه می‌کنیم. برای هر $t \geq 0$ و $f \geq 0$ قرار دهید

$$h_t(s) = \langle f^{2-s}, T_t f^s \rangle_\pi.$$

توجه کنید که $h_t(2-s) = h_t(s)$ و h_t حول $s = 1$ متقارن است. در نتیجه همه مشتقات از مرتبه فرد h_t در $s = 1$ صفر هستند و داریم

$$h_t(s) = h_t(1) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{(2j)!} (s-1)^{2j},$$

که در آن

$$c_j = \frac{d^{2j}}{ds^{2j}} h_t(s) \Big|_{s=1}.$$

طبق تعریف $h_t(s)$ داریم

$$h_t(s) = \sum_{x,y} \pi(x) T_t(x, y) f(x)^2 e^{s \ln(f(y)/f(x))}.$$

^{۲۱} Stroock-Varopoulos inequality

یعنی $h_t(s)$ برابر با ترکیب خطی توابع نمایی با ضرایب مثبت است. از این بسط نتیجه می‌گیریم به ازای هر $c_j \geq 0, j \geq 1$.

حال تعریف کنید

$$\psi_t(s) = \frac{h_t(s) - h_t(0)}{(s-1)^2 - s} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{(2j)!} \left(\sum_{i=1}^{j-1} (s-1)^{2i} \right).$$

از نامنفی بودن c_j ها نتیجه می‌گیریم $\psi_t(s)$ روی بازه $[1, \infty)$ نانزولی است. در نتیجه $\lim_{t \rightarrow 0^+} \psi_t(s)/t$ روی همان بازه نانزولی است. از طرف دیگر با استفاده از $h_t(0) = \mathbb{E}[f^2] = h_0(s)$ داریم

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\psi_t(s)}{t} &= \frac{1}{(s-1)^2 - 1} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{h_t(s) - h_t(0)}{t} \\ &= \frac{1}{(s-1)^2 - 1} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{h_t(s) - h_0(s)}{t} \\ &= \frac{1}{(s-1)^2 - 1} \frac{\partial}{\partial t} h_t(s) \Big|_{t=0} \\ &= -\frac{1}{(s-1)^2 - 1} \langle f^{2-s}, \mathcal{L}f^s \rangle_{\pi}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$s \mapsto -\frac{1}{(s-1)^2 - 1} \langle f^{2-s}, \mathcal{L}f^s \rangle_{\pi},$$

روی بازه $[1, +\infty)$ نانزولی است. نامساوی (آ) با قرار دادن $2/s = p$ ، $2/(2-s) = \hat{p}$ و $f = \sqrt{g}$ بدست می‌آید.

□

حال می‌توانیم نتیجه اصلی این بخش را بیان کنیم.

قضیه ۴.۳. فرض کنید $\mathcal{L}$ مولد یک نیم‌گروه مارکوف برگشت‌پذیر و اولیه باشد.

(آ) در این صورت داریم

$$\|T_t\|_{q \rightarrow p} \leq 1, \quad \forall p, q > 1, \quad \frac{p-1}{q-1} \leq e^{4\alpha_2 t}.$$

(ب) برعکس اگر برای $q > 1$ داشته باشیم

$$\|T_t\|_{q \rightarrow p} \leq 1, \quad \forall p > 1, \quad \frac{p-1}{q-1} \leq e^{4ct},$$

آنگاه $\alpha_q \geq c$.

$$\psi(p) = \|f\|_q - \|T_{t(p)}f\|_p.$$
$$\psi'(p) = -\frac{1}{p^2} \mathbb{E}[g_p]^{\frac{1-p}{p}} \left(\text{Ent}_\pi(g_p) - \frac{p^2}{4\alpha_2(p-1)} \langle g_p^{1/\hat{p}}, g_p^{1/p} \rangle_\pi \right),$$
$$\psi(p) \geq \psi(q) = 0,$$

(ب) اثبات مشابه بخش (آ) است. قرار دهید $t(p) = \frac{1}{4\alpha_2} \ln \frac{p-1}{q-1}$ و

$$\psi(p) = \|f\|_q - \|T_{t(p)}f\|_p.$$

☐

گزاره ۵.۳. $\lambda \geq 2\alpha_2$.

$$\alpha_2 \operatorname{Ent}_\pi(f_\epsilon^2) \leq \mathcal{E}(f_\epsilon, f_\epsilon).$$
$$\psi(\epsilon) = \epsilon^2(\mathcal{E}(g, g) - 2\alpha_2\mathbb{E}[g^2]) + O(\epsilon^3).$$

دیدیم که α_2 برای اثبات نامساوی‌های ابرانقباضی به کار می‌آید. ثابت α_1 نیز پارامتر مهمی از یک نیم‌گروه مارکوفی است که یکی از کاربردهای آن را در ادامه می‌بینیم.

گزاره ۶.۳. به ازای هر نیم‌گروه برگشت‌پذیر $\{T_t : t \geq 0\}$ و $f \geq 0$ داریم

$$\text{Ent}_\pi(T_t f) \leq e^{-4\alpha_1 t} \text{Ent}_\pi(f).$$

برهان. با استفاده از $\mathbb{E}[T_t f] = \mathbb{E}f$ و نامساوی ۱-سوبولف لگاریتمی داریم

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Ent}_\pi(T_t f) &= \frac{d}{dt} \mathbb{E}[T_t f \ln T_t f] = -\mathbb{E}[\mathcal{L} T_t f \ln T_t f] \\ &= -\mathcal{E}(T_t f, \ln T_t f) \leq -4\alpha_1 \text{Ent}_\pi(T_t f). \end{aligned}$$

با تقسیم دو طرف به $\text{Ent}_\pi(T_t f)$ و انتگرال گرفتن از نامساوی فوق، گزاره ثابت می‌شود.

□

این بخش را با اثبات «خاصیت تانسوری» ثابت‌های q -سوبولف لگاریتمی به پایان می‌رسانیم.

قضیه ۷.۳. فرض کنید (Ω_k, π_k) برای $k = 1, \dots, n$ فضاهای احتمال باشند و $\mathcal{L}_k$ یک مولد لیندبلاد روی فضای k -ام باشد. $\alpha_q(\mathcal{L}_k)$ را ثابت q -سوبولف لگاریتمی $\mathcal{L}_k$ بگیرید. فضای احتمال ضربی $(\tilde{\Omega}, \tilde{\pi})$ را در نظر بگیرید که در آن $\tilde{\Omega} = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ و $\tilde{\pi} = \pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_n$. قرار دهید $\tilde{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_1 + \dots + \hat{\mathcal{L}}_n$. در این صورت $\tilde{\mathcal{L}}$ مولد نیم‌گروه مارکوف که در آن $\hat{\mathcal{L}}_k = I_1 \otimes \dots \otimes I_{k-1} \otimes \mathcal{L}_k \otimes I_{k+1} \otimes \dots \otimes I_n$

$$\tilde{T}_t = e^{-t\tilde{\mathcal{L}}} = e^{-t\mathcal{L}_1} \otimes \dots \otimes e^{-t\mathcal{L}_n},$$

است و داریم

$$\alpha_q(\tilde{\mathcal{L}}) = \max_k \alpha_q(\mathcal{L}_k). \quad (۸.۳)$$

برهان. برای سادگی فرض کنید $n = 2$. در این صورت برای تابع $f : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ داریم

$$\langle f, \tilde{\mathcal{L}}f \rangle_{\tilde{\pi}} = \langle f, \hat{\mathcal{L}}_1 f \rangle_{\tilde{\pi}} + \langle f, \hat{\mathcal{L}}_2 f \rangle_{\tilde{\pi}}.$$

از طرف دیگر با استفاده از محدب بودن تابع $s \mapsto s \ln s$ می‌توان نشان داد که تابع آنتروپی زیرجمعی است:

$$\text{Ent}_{\pi_1 \times \pi_2} f \leq \mathbb{E}_{\pi_1} [\text{Ent}_{\pi_2}(f)] + \mathbb{E}_{\pi_2} [\text{Ent}_{\pi_1}(f)].$$

با کنار هم قرار دادن این دو نامساوی، $\alpha_q(\tilde{\mathcal{L}}) \geq \max_k \alpha_q(\mathcal{L}_k)$ بدست می‌آید. جهت دیگر نامساوی با در نظر گرفتن f ‌هایی که فقط تابع یک مؤلفه هستند، بدست می‌آید. در واقع اگر $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت $f(x_1, x_2) = g(x_1)$ تعریف شده باشد، آنگاه داریم $\langle g, \mathcal{L}_1 g \rangle_{\pi_1} = \langle f, \tilde{\mathcal{L}}f \rangle_{\tilde{\pi}}$ و $\text{Ent}_{\pi_1 \times \pi_2}(f) = \text{Ent}_{\pi_1}(g)$. لذا با توجه به تعریف داریم

$$\max_k \alpha_q(\mathcal{L}_k) \geq \alpha_q(\mathcal{L}_1) \geq \alpha_q(\tilde{\mathcal{L}}).$$

□

۴. نیم‌گروه مارکوف متناظر با یک زنجیره مارکوف

در این بخش مثالی مهم از نیم‌گروه‌های مارکوف متناظر با زنجیره‌های مارکوف گسسته یا قدم‌زدن‌های تصادفی روی گراف‌ها بیان می‌کنیم. فرض کنید K یک ماتریس تصادفی باشد به این معنی که درایه‌های K نامنفی هستند و $K1 = 1$. برای مثال K می‌تواند ماتریس تغییر وضعیت^{۲۲} یک قدم‌زدن تصادفی روی یک گراف باشد. در اینصورت ماتریس تغییر وضعیت در مرحله m -ام قدم‌زدن برابر K^m است، و نیم‌گروه گسسته $\{K^m : m \in \mathbb{N}\}$ تغییر وضعیت قدم‌زدن تصادفی در زمان‌های گسسته را توصیف می‌کند. برای تبدیل این نیم‌گروه گسسته به یک نیم‌گروه مارکوف پیوسته، باید زمان را به جای گسسته، پیوسته در نظر بگیریم و زمان‌های قدم‌ها را به جای اعداد صحیح، نقاطی تصادفی روی خط حقیقی بگیریم. به علاوه، برای این که خاصیت مارکوفی برقرار باشد، انتخاب زمان‌های قدم‌ها باید بدون حافظه باشد. برای این کار می‌توانیم فرض کنیم که زمان‌های قدم‌ها، نقاط یک فرآیند پواسون هستند. لذا فرض کنید N_t یک فرآیند پواسون با نرخ t باشد. تعریف کنید

$$T_t = \mathbb{E}[K^{N_t}],$$

که در آن امید ریاضی نسبت به متغیر تصادفی N_t است. در این صورت می‌توان نشان داد

$$T_t = e^{-t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} K^j.$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که $T_t = e^{-t\mathcal{L}}$ که در آن

$$\mathcal{L} = I - K.$$

با فرض این که K نسبت به توزیع مانای π برگشت‌پذیر باشد، مولد لیندبلاد $\mathcal{L}$ به عنوان نگاشتی روی فضای $L^2(\pi)$ خودالحاق خواهد بود.

فرم دیریشله متناظر با این مولد برابر است با

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f, g) &= \langle f, (I - K)g \rangle_{\pi} \\ &= \sum_x \pi(x) f(x) \left(g(x) - \sum_y K(x, y) g(y) \right) \\ &= \sum_x \pi(x) f(x) \sum_y \left(K(x, y) (g(x) - g(y)) \right) \\ &= \sum_{x, y} \pi(x) K(x, y) f(x) (g(x) - g(y)). \end{aligned}$$

Transition matrix^{۲۲}

که در خط سوم از $K1 = 1$ استفاده کرده‌ایم. همچنین با استفاده از خاصیت برگشت‌پذیری (۲.۲) داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(f, g) &= \sum_{x, y} \pi(y) K(y, x) f(x) (g(x) - g(y)) \\ &= \sum_{x, y} \pi(x) K(x, y) f(y) (g(y) - g(x)).\end{aligned}$$

بنابراین با در نظر گرفتن میانگین دو رابطه فوق داریم

$$\mathcal{E}(f, g) = \frac{1}{2} \sum_{x, y} K(x, y) \pi(x) (f(x) - f(y)) (g(x) - g(y)). \quad (۱.۴)$$

مثال ۱.۴. فرض کنید K ماتریس تغییر وضعیت بدیهی باشد که در آن $K(x, y) = \pi(y)$. در این صورت داریم $Kf = \mathbb{E}f$ و $\mathcal{L} = I - K = I - \mathbb{E}$ همان مثالی است که در انتهای بخش ۲ به آن پرداختیم. در آنجا دیدیم که $T_t = e^{-t}I + (1 - e^{-t})\mathbb{E}$ و $\mathcal{E}(f, f) = \text{Var}f$. به علاوه شکاف طیفی این مولد برابر است با $\lambda = 1$. در [۵] نشان داده شده است

$$\alpha_2 = \frac{1 - 2\pi_{\min}}{\ln(\pi_{\min}^{-1} - 1)},$$

که در آن

$$\pi_{\min} = \min_x \pi(x).$$

به طور خاص، اگر π توزیع یکنواخت باشد آنگاه

$$\alpha_2 = \frac{1 - \frac{2}{|\Omega|}}{\ln(|\Omega| - 1)},$$

و اگر $|\Omega| = 2$ آنگاه $\alpha_2 = 1/2$. تقریب زدن α_1 کار ساده‌تری است. با استفاده از محدب بودن تابع لگاریتم داریم

$$\begin{aligned}\text{Ent}_\pi(f) &= \mathbb{E}[f \ln f] - \mathbb{E}[f] \ln \mathbb{E}[f] \\ &\leq \mathbb{E}[f \ln f] - \mathbb{E}[f] \mathbb{E}[\ln f] \\ &= \mathbb{E}[f(\ln f - \mathbb{E} \ln f)] \\ &= \mathcal{E}(f, \ln f).\end{aligned}$$

بنابراین $\alpha_1 \geq 1/4$.

نتیجه ۲.۴. به ازای هر مولد $\mathcal{L}$ با شکاف طیفی λ داریم

$$\alpha_2 \geq \frac{(1 - 2\pi_{\min})\lambda}{\ln(\pi_{\min}^{-1} - 1)}. \quad (۲.۴)$$

برهان. با استفاده از ثابت سوبولف لگاریتمی مثال ۱۰.۴ داریم

$$\frac{1 - 2\pi_{\min}}{\ln(\pi_{\min}^{-1} - 1)} \text{Ent}(f^2) \leq \langle f, (I - \mathbb{E})f \rangle_{\pi} = \text{Var} f.$$

سپس با استفاده از نامساوی پوانکاره $\lambda \text{Var} f \leq \mathcal{E}(f, f)$ نتیجه مورد نظر بدست می‌آید.

□

مثال ۳.۴. فرض کنید K ماتریس قدم‌زدن تصادفی روی یال‌های گراف کامل با n رأس باشد. در این صورت

π توزیع یکنواخت است و اگر $n > 3$ داریم [۵]

$$\alpha_2 = \frac{n - 2}{(n - 1) \ln(n - 1)},$$

و برای $n = 2$ داریم $\alpha_2 = 1$. در واقع در این مثال حالت تساوی در نامساوی (۲.۴) رخ می‌دهد. کران‌های زیر روی α_1 نیز برقرارند:

$$\frac{n}{4(n - 1)} \leq \alpha_1 \leq \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\ln(n + 1)} \right) \frac{n}{n - 1}.$$

مثال ۴.۴. K را ماتریس قدم‌زدن تصادفی روی ابرمکعب $\Omega = \{+1, -1\}^n$ بگیرید که در آن $x, y \in \Omega$ مجاورند اگر آنها فقط در یک مؤلفه متفاوت باشند. توزیع مانای متناظر، توزیع یکنواخت است. قرار دهید

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

در این صورت با استفاده از نمادگذاری قضیه ۷.۳ داریم

$$K = \frac{1}{n}(\hat{A}_1 + \cdots + \hat{A}_n).$$

در مثال قبل دیدیم $\alpha_2(I - A) = 1$ در نتیجه

$$\alpha_2(I - K) = \frac{1}{n}\alpha_2(I - A) = \frac{1}{n}.$$

همچنین $\lambda = 2/n$.

مثال ۵.۴. فرض کنید $\Omega = S_n$ گروه تقارنی روی یک مجموع n عضوی باشد. K را ماتریس قدم‌زدن تصادفی روی S_n بگیرید که در آن برای دو جایگشت $\sigma, \sigma' \in S_n$ اگر $\sigma^{-1}\sigma'$ یک ترانهش^{۲۳} باشد، آنگاه تعریف می‌کنیم $K(\sigma, \sigma') = 2/(n(n - 1))$ و در غیر این صورت قرار می‌دهیم $K(\sigma, \sigma') = 0$. دوباره

^{۲۳}Transposition

توزیع مانای متناظر، توزیع یکنواخت است. داریم $\lambda = 2/(n-1)$. همچنین در [۵] نشان داده شده است که

$$\frac{1}{3n \ln n} \leq \alpha_2 \leq \frac{1}{n-1}.$$

همچنین داریم:

$$\frac{1}{4(n-1)} \leq \alpha_1 \leq \frac{1}{n-1}.$$

۵. تقریب زمان آمیختگی

در این بخش به یکی از کاربردهای مهم نامساوی‌های سوبولف لگاریتمی می‌پردازیم. در گزاره ۲.۲ دیدیم که با فرض اولیه بودن $\mathcal{L}$ ، یعنی $\lambda > 0$ ، به ازای هر توزیع احتمال μ ، توزیع احتمال μT_t هرگاه $t \rightarrow \infty$ ، به π میل می‌کند. هدف ما در این بخش تقریب زدن سرعت این همگرایی است. برای این کار ابتدا پارامتر زمان آمیختگی را تعریف می‌کنیم:

$$\tau_{\text{mix}} := \min\{t : \|\mu T_t - \pi\|_{\text{TV}} \leq \frac{1}{2e}, \forall \mu\}, \quad (۱.۵)$$

که در آن منظور از $\|\cdot\|_{\text{TV}}$ فاصله وردش کلی^{۲۴} است:

$$\|\rho\|_{\text{TV}} = \frac{1}{2} \sum_x |\rho(x)| = \max_{\omega: \omega(x) \in \{\pm 1\}} \sum_x \omega(x) \cdot \rho(x).$$

در واقع τ_{mix} برابر کوچکترین زمان t است که فاصله وردش کلی μT_t با π حداکثر $1/(2e)$ باشد. در اینجا انتخاب عدد $1/(2e)$ در تعریف این معیار دلخواه است. نکته در این است که می‌توان نشان داد که اگر بخواهیم به جای کران $1/(2e)$ کران دلخواه $\epsilon > 0$ را روی این فاصله بگیریم، کافی است قرار دهیم $t = \tau_{\text{mix}} \ln(1/\epsilon)$. حال به مسأله تقریب τ_{mix} می‌پردازیم. با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز داریم

$$\begin{aligned} \|\mu - \pi\|_{\text{TV}} &= \max_{\omega: \omega(x) \in \{\pm 1\}} \frac{1}{2} \sum_x \omega(x) \cdot (\mu(x) - \pi(x)) \\ &= \max_{\omega: \omega(x) \in \{\pm 1\}} \frac{1}{2} \sum_x \omega(x) \pi(x)^{1/2} \cdot (\mu(x) - \pi(x)) \pi(x)^{-1/2} \\ &\leq \max_{\omega: \omega(x) \in \{\pm 1\}} \frac{1}{2} \sqrt{\sum_x \omega(x)^2 \pi(x)} \cdot \sqrt{\sum_x (\mu(x) - \pi(x))^2 \pi(x)^{-1}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\sum_x (\mu(x) - \pi(x))^2 \pi(x)^{-1}} \\ &= \frac{1}{2} \left\| \frac{\mu}{\pi} - 1 \right\|_2, \end{aligned}$$

^{۲۴}Total variation distance

که در آن منظور از $\frac{\mu}{\pi}$ تابع $\frac{\mu}{\pi}(x) = \mu(x)/\pi(x)$ است. بنابراین

$$\|\mu T_t - \pi\|_{\text{TV}} \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{\mu T_t}{\pi} - 1 \right\|_2.$$

حال با استفاده از (۳.۲) داریم $\frac{\mu T_t}{\pi} = T_t f$ که در آن $f = \mu/\pi$. در نتیجه

$$\|\mu T_t - \pi\|_{\text{TV}} \leq \frac{1}{2} \|T_t f - 1\|_2 = \frac{1}{2} \|T_t f - \mathbb{E}f\|_2.$$

پس با استفاده از گزاره ۲.۲ داریم

$$\|\mu T_t - \pi\|_{\text{TV}} \leq \frac{1}{2} e^{-\lambda t} \|f - 1\|_2.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \max_{\mu} \|\mu T_t - \pi\|_{\text{TV}} &\leq \frac{1}{2} e^{-\lambda t} \max_{f: f \geq 0, \mathbb{E}f=1} \|f - 1\|_2 \\ &= \frac{1}{2} e^{-\lambda t} \sqrt{\pi_{\min} \left(\frac{1}{\pi_{\min}} - 1 \right)^2} \\ &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi_{\min}}} e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

که در آن $\pi_{\min} = \min_x \pi(x)$.

قضیه ۱.۵. به ازای هر نیم‌گروه مارکوف برگشت‌پذیر داریم

$$\tau_{\text{mix}} \leq \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\pi_{\min}} \right).$$

این قضیه روشی استاندارد برای تقریب زدن سرعت همگرایی فرایندهای مارکوف بیان می‌کند. در ادامه نشان می‌دهیم قضیه فوق، که نتیجه‌ای از نامساوی پوانکاره است، ضعیف‌تر از کرانی است که به وسیله نامساوی سوبولف لگاریتمی بدست می‌آید.

قضیه ۲.۵. به ازای هر نیم‌گروه مارکوف برگشت‌پذیر داریم

$$\tau_{\text{mix}} \leq \frac{1}{4\alpha_1} (\ln 2 + 2 + \ln \ln \frac{1}{\pi_{\min}}) \leq \frac{1}{4\alpha_2} (\ln 2 + 2 + \ln \ln \frac{1}{\pi_{\min}}).$$

برای اثبات این قضیه از نامساوی پینسکر^{۲۵} به شرح زیر استفاده می‌کنیم

$$\|\mu - \pi\|_{\text{TV}}^2 \leq \frac{1}{2} D(\mu \| \pi), \quad (۲.۵)$$

که در آن $D(\mu \| \pi)$ در (۲.۳) تعریف شده است. در واقع این نامساوی را به جای تقریب فاصله وردش کلی با ۲-نرم که در اثبات قضیه ۱.۵ استفاده شد قرار خواهیم داد.

^{۲۵} Pinsker's inequality

برهان. برای توزیع احتمال دلخواه μ قرار دهید $f_t = \frac{\mu T_t}{\pi}$. در این صورت داریم $f_t = T_t f_0$. همچنین با استفاده از نامساوی پینسکر داریم

$$\|\mu T_t - \pi\|_{\text{TV}}^2 \leq \frac{1}{2} D(\mu T_t \| \pi) = \frac{1}{2} \text{Ent}(f_t).$$

سپس با استفاده از گزاره ۶.۳ داریم

$$\text{Ent}(f_t) \leq e^{-4\alpha_1 t} \text{Ent}(f_0) = e^{-4\alpha_1 t} D(\mu \| \pi).$$

بنابراین با استفاده از محدب بودن $D(\mu \| \pi)$ داریم

$$\max_{\mu} \|\mu T_t - \pi\|_{\text{TV}}^2 \leq \frac{1}{2} e^{-4\alpha_1 t} \max_{\mu} D(\mu \| \pi) = \frac{1}{2} e^{-4\alpha_1 t} \ln \frac{1}{\pi_{\min}}.$$

برای اثبات کران مورد نظر روی τ_{mix} کافی است سمت راست را برابر $1/(2e)^2$ قرار دهیم.

□

حال با ارائه مثال‌هایی دو قضیه فوق را مقایسه می‌کنیم. ابتدا مثال قدم‌زدن تصادفی روی گراف ابرمکعب (مثال ۴.۴) را بررسی می‌کنیم. با توجه به این که $\lambda = 2/n$ و چون π توزیع یکنواخت است، از قضیه ۱.۵ کران $\tau_{\text{mix}} = O(n^2)$ را بدست می‌آوریم. از طرف دیگر با استفاده از قضیه ۲.۵ داریم $\tau_{\text{mix}} = O(n \ln n)$ که کران قوی‌تری است. نکته در این است که در قضیه ۲.۵ $\ln \ln(1/\pi_{\min})$ جایگزین $\ln(1/\pi_{\min})$ شده است.

حال مثال ۵.۴ را در نظر بگیرید. با استفاده از قضیه ۱.۵ کران $\tau_{\text{mix}} = O(n^2 \ln n)$ را بدست می‌آوریم، در حالی که قضیه ۲.۵ کران قوی‌تر $\tau_{\text{mix}} = O(n \ln n)$ را نتیجه می‌دهد.

۶. نیم‌گروه اورنشتاین-اولنبرگ

در بخش‌های گذشته ما فقط به نیم‌گروه‌های روی مجموعه‌های گسسته متناهی پرداختیم. در این بخش به مثال مهمی از یک نیم‌گروه روی یک فضای پیوسته می‌پردازیم. توجه کنید که همه گزاره‌هایی را که تاکنون اثبات شده‌اند را می‌توان به فضاهای پیوسته نیز تعمیم داد. لذا ما بدون اشاره به جزئیات، به تعریف و بررسی خواص نیم‌گروه اورنشتاین-اولنبرگ^{۲۶} می‌پردازیم.

یادآوری می‌کنیم که توزیع نرمال یا گاوسی $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ روی $\mathbb{R}$ با متوسط a و واریانس σ^2 برابر است با

$$d\nu = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

یعنی برای هر تابع اندازه‌پذیر f داریم

$$\mathbb{E}_\nu[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

اهمیت توزیع گاوسی در قضیه حد مرکزی است.

قضیه ۱.۶. (قضیه حد مرکزی) فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان باشند که $\mathbb{E}[X_i] = a$ و $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$ در این صورت

$$S_n := \frac{X_1 + \dots + X_n - na}{\sqrt{n}}$$

هرگاه $n \rightarrow \infty$ به توزیع $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ میل می‌کند. به این معنی که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[S_n \leq s] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^s e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

حال برای تابع به اندازه کافی خوش رفتار $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تعریف کنید

$$\mathcal{L}f(x) := xf'(x) - f''(x).$$

در ادامه نشان می‌دهیم که $\mathcal{L}$ یک مولد لیندبلاد است و نیم‌گروه مارکوف متناظر آن را محاسبه می‌کنیم. توزیع احتمال مانای π متناظر با این مولد همان توزیع نرمال استاندارد $\pi = \mathcal{N}(0, 1)$ است. یعنی برای هر دو تابع حقیقی f, g داریم

$$\langle f, g \rangle_\pi = \mathbb{E}[fg] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

$$\text{لم ۲.۶.} \quad (\text{آ}) \quad \mathcal{L}1 = 0.$$

$$(\text{ب}) \quad \mathbb{E}[\mathcal{L}f] = \mathbb{E}[xf' - f''] = 0.$$

$$(\text{ج}) \quad \langle f, \mathcal{L}g \rangle_\pi = \mathbb{E}[f'g'] = \langle \mathcal{L}f, g \rangle_\pi.$$

توجه کنید که طبق (ب) نگاشت $\mathcal{L}$ نسبت به توزیع π برگشت‌پذیر است.

برهان. (آ) از تعریف واضح است. همچنین (ب) از (ج) و (آ) بدست می‌آید:

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}f] = \langle 1, \mathcal{L}f \rangle_\pi = \langle \mathcal{L}1, f \rangle_\pi = \langle 0, f \rangle_\pi = 0.$$

برای اثبات (ج) از انتگرال جزء به جزء استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned}
 \langle f, \mathcal{L}g \rangle_\pi &= \langle f, xg' - g'' \rangle_\pi \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(xg'(x) - g''(x))e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(g'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \right)' dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
 &= \mathbb{E}[f'g'].
 \end{aligned}$$

□

حال نیم‌گروه مارکوف متناظر با مولد $\mathcal{L}$ را محاسبه می‌کنیم. تعریف کنید

$$T_t f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \quad (۱.۶)$$

توجه کنید که $T_t f(x)$ را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$T_t f(x) = \mathbb{E}_Y \left[f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}Y) \right],$$

که در آن Y یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال استاندارد است. در گزاره زیر نشان می‌دهیم که $\{T_t : t \geq 0\}$ یک نیم‌گروه مارکوف با مولد $\mathcal{L}$ است. به این نیم‌گروه مارکوف، نیم‌گروه اورنشتاین-اولنبرگ گویند.

گزاره ۳.۶. (ا) $T_t f \geq 0$ اگر $f \geq 0$ ، و $T_t 1 = 1$.

(ب) $\lim_{t \rightarrow 0^+} T_t f(x) = f(x)$ و $\lim_{t \rightarrow \infty} T_t f(x) = \mathbb{E}[f]$ به ازای هر تابع پیوسته و کراندار f .

(ج) $T_t T_s = T_{s+t}$.

(د) $T_t \mathcal{L} = \mathcal{L} T_t$.

(ه) داریم

$$\frac{\partial}{\partial t} T_t f(x) = -\mathcal{L} T_t f(x),$$

و در نتیجه $\mathbb{E}[T_t f] = \mathbb{E}[f]$.

برهان. (آ) واضح است و اثبات (ب) را به خواننده واگذار می‌کنیم. برای اثبات (ج) داریم

$$\begin{aligned} T_t T_s f(x) &= \mathbb{E}_Y \left[T_s f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}} Y) \right] \\ &= \mathbb{E}_Y \mathbb{E}_Z \left[f(e^{-s}(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}} Y) + \sqrt{1 - e^{-2s}} Z) \right] \\ &= \mathbb{E}_Y \mathbb{E}_Z \left[f(e^{-(s+t)}x + e^{-s}\sqrt{1 - e^{-2t}} Y + \sqrt{1 - e^{-2s}} Z) \right], \end{aligned}$$

که در آن Y, Z متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد مستقل هستند. حال توجه کنید که ترکیب خطی متغیرهای تصادفی گاوسی، گاوسی است.^{۲۷} در نتیجه $e^{-s}\sqrt{1 - e^{-2t}} Y + \sqrt{1 - e^{-2s}} Z$ یک متغیر تصادفی گاوسی با توزیع $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ است که در آن

$$\sigma^2 = e^{-2s}(1 - e^{-2t}) + (1 - e^{-2s}) = 1 - e^{-2(s+t)}.$$

بنابراین برای توزیع نرمال استاندارد U داریم

$$T_t T_s f(x) = \mathbb{E}_U \left[f(e^{-(s+t)}x + \sqrt{1 - e^{-2(s+t)}} U) \right] = T_{s+t} f(x).$$

برای اثبات (د) قرار دهید $g(y) := f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}} y)$. با توجه به این که نشان داده شد $\mathbb{E}[\mathcal{L}g] = 0$ داریم

$$\begin{aligned} T_t \mathcal{L} f(x) &= \mathbb{E}_Y \left[\mathcal{L} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}} Y) \right] \\ &= \mathbb{E}_Y \left[(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}} Y) f'(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}} Y) - f''(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}} Y) \right] \\ &= e^{-t}x \mathbb{E}_Y [f'(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}} Y)] - e^{-2t} \mathbb{E} [f''(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}} Y)] \\ &\quad + \mathbb{E}_Y [Y g'(Y) - g''(Y)] \\ &= e^{-t}x \mathbb{E}_Y [f'(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}} Y)] - e^{-2t} \mathbb{E}_Y [f''(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}} Y)] \quad (۲.۶) \\ &= x \frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E}_Y [f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}} Y)] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbb{E}_Y [f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}} Y)] \\ &= x \frac{\partial}{\partial x} T_t f(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} T_t f(x) \\ &= \mathcal{L} T_t f(x). \end{aligned}$$

^{۲۷} این ادعا را می‌توان با محاسبه مستقیم و یا با استفاده از نسخه تعمیم یافته‌ای از قضیه حد مرکزی اثبات کرد [۶].

برای اثبات (ه) دوباره از تعریف تابع g و تساوی $\mathbb{E}_Y[Yg'(Y)] = \mathbb{E}_Y[g''(Y)]$ که نتیجه $\mathbb{E}[\mathcal{L}g] = 0$ است استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} T_t f(x) &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}_Y[f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}Y)] \\ &= \mathbb{E}_Y\left[\left(-e^{-t}x + \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}Y\right)f'(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}Y)\right] \\ &= -e^{-t}x\mathbb{E}_Y[f'(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}Y)] + \frac{e^{-2t}}{1-e^{-2t}}\mathbb{E}_Y[Yg'(Y)] \\ &= -e^{-t}x\mathbb{E}_Y[f'(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}Y)] + \frac{e^{-2t}}{1-e^{-2t}}\mathbb{E}_Y[g''(Y)] \\ &= -e^{-t}x\mathbb{E}_Y[f'(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}Y)] + e^{-2t}\mathbb{E}_Y[f''(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}Y)] \\ &= -\mathcal{L}T_t f(x), \end{aligned}$$

که در مرحله آخر از رابطه (۲.۶) استفاده کردیم.

□

حال به تقریب ثابت سوبولف لگاریتمی این نیم‌گروه مارکوف می‌پردازیم.

قضیه ۴.۶. $\mathcal{L}f = xf' - f''$ را مولد نیم‌گروه اورنشتاین-اولنیک بگیرید. در این صورت داریم

$$\alpha_2(\mathcal{L}) \geq \frac{1}{2}.$$

به طور معادل برای هر تابع f داریم:

$$\text{Ent}_\pi(f^2) \leq 2\langle f, \mathcal{L}f \rangle_\pi = 2\mathbb{E}[f'^2] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (۳.۶)$$

برهان. برای این قضیه دو اثبات ارائه می‌کنیم.

اثبات اول: برای تابع هموار و کراندار g داریم $T_0g = g$ و $\lim_{t \rightarrow \infty} T_tg = \mathbb{E}[g]$ بنابراین برای $g = f^2$ داریم

$$\begin{aligned} \text{Ent}_\pi(f^2) &= \mathbb{E}[g \ln g] - \mathbb{E}[g] \ln \mathbb{E}[g] \\ &= - \int_0^\infty \frac{d}{dt} \mathbb{E}[T_tg \cdot \ln T_tg] dt \\ &= - \int_0^\infty -\mathbb{E}[\mathcal{L}T_tg \cdot \ln T_tg - \mathcal{L}T_t(g)] dt \\ &= \int_0^\infty \mathbb{E}[\mathcal{L}T_tg \cdot \ln T_tg] dt \\ &= \int_0^\infty \langle \mathcal{L}T_tg, \ln T_tg \rangle dt \\ &= \int_0^\infty \mathbb{E}[(T_tg)' \cdot (\ln T_tg)'] dt \\ &= \int_0^\infty \mathbb{E}\left[\frac{(T_tg)'^2}{T_tg}\right] dt \end{aligned}$$

از طرف دیگر

$$T_tg(x) = \mathbb{E}_Y[g(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}Y)].$$

در نتیجه با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز داریم

$$\begin{aligned} (T_tg)'(x) &= e^{-t} \mathbb{E}_Y[g'(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}Y)] \\ &= 2e^{-t} \mathbb{E}_Y[f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}Y)f'(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}Y)] \\ &\leq 2e^{-t} \left(\mathbb{E}_Y[f^2(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}Y)] \mathbb{E}_Y[f'^2(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}Y)] \right)^{1/2} \\ &= 2e^{-t} \left(T_tg(x) T_t(f'^2)(x) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

پس

$$\frac{(T_tg)'(x)^2}{T_tg(x)} \leq 4e^{-2t} T_t(f'^2)(x),$$

و

$$\begin{aligned} \text{Ent}_\pi(f^2) &\leq \int_0^\infty 4e^{-2t} \mathbb{E}[T_t(f'^2)] dt \\ &= \int_0^\infty 4e^{-2t} \mathbb{E}[f'^2] dt \\ &= 2\mathbb{E}[f'^2]. \end{aligned}$$

اثبات دوم: توجه کنید که طبق مثال ۱.۴، تقریب ارائه شده برای α_2 در این قضیه برابر است با ثابت ۲-سوبولف لگاریتمی مولد $I - \mathbb{E}$ متناظر با توزیع یکنواخت روی مجموعه $\Omega = \{+1, -1\}$. این نکته به همراه قضیه حد مرکزی، اثباتی دیگر از قضیه بدست می‌دهند.

با استفاده از خاصیت تانسوری نامساوی سوبولف لگاریتمی که در قضیه ۷.۳ به آن پرداختیم و رابطه (۱.۴)، برای هر تابع $g : \{+1, -1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ داریم

$$\text{Ent}(g^2) \leq \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n (g(x_1, \dots, x_n) - g(x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n))^2 \right]. \quad (۴.۶)$$

فرض کنید $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابع به اندازه کافی خوش رفتاری باشد و قرار دهید

$$g_n(x_1, \dots, x_n) := f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{n}}\right).$$

طبق قضیه حد مرکزی توزیع $\frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{n}}$ وقتی $(x_1, \dots, x_n)$ به طور یکنواخت از $\{+1, -1\}^n$ انتخاب می‌شود، به توزیع نرمال استاندارد میل می‌کند. بنابراین $\text{Ent}(g_n^2)$ هرگاه $n \rightarrow \infty$ به $\text{Ent}_\pi(f^2)$ میل می‌کند. از طرف دیگر به ازای هر $1 \leq i \leq n$ داریم

$$\begin{aligned} g_n(x_1, \dots, x_n) - g_n(x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n) &= f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{n}}\right) - f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n - 2x_i}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \frac{2x_i}{\sqrt{n}} f'\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{n}}\right) + O\left(\left|\frac{2x_i}{\sqrt{n}}\right|^2\right) \\ &= \frac{2x_i}{\sqrt{n}} f'\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{n}}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

در نتیجه

$$(g(x_1, \dots, x_n) - g(x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n))^2 = \frac{4}{n} f'^2\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{n}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

و

$$\sum_{i=1}^n (g(x_1, \dots, x_n) - g(x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n))^2 = 4f'^2\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{n}}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

حال دوباره با استفاده از قضیه حد مرکزی،

$$\mathbb{E} \left[f'^2\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{n}}\right) \right]$$

هرگاه $n \rightarrow \infty$ به $\mathbb{E}[f'^2]$ میل می‌کند. با استفاده از این دو تساوی در (۴.۶) اثبات قضیه به اتمام می‌رسد.

□

در اثبات‌های فوق برای سادگی فرض کردیم که توابع f, g هموار و کراندار هستند. با این حال قضیه فوق برای توابع لیپ‌شیتز نیز برقرار است. کافی است که در این قضیه به جای $f'(x)$ قرار دهیم

$$f'(x) := \limsup_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

۷. مطالعات تکمیلی

همان‌طور که قبلاً هم ذکر شد، نامساوی‌های ابرانقباضی و سوبولف لگاریتمی کاربردهای زیادی دارند که در این مقاله مجالی برای پرداختن به همه آنها نیست. لذا در بخش آخر به اشاراتی به بعضی از این مباحث اکتفا می‌کنیم.

اول این که نامساوی‌های ابرانقباضی معکوس^{۲۸} که متناظر با مقادیر $p, q < 1$ هستند نیز مورد مطالعه قرار می‌گیرند. نکته در این است که به ازای هر ماتریس تصادفی T ، عدد $p < 1$ و تابع مثبت $f > 0$ داریم

$$\|Tf\|_p \geq \|f\|_p,$$

که در آن $\|\cdot\|_p$ همانند قبل تعریف می‌شود.^{۲۹} به این نامساوی، نامساوی انقباضی معکوس گویند. حال می‌توان مانند قبل در مورد نامساوی‌های قوی‌تری از این نامساوی تحقیق کرد. دوباره با فرض اینکه T متعلق به یک نیم‌گروه مارکوف است، نامساوی‌های ابرانقباضی معکوس را می‌توان با استفاده از نامساوی‌های سوبولف لگاریتمی اثبات کرد. برای مطالعه در این زمینه به [۸] ارجاع می‌دهیم.

مثال ۱۰۴ در عین سادگی، یکی از مهم‌ترین مثال‌های مولدهای لیندبلاد است که کاربردهای زیادی دارد. فرض کنید $\Omega = \{+1, -1\}$ و π توزیع یکنواخت است. حال با استفاده از خاصیت تانسوری می‌توان نیم‌گروه مارکوف القایی که روی توابع بولی $f: \{+1, -1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ عمل می‌کند و نامساوی‌های متناظر با آنها را مطالعه کرد. به طور خاص دیدیم که این نگاه اثباتی از قضیه ۳۰۶ بدست می‌دهد. به طور کلی‌تر، از آنجا که توابع $f: \{+1, -1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ در ترکیبیات و علوم کامپیوتر نظری به طور طبیعی ظاهر می‌شوند، این نامساوی‌ها کاربردهای زیادی پیدا کرده و در آنالیز توابع بولی ظاهر می‌شوند. برای مطالعه بیشتر در این زمینه به [۴] ارجاع می‌دهیم.

یکی از مهم‌ترین کاربردهای نامساوی‌های سوبولف لگاریتمی در اثبات نامساوی‌های تجمع اندازه است. نامساوی‌های تجمع اندازه خود نیز نتیجه‌ای از نامساوی‌های هزینه ترابری (نامساوی‌های تالگرند^{۳۰}) هستند. حال نکته در این است که نامساوی‌های سوبولف لگاریتمی قوی‌تر از نامساوی‌های هزینه ترابری هستند و آنها را نتیجه می‌دهند. برای آشنایی با این مباحث به [۷] ارجاع می‌دهیم.

^{۲۸}Reverse hypercontractivity

^{۲۹}تأکید می‌کنیم که $\|\cdot\|_p$ برای $p < 1$ در نامساوی مثلث صدق نمی‌کند.

^{۳۰}Talagrand's inequality

نامساوی‌های سوبولف لگاریتمی همچنین مرتبط با نامساوی‌های هم‌محیطی هستند. البته نامساوی‌های هم‌محیطی قوی‌تر از نامساوی‌های سوبولف لگاریتمی هستند. به طور خاص می‌توان قضیه ۳.۶ را با استفاده از یک نامساوی هم‌محیطی اثبات کرد. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به [۹، ۲] ارجاع می‌دهیم. قضیه ۳.۶ از چند وجه قابل تعمیم است. نکته اول اینکه با استفاده از خاصیت تانسوری می‌توان این قضیه را برای مولد $\mathcal{L} = \mathbf{x} \cdot \nabla - \Delta$ که در آن ∇ عملگر گرادیان و Δ عملگر لاپلاس روی $\mathbb{R}^n$ است، نیز تعمیم داد. توجه کنید که این عملگر روی فضای توابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ عمل می‌کند و توزیع مانای متناظر با آن توزیع گاوسی n -بعدی است. نکته دوم این که فرض کنید توزیع π به فرم

$$d\pi = e^{-V} d\mathbf{x},$$

است که در آن $V(\mathbf{x})$ تابعی محدب است. مولد لیندبلاد متناظر با این توزیع احتمال برابر است با

$$\mathcal{L} = \nabla V \cdot \nabla - \Delta.$$

حال قضیه مهم بکری-امری^{۳۱} بیان می‌کند که اگر برای ثابت مثبت c ، ماتریس $\text{Hess}(V) - cI$ مثبت نیمه معین باشد که در آن $\text{Hess}(V)$ ماتریس هسیان^{۳۲} تابع V است و I ماتریس همانی است، آنگاه $\alpha_2(\mathcal{L}) \geq c/2$. توجه کنید که این تعمیمی از قضیه ۳.۶ است. نکته سوم این که قضیه بکری-امری به فضاهاى خمیده نیز قابل تعمیم است که در آن صورت، انحنای فضا نیز در تقریب α_2 ظاهر می‌شود. برای مطالعات بیشتر در این زمینه به [۹، ۲] ارجاع می‌دهیم.

در انتها برای کاربردی از نامساوی‌های ابرانقباضی در نظریه احتمال و نظریه اطلاعات به [۲، ۱] مراجعه کنید.

^{۳۱}Bakry-Emery criterion

^{۳۲}ماتریس هسیان ماتریسی $n \times n$ است و درایه (i, j) آن برابر $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} V$ است.

مراجع

- [1] R. Ahlswede and P. Gács, *Spreading of sets in product spaces and hypercontraction of the Markov operator*, Ann. Probability **4** (1976) 925–939.
- [2] S. Beigi, *Hypercontractivity and logarithmic Sobolev inequalities and their applications*, available at <http://math.ipm.ir/~beigi/files/HCLS.pdf>
- [3] E.B. Davies, L. Gross and B. Simon, *Hypercontractivity: A bibliographic review*, In: Ideas and Methods in Quantum and Statistical Physics, pp. 370–389, Cambridge University Press, New York, 1992.
- [4] R. de Wolf, *A brief introduction to Fourier analysis on the Boolean cube*, Theory of Computing Library, Graduate Surveys **1** (2008) 1–20.
- [5] P. Diaconis and L. Saloff-Coste, *Logarithmic Sobolev inequalities for finite Markov chains*, Ann. Appl. Probab. **6** (1996), no. 3, 695–750.
- [6] S. Ghahramani, *Fundamentals of Probability: With Stochastic Processes*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2018.
- [7] M. Ledoux, *Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities*, In: Séminaire de Probabilités de Strasbourg 33, pp. 120–216, Lecture Notes in Math. 1709, Springer, Berlin, 1999.
- [8] E. Mossel, K. Oleszkiewicz and A. Sen, *On Reverse Hypercontractivity*, Geom. Funct. Anal. **23** (2013) 1062–1097.
- [9] C. Villani, *Topics in Optimal Transportation*, Graduate Studies in Mathematics 58, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.



جلد ۱، شماره ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۰) صص ۸۲-۶۹

شناسه DOI: 10.22067/tmsj.2021.41183

<https://tmsj.um.ac.ir>

مقاله علمی-ترویجی، ترجمه

ریاضیات زیستی چیست و کاربرد آن چگونه است؟

آونر فریدمن

مترجم: امین‌اله خسروی^۱

^۱دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

amin.khosravi@mail.um.ac.ir

چکیده. مقاله زیر ترجمه‌ای است از مقاله‌ی

A. Friedman, *What is Mathematical Biology and how useful is it?*

Notices Amer. Math. Soc. **57** (2010), no. 7, 851-857.

این مقاله توسط آونر فریدمن، استاد برجسته دانشگاه و مدیر سابق انستیتوی علوم زیستی ریاضی در دانشگاه ایالتی اوهایو، نوشته شده است. در این مقاله، نویسنده تلاش داشته است تا به گونه‌های مختلف نقش متقابل ریاضیات و زیست‌شناسی را آشکار سازد و با ارائه مثال‌هایی این موضوع را توصیف نماید.

۱. سرآغاز

در سال‌های اخیر شاهد پیشرفت بی‌سابقه‌ای در زمینه علوم زیستی بوده‌ایم. شاید بارزترین رویداد، اتمام پروژه ژنوم انسانی باشد که نخستین گام برای درک ژنتیکی مولکولی اندامواره‌های انسان است. کشف ژن‌های غیر رمزگذار و همچنین درک ژرف‌تر دستگاه ژنومیک/پروتئومیک، با سرعتی بسیار به پیشرفت زیست‌شناسی انجامید. پیشرفت‌ها در مبارزه با بیماری‌های زوال آفرین مغز مانند آلزایمر، پارکینسون و ALS و همچنین

2020 Mathematics Subject Classification. 34B15, 35C10

کلیدواژگان. ریاضیات زیستی، کاربرد ریاضی در علوم زیستی و پزشکی.

تاریخ: دریافت ۱۳۹۹/۱۰/۱۰ پذیرش ۱۴۰۰/۶/۱۰

در مدیریت عوامل مخاطره آفرین برای سلامتی مانند AIDS، حشرات ناقل بیماری، و مقاومت به پادزیست (آنتی‌بیوتیک) به طور پیوسته گزارش می‌شوند. جامعه خواستار آن است که پژوهش‌های بنیادین، از طریق درک ژرف‌تر از ساز و کار بیماری و درمان بهتر پزشکی، هرچه سریع‌تر به زندگی طولانی‌تر و با کیفیت بالاتر بیانجامد. از این رو، در دستورکار ملی، بسیاری از زمینه‌های علوم زیستی از اولویت بالاتری برخوردارند. در پس سرخطها، پیشرفت‌های حیرت‌انگیز در علوم پایه و فن‌آوری نهفته است، از جمله تصویربرداری پزشکی، مهندسی زیستی در مقیاس نانو و آرایه‌های بیان ژن. این فن‌آوری‌ها به سرعت مجموعه‌های بزرگی از داده‌های بدون ساختار را تولید کرده و محققان را قادر به توضیح سازوکارها و مسیرهای اساسی زیست پزشکی کرده‌اند. این انفجار نتایج تجربی، توانایی پژوهشگران را در آمایش داده‌ها و گرفتن دانش از آن‌ها به چالش کشیده است.

بنابراین پیدایش مدل‌ها و فراهم بودن مجموعه‌های داده بزرگ که به آناکاوی [=آنالیز] کمی نیاز دارند، به همراه پشتیبانی عمومی بالا از پیشرفت‌های رو به رشد در علوم زیستی، فرصتی بزرگ برای علوم ریاضی فراهم آورده است. برای بهره‌برداری موفقیت‌آمیز از این فرصت، نیاز است که ریاضی‌دانان، پیش از آنکه قدرت ریاضیات را به عرصه ظهور برسانند، زبان دانشمندان علوم زیستی را، در حدی که بتوانند زیست‌شناسی پایه را به اندازه کافی دریابند، بیاموزند. گرچه که می‌توان انتظار داشت روش‌های هم‌اکنون ثابت شده در علوم ریاضی به سرعت به کار آیند، اما بی‌گمان آناکاوی کمی مسائل اساسی در علوم زیستی، به ایده‌ها و تکنیک‌های جدید نیاز دارد. در واقع، از دیدگاه دراز مدت، کاربردهای زیستی زمینه‌های جدیدی در ریاضیات راه‌اندازی می‌کنند، برای نمونه، شکل‌گیری الگو در معادلات واکنش-انتشار و مسائل ترکیبیاتی که در زمینه هم‌ترازی توالی‌ها مطرح می‌شوند. هم‌اکنون چندین گروه تحقیقاتی ریاضی زیستی در گروه‌های ریاضیات، آمار، علوم کامپیوتر، و زیست‌شناسی و همچنین مراکز آمار زیستی در مراکز تحقیقات پزشکی در سراسر کشور (آمریکا) وجود دارند. افزون بر این، موضوعات جداگانه ریاضیات زیستی در برنامه‌های برخی از موسسات ریاضی در ایالات متحده گنجانده شده‌اند. با این حال، اندازه فعلی جامعه علوم ریاضی زیستی در مقایسه با تقاضاهای موجود برای علوم زیستی، نسبتاً کوچک است. بنابراین، نیاز است تا ریاضیدانان و آماردانان را به این حیطه سوق داد تا بتوان نسل جدیدی از پژوهشگران همسنگ‌تر را پرورش داد.

این چالش‌ها ما را بر آن داشت تا موسسه علوم ریاضیات زیستی در دانشگاه ایالتی اوهایو را به عنوان یکی از موسسات ریاضی NSF/DMS راه‌اندازی کنیم. این موسسه در پاییز ۲۰۰۲ شروع به کار کرد و به عنوان اولین مدیر این موسسه، از نزدیک شاهد شور و شوق هزاران بازدیدکننده، اعم از ریاضیدان و زیست‌شناس، بوده‌ام. در این مقاله مایلم قسمتی از دانشی که به عنوان مدیر و پژوهشگر در MBI بدست آورده‌ام را در اختیار جامعه ریاضی قرار دهم.

۲. ریاضیات زیستی چیست؟

اگر سنجه یا واحد فیزیک اتم باشد، واحد زندگی سلول است؛ اما یک سلول بینهایت پیچیده‌تر است. یک سلول در پستانداران به طور معمول دارای 3×10^6 میلیون مولکول است. برخی از آن‌ها بسیار بزرگ هستند. مانند مولکول‌های DNA که از میلیون‌ها اتم تشکیل شده‌اند. اما یک سلول تنها مجموعه ای بزرگ از مولکول‌ها نیست. سلول کنترل و نظم را در بین مولکول‌های خود حفظ می‌کند، مانند ساخت و ساز در پروتئین-DNA. RNA. یک سلول مواد مغذی را جذب می‌کند و برای انجام عملکردهای خاص مانند ترشح مواد شیمیایی و یا جذب عوامل بیماری‌زا، زیست توده تولید می‌کند. سلول‌ها با حرکت به‌سوی منابع مغذی یا با آرام ماندن در هنگام کمبود منابع، خود را با خردمحیط خود سازگار می‌کنند و در هنگامی که شرایط مساعد است، تکرار می‌گردند. از این‌رو مدل‌سازی ریاضی فرایندهای سلولی، کاملاً چالش برانگیز است [۱]. افزون بر این، از آنجا که بدن انسان دارای 10^{13} سلول با گونه‌ها و کارکردهای گوناگون است که همیشه در حال رد و بدل کردن پیام با یکدیگر هستند، کاملاً روشن است که مدل‌های ریاضی حاصل از فرایندهای زیستی به شدت چالش برانگیزند. حتی از موفق‌ترین مدل‌ها تنها می‌توان انتظار داشت که فقط با شرایطی محدود کنار بیایند و همه متغیرها به‌جز مهمترین آن‌ها را نادیده بگیرند.

کار در ریاضیات زیستی همکاری بین یک ریاضیدان و یک زیست‌شناس است. زیست‌شناس مساله‌های زیستی را به‌میان می‌آورد و با مجموعه‌ای از آزمایش‌ها آن‌ها را توصیف می‌کند درحالی که ریاضیدان یک مدل را توسعه می‌دهد و آن را شبیه‌سازی می‌کند.

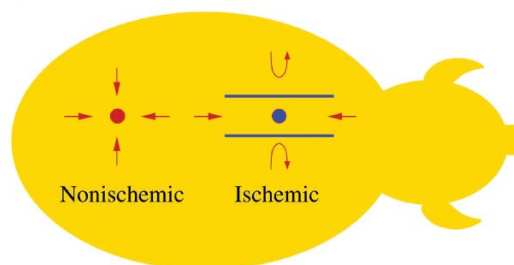
برای توسعه یک مدل، برای نمونه برحسب یک دستگاه معادلات دیفرانسیل، ریاضیدان باید نموداری از روابط بین متغیرهای زیستی معین کند و پارامترهای نرخ را مشخص کند. به طور معمول برخی از این پارامترها در منابع یافت نمی‌شوند و بایستی تخمین زده شوند. این پارامترها در فرایندی تکرار شونده از شبیه‌سازی‌ها، با هدف دستیابی به برازشی خوب با داده‌های تجربی، تعیین می‌گردند. در این فرایند ممکن است تکرارهای بسیاری انجام شود. از این‌رو زمان‌بر نبودن محاسبات در هر شبیه‌سازی بسیار مهم است. سرانجام هنگامی که شبیه‌سازی‌های مدل با نتایج تجربی مطابقت داشته باشد، آنگاه ممکن است این مدل را بتوان به عنوان یک مدل سودمند برای پیشنهاد فرضیه‌های جدید که از لحاظ زیست‌شناسی آزمایش‌پذیر می‌باشند، در نظر گرفت. این فرضیه‌ها ممکن است، برای نمونه، با افزایش در یک یا چند پارامتر نرخ در مدل، یک درمان خاص را پیشنهاد دهد.

این پرسش که “ریاضیات زیستی چگونه می‌تواند مفید باشد؟” در دو بخش قابل بحث است. آیا ریاضیات زیست‌شناسی را غنی‌تر می‌سازد، و آیا زیست‌شناسی الهام بخش ریاضیات جدید است؟ در ادامه نمونه‌هایی از پژوهش‌های انجام شده در موسسه ریاضیات زیستی ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهد هر دو زمینه دانش برای یکدیگر سودمند هستند.

۳. زخم‌های ایسکمی

زخم‌های مزمن مساله‌ای جهانی در حیطه بهداشت عمومی است که تنها در ایالات متحده سالانه ۶/۵ میلیون نفر درگیر آن هستند. آنچه که موجب زخم‌های ایسکمی^۱ (کمبود جریان خون) می‌شود، عوارض عروقی است که معمولاً با زخم‌های مشکل‌دار مرتبط هستند و پاسخ بهبودی را به سرعت مختل می‌کنند. اخیراً آزمایش‌هایی با مدل خوک برای مطالعه روند بهبودی زخم تحت رویکردی پیش بالینی (وابسته به دوران پیش از بروز نشانه‌های بیماری) توسط روی و همکاران انجام پذیرفت [۱۷]. در آن آزمایش‌ها، نخست یک فلپ پوستی دو ساقه‌ای^۲ با ضخامت کامل ایجاد شد به گونه‌ای که خون‌رسانی از زیر و لبه‌های دو طول فلپ انجام نشود. شکل ۱ را ببینید. سپس یک زخم دایره‌ای (زخم ایسکمی) وسط فلپ و زخمی دیگر (زخم غیر ایسکمی)

Top view



Side view



شکل ۱: بخش‌های آبی نشان دهنده موانع گردش خون است که با استفاده از فلپ دو ساقه‌ای ایجاد می‌شود و فلش‌های قرمز گردش خون در نزدیکی زخم را نشان می‌دهند.

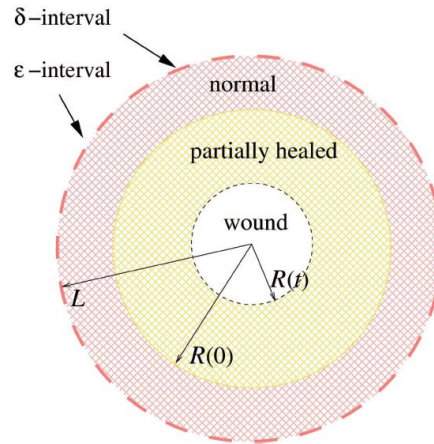
در جایی دیگر روی پوست حیوان ایجاد شد. به منظور تعیین استراتژی‌های درمانی که می‌توانند به بهبود زخم‌های ایسکمی کمک کنند، زو و همکاران [۱۸] مدلی ریاضی را توسعه دادند که در برگیرنده متغیرهای اصلی درگیر در مرحله بسته شدن زخم در روند بهبودی است. این متغیرهای اصلی عبارتند از: گونه‌های مختلف خون و سلول‌های بافتی، سیگنال‌های شیمیایی و تراکم بافتی. این مدل برحسب یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی، در یک حوزه ویسکوالاستیک تا حدی بهبود یافته فرمول‌بندی شد، جایی که قسمتی از مرز، یعنی سطح زخم باز، یک مرز آزاد است که از قبل مشخص نیست. اما هر شبیه‌سازی از مساله مرز آزاد در هندسه سه بعدی زمان بسیار زیادی را می‌گیرد. بنابراین چالش پیش‌رو این بود که چگونه هندسه را ساده کنیم در حالی که هنوز شرایط زخم ایسکمی را تحمیل می‌کنیم. زو و همکاران [۱۸] فرض کردند که زخم، همان‌گونه که در شکل

^۱ ischemic wounds

^۲ bipedicle dermal flap

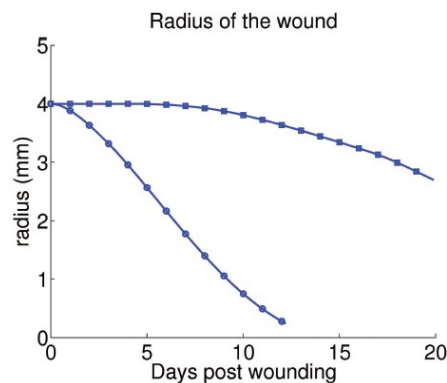
۲ نشان داده شده است، دایره‌ای شکل است و اینکه در محیط دایره، برش‌های کوچکی با سایز δ در $r = L$ تشکیل می‌شوند که با برش‌های مجاور با فاصله ε از هم جدا می‌شوند.

با میل دادن ε و δ به سمت صفر، با نسبت‌هایی مناسب، و با به‌کارگیری قضیه همگن‌سازی، آن‌ها نتیجه



شکل ۲: زخم باز ناحیه دایره‌ای $0 \leq r \leq R(t)$ است، ناحیه جزئاً بهبود یافته چنبره $R(t) \leq r \leq R(0)$ است و بافت سالم طبیعی ناحیه $R(0) \leq r \leq L$ می‌باشد.

گرفتند بعد از اینکه بریدگی‌ها بوجود آیند، برای هر شرط مرزی $u = u_s$ (برای جوابی از $\Delta u = f$) در $r = L$ و پیش از آنکه بریدگی‌ها به یک شرط مرزی درآیند، داریم $(1 - \alpha)(u - u_s) + \alpha \frac{\partial u}{\partial r} = 0$ که در آن α معیاری برای سنجش ایسکمی است؛ α نزدیک به ۱ به معنای ایسکمی شدید است. در شکل ۳ می‌توان شبیه‌سازی‌های مربوط به شعاع زخم‌های ایسکمیک باز و غیر ایسکمیک را در زمان ۲۰ روز دید. نتایج دارای



شکل ۳: شعاع ایسکمی ($\alpha = 0.92$) و غیر ایسکمی ($\alpha = 0$) در طول بازه زمانی ۲۰ روز. زخم غیرایسکمی پس از ۱۳ روز بسته می‌شود در حالی که زخم ایسکمی بهبود نمی‌یابد.

مطابقت بسیار زیادی با نتایج تجربی روی و همکاران [۱۷] دارد. اکنون این مدل به‌عنوان ابزاری برای پیشنهاد

فرضیه‌های آزمایش‌پذیر زیستی در زمینه بهبود زخم مورد استفاده قرار می‌گیرد، در نتیجه نیاز به گمانه زنی و انجام آزمایش‌های زمان‌بر روی حیوانات، کاهش می‌یابد.

۴. مسائل مرز آزاد الهام گرفته از سرطان

نظریه ریاضی مربوط به مسائل مرز آزاد طی ۴۰ سال گذشته بسیار گسترش یافته است، اما دامنه کاربردهای جدید در حد متوسط باقی مانده است. اخیراً تغییرات بافت شناسی در زیست شناسی مدل‌های جدیدی را ارائه داده و الهام بخش نظریه‌های جدیدی بوده است. برای نمونه می‌توان از رشد تومور، بهبود زخم، و زیست شناسی تکاملی نام برد. ما در اینجا مدل‌های مربوط به تومور را بررسی خواهیم کرد و به توصیف دسته‌ای جدید از مسائل مرز آزاد مرتبط با انشعابات تقارن-شکن^۳ از یک تومور کروی، و پایداری آن می‌پردازیم. توموری را در نظر بگیرید که ناحیه $\Omega(t)$ را در زمان t در بر گرفته است و فرض کنید تمام سلول‌های داخل $\Omega(t)$ ، سلول‌های توموری یکسان هستند و به طور یکنواخت توزیع شده‌اند. با توجه به تکثیر سلولی، این ناحیه گسترش خواهد یافت، اما فقط تا زمانی که منابع مغذی σ به اندازه کافی برایش موجود باشد. فرض می‌کنیم که σ در سیستم انتشار زیر صدق کند:

$$\sigma_t - \Delta\sigma + \sigma = 0 \quad \text{in } \Omega(t), \quad \sigma = 1 \quad \text{on } \partial(\Omega(t)).$$

همچنین فرض می‌کنیم نرخ تکثیر S به‌طور خطی وابسته به σ باشد. به عبارتی:

$$s = \mu(\sigma - \tilde{\sigma}) \quad (\mu > 0, 0 < \tilde{\sigma} < 1);$$

به سخن ساده‌تر، اگر $\sigma > \tilde{\sigma}$ تومور گسترش می‌یابد و اگر $\sigma < \tilde{\sigma}$ تومور جمع می‌شود. بنابر قانون بقاء جرم، $\text{div } \vec{v} = 0$ که در آن $\vec{v}$ سرعت سلول‌های داخل تومور است. با فرض قانون داری^۴ $\vec{v} = -\nabla p$ که در آن p فشار درونی است، خواهیم داشت:

$$-\Delta p = \mu(\sigma - \tilde{\sigma}) \quad \text{in } \Omega(t).$$

ما شرایط مرزی

$$\sigma = \kappa \quad \text{on } \partial(\Omega(t)), \quad (\kappa \text{ انحنای متوسط است})$$

که نشان‌دهنده نیروهای چسبندگی بین سلول‌ها در مرز است، و همچنین شرط پیوستگی

$$V_n = \vec{v} \cdot \vec{n} = -\frac{\partial p}{\partial n} \quad \text{on } \partial\Omega(t),$$

^۳ symmetry-breaking bifurcations

^۴ Darcy's law

که در آن V_n سرعت مرز آزاد در جهت بردار نرمال برون سوی $\vec{n}$ است، معرفی می‌کنیم. ثابت می‌شود که برای هر $\tilde{\sigma}$ ، μ -خانواده‌ای از جواب‌های به‌طور شعاعی متقارن ایستا با شعاع R و تنها وابسته به $\tilde{\sigma}$ موجود است به‌طوری که

$$\frac{1}{R^2}(R \coth R - 1) = \frac{\tilde{\sigma}}{3}, \quad \sigma(r) = \frac{R}{\sinh R} \frac{\sinh r}{r},$$

$$P(r) = C - \mu\sigma(r) + \frac{\mu}{\sigma}\tilde{\sigma}r^2.$$

که در آن $C = \frac{1}{R} + \mu - \frac{\mu}{\sigma}\tilde{\sigma}R^2$ زمانی که $\tilde{\sigma}$ از یک به صفر تغییر می‌کند، شعاع R از صفر به بینهایت تغییر می‌کند.

مساله ایستا برای سوالاتی مناسب است که به طور طبیعی در حیطه آنالیز انشعابی مطرح می‌شوند که در آن μ پارامتر انشعاب می‌باشد. در [۱۴]، [۵] و [۷] نشان داده شده است که، برای R داده شده، خانواده‌ای از شاخه‌های انشعاب تقارن شکن از جواب‌هایی که از $\mu = \mu_n(R)$ شروع می‌شوند وجود دارند که در آن $0 < \mu_2 < \mu_3 < \dots < \mu_n < \dots$

$$\mu = \mu_n + \epsilon\mu_{n,1} + O(\epsilon^2)$$

$$r = R + \epsilon Y_{n,0}(\theta) + O(\epsilon^2),$$

و $Y_{n,0}$ همساز کروی از درجه $(n, 0)$ است. افزون براین، جواب‌های کروی مجانباً پایدار هستند (وقتی $t \rightarrow \infty$)، هرگاه $\mu < \mu_*(R)$ و این جواب‌ها به‌طور خطی ناپایداراند (وقتی $t \rightarrow \infty$)، هرگاه $\mu > \mu_*(R)$. در اینجا اگر $R > \bar{R}$ ، آنگاه $\mu_*(R) = \mu_2(R)$ و اگر $R < \bar{R}$ ، آنگاه $\mu_*(R) < \mu_2(R)$ که در آن $\bar{R} = 0.62207\dots$ جوابی از یک معادله غیر جبری است. در حالت $R > \bar{R}$ ، اولین نقطه انشعاب μ_2 ترابحرانی^۵ است، با یک شاخه که به طور خطی پایدار است و شاخه دیگر ناپایدار است [۱۲]. نتایج انشعاب به حالتی که قانون دارسی با معادلات استوکس ([۱۰] و [۱۱]) جایگزین شوند، توسعه یافته است؛ این توموری را مدل‌سازی می‌کند که در یک بافت شبه مایع، مثلاً در غدد پستانی و یا در مغز، در حال رشد است. اما در این حالت اولین شاخه انشعاب دارای مرزی با تعداد زیاد انگشت می‌باشد:

$$r = R + \sum Y_{n^*(R),0}(\theta) + O(\epsilon^2),$$

که در آن هنگامی که $r \rightarrow \infty$ ، $n^*(R) \rightarrow \infty$. تعبیر زیستی بدین گونه است که هنگامی که یک تومور کروی در یک بافت شبه مایع ناپایدار می‌شود، این باعث رشد ضایعات انگشت مانند زیادی می‌شود؛ از این رو خطر فراگستری^۶ تومور بیشتر می‌شود.

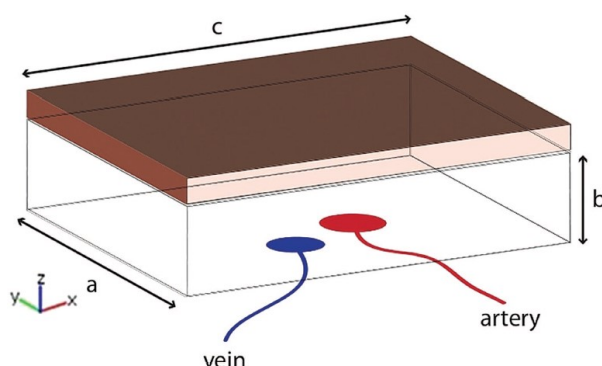
^۵transcritical

^۶metastasis

در [۲]، مدل‌های توموری با انواع گوناگون تومور (در حال تکثیر، غیرفعال و مرده) از لحاظ ریاضی آنالیز شده‌اند، اما وجود جواب‌های کروی ایستا و انشعاب‌هایشان و پایداری، اغلب یک مساله باز باقی مانده است.

۵. انتقال بافت جراحی

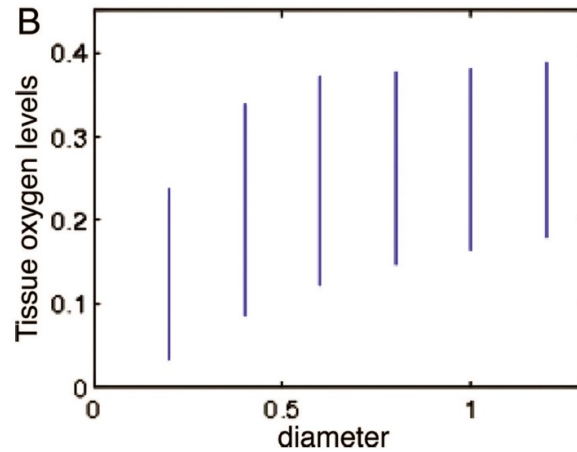
جراحی میکروسکوپی ترمیمی یک روش بالینی است که برای انتقال مقادیر زیادی از بافت بیمار از یک مکان به مکان دیگر به منظور بازگرداندن ناهنجاری‌های جسمی ناشی از ضربه، تومور یا ناهنجاری‌های مادرزادی مورد استفاده قرار می‌گیرد. روال کار در این زمینه، انتقال بافت با استفاده از رگ‌های خونی است که به‌طور فزاینده کوچکتر است، باعث کاهش مشکلات مرتبط با برداشت بافت می‌شود اما احتمال اینکه خون‌رسانی به بافت انتقال‌دهنده برای بهبودی کافی نباشد را افزایش می‌دهد. فلپ‌های جراحی در حال حاضر بر اساس میزان خون‌رسانی در رگ طراحی شده‌اند. با این حال، هیچ شیوه عینی برای کمک به جراح در تصمیم‌گیری در مورد میزان انتقال یک فلپ با توجه به قطر رگ سوراخ‌کننده وجود ندارد. گر فلپ جراحی بیش از اندازه بزرگ باشد، ممکن است بخشی از آن دچار ایسکمی شده و از بین برود و این نیاز به جراحی دیگری دارد. یک مدل ریاضی توسط ماتساوینوس و همکاران [۱۵] برای تعیین انتقال اکسیژن در یک فلپ مستطیلی با یک رگ سوراخ‌کننده ساخته شده است. شکل ۴ را ببینید.



شکل ۴: لایه رنگی بالا شامل درم، اپیدرم و شبکه زیر پوستی است. لایه پایین نشان دهنده بافت چربی است. شریان و ورید سوراخ‌کننده در پایین فلپ قرار دارد.

مدل بر اساس یک رویکرد چند فازی طراحی شده است که فرض آن بر این است که فلپ تشکیل شده است از سلول‌های بافت، سلول‌های خونی شریانی و سلول‌های خونی وریدی با کسر حجمی $\theta_a(x)$ ، $\theta_c(x)$ و $\theta_v(x)$. بدین ترتیب این مدل شامل سه معادله انتقال/انتشار برای غلظت اکسیژن و ۲ قانون پایستگی برای جریان خون شریانی و وریدی است. شبیه سازی مدل نشان می‌دهد که کدام فلپ بعد از چهار ساعت از انتقال زنده بیرون می‌آید و کدام دچار بافت مردگی می‌شود. در شکل ۵ مثالی از یک فلپ با ابعاد ۴ در ۲/۵ در ۱ سانتیمتر با قطرهای شریانی مختلف از ۰/۲ سانتیمتر تا ۱/۲ سانتیمتر نمایش داده می‌شود. هر پاره خط

عمودی نمایش دهنده گستره سطح اکسیژن در فلپ می‌باشد. زمانی که سطح زیر ۱۵٪ باشد (که ۱۵ درصد سطح اکسیژن در بافت سالم است) فلپ دچار بافت مردگی می‌شود. برای دست یافتن به یک مدل پیش‌بینی



شکل ۵: محدوده غلظت اکسیژن در فلپ با ابعاد ۴ در ۲/۵ در ۱ سانتی‌متر با قطر شریانی مختلف در محدوده ۲/۰ سانتی‌متر تا ۱/۲ سانتی‌متر.

کننده و قابل استفاده برای جراح، آزمایشات با مدل‌های حیوانی جهت تعیین دقیق‌تر پارامترها در معادلات دیفرانسیل و، مهم‌تر از آن، پرداختن در مدل به مسئله ناهمگونی عروق در بافت، نیاز است.

۶. سیستم‌های واکنش-انتشار-هایپربولیک در حمل و نقل نوروفیلانمنت در آکسون

بیشتر پروتئین‌های آکسونی در بدنه سلول عصبی سنتز می‌شوند و توسط مکانیسم‌های حمل آکسون در امتداد آکسون‌ها منتقل می‌شوند.

یک مدل ریاضی توسط کراسین و همکاران [۳] ساخته شد که پروفایل و سرعت جمعیت پروتئین‌های منتقل شده را به همان صورتی تعیین می‌کند که در آزمایش‌های درون تنی (درون جانوری) و برون تنی (در محیط کشت) مشاهده شده است. مدل توسط یک دستگاه هایپربولیک از معادلات زیر توصیف شده است:

$$\epsilon(\partial_t + v_i \partial_x) p_i = \sum_{j=1}^n k_{ij} p_j, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

که در آن $\sum_{i=1}^n k_{ij} = 0$ ، برای $i \neq j$ داریم $k_{ij} \geq 0$ و $0 < \epsilon \leq 1$. در اینجا $p_i(x, t)$ چگالی محموله در یکی از n حالت‌ها (حرکت به جلو در طول مسیر، حرکت به عقب، استراحت، خارج از مسیر و غیره) و x فاصله تا بدنه سلول است. در [۸]، با قرار دادن

$$p_m(x, t) = \lambda_m Q_m \left(\frac{x - vt}{\sqrt{\epsilon}}, t \right),$$

که در آن λ_m توسط شرایط مرزی در $x = 0$ تعیین می‌شود و v میانگین وزنی سرعت‌های v_i (ها می‌توانند مثبت و یا منفی باشند) است، ثابت شد هنگامی که $\epsilon \rightarrow 0$ ، داریم $Q_m(s, t) \rightarrow Q(s, t)$ که در آن $Q(s, t)$ جواب کران‌دار یک سیستم هایپربولیک به صورت زیر است: سرعت آن ثابت است اما پروفایل آن کاهش می‌یابد.

$$(\partial_t - \sigma^2 \partial_s^2) Q(s, t) = 0, \quad -\infty < s < \infty, \quad t > 0,$$

$$Q(s, 0) = \begin{cases} 1 & -\infty < s < 0 \\ q_0(s) & 0 < s < \infty, \end{cases}$$

که در آن $q_0(s)$ به شرایط اولیه p_i وابسته است و σ^2 تابعی از k_{ij} می‌باشد. این نتیجه که الهام گرفته از محاسبات رسمی رید و همکاران [۱۶] است، نشان می‌دهد که محموله به صورت یک موج تقریبی حرکت می‌کند: سرعت آن ثابت است اما پروفایل آن کاهش می‌یابد. نتیجه بالا به حالتی که حرکت محموله در چندمسیره‌ها را نیز شامل شود، گسترش یافت [۹].

۷. پاسخ ریه به عفونت

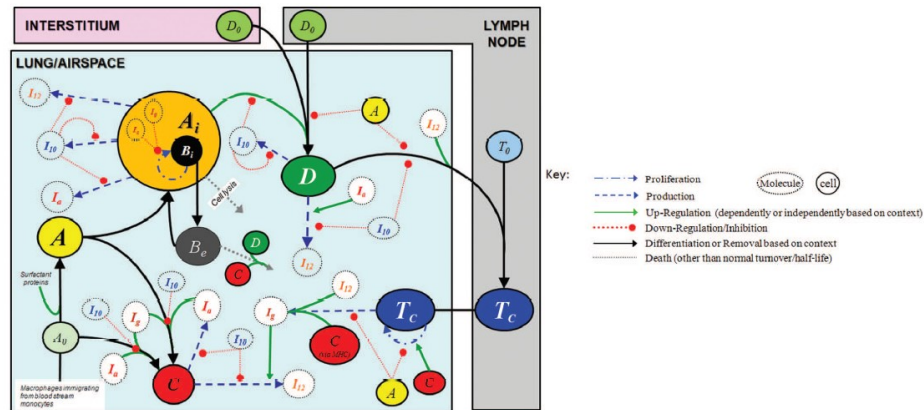
محیط ریه جهت سازماندهی مجدد و حذف مهاجمین، بدون ایجاد التهاب حاد، مختص شده است. با این حال، این استراتژی التهابی بسیار منظم می‌تواند برای میزبان، در هنگامی که یک پاسخ التهابی قوی و سریع برای ریشه‌کنی موثر پاتوژنها نیاز است، زیان آور باشد. چنین چیزی، برای مثال، در مراحل اولیه عفونت با مایکوباکتریوم سل دیده می‌شود. ماکروفاژهای آلوئولار^۷ که نقش مهمی را در سیستم ایمنی ذاتی در ریه ایفا می‌کنند، به تنهایی قادر به مقابل علیه تمام باکتری‌ها نیستند. با کمک خانواده دیگر از سلول‌ها به نام سلول‌های دارینه‌ای^۸، ماکروفاژهای آلوئولار با گره‌های لنفاوی ارتباط برقرار می‌کنند تا گروهی از ماکروفاژهای التهابی به نام ماکروفاژهای به طور کلاسیک فعال شده (به اختصار CAM) را فعال کنند و آنها را به ریه‌ها انتقال دهند.

تقریباً دو ماه طول می‌کشد قبل از اینکه CAM‌ها جمعیت غالب ماکروفاژها در ریه شوند؛ یعنی قبل از اینکه تعداد سلولهای از تعداد ماکروفاژهای آلوئولار پیشی بگیرد. این زمان را زمان سوئیچ می‌نامند. با در نظر گرفتن اینکه بین ۵ تا ۱۰ درصد جمعیت جهان نشانه‌های کلینیکی بیماری سل در آنها ایجاد می‌شود، کاملاً روشن است که تحقیق در این باره که چطور می‌توان زمان سوئیچ را کوتاه‌تر کرد از اهمیت ویژه برخوردار است. یک مدل ریاضی به وسیله دی و همکاران [۴] برای پرداختن به این مسئله توسعه یافت. نموداری از فعل و

^۷macrophage alveolar

^۸dendritic

انفعالات بین گونه‌های سلولی مختلف، سیتوکین‌ها و باکتری‌ها را می‌توان در شکل ۶ دید که بر اساس متون زیست پزشکی تهیه شده است.



شکل ۶: نمودار فعل و انفعالات بین انواع سلولهای مختلف و سیتوکین‌ها. باکتری‌ها هم در ماکروفاژهای آلوئولار (A_i) و هم به صورت خارجی یافت می‌شوند.

بر اساس این نمودار یک دستگاه معادلات دیفرانسیل به دست می‌آید که پارامترهای آن از متون، یا پارامترهای تخمینی به دست آمده از تجزیه و تحلیل میزان حساسیت، گرفته شده است.

شبیه سازی های مدل برای زمان سوئیچ ۵ روز و، پس از بهبودی از عفونت، برای باقیمانده باکتری‌ها، 10^4 باکتری در سانتی متر مکعب را در ریه پیش‌بینی می‌کند؛ این اعداد در تطابق با متون زیست پزشکی است. از این مدل برای تعیین تاثیر داروهای درمانی، مانند $\text{IFN-}\gamma$ ، بر کوتاه سازی زمان سوئیچ و لذا کاهش بار باکتریایی در طول هفته‌های نخستین عفونت و کاهش باقیمانده بار باکتریایی پس از بهبود میزبان، استفاده می‌شود.

مدلسازی رئوسات^۹ ایمنی ماکروفاژهای ریه در پاسخ به عفونت تنها به عفونت سل محدود نمی‌شود. در واقع، همان ایده کاهش زمان سوئیچ برای سایر عفونت‌های هوایی نیز قابل بکارگیری است. با این حال، برای برخی عفونت‌ها، مطلوب این است که فعالسازی پاسخ شدید پیش التهابی ایمنی را کند کرد. این حالتی است که برای نمونه در سیاه زخم پیش می‌آید. در سیاه زخم پاسخ بسیار سمی و سریع سیستم ایمنی، میزبان آلوده را زیر فشار قرار می‌دهد و ممکن است منجر به شوک سپسیس^{۱۰} شود.

^۹ rheostat

^{۱۰} sepsis

۸. تمایز سلولی

سلول T نوعی سلول خونی است که مولفه کلیدی سیستم ایمنی است. سلول‌های T به سلول‌های TH1 و یا TH2 که دارای عملکرد متفاوت هستند، تمایز می‌یابند. تصمیم بر اینکه سلول به چه نوع سلولی تمایز یابد، وابسته به غلظت فاکتورهای نسخه برداری T-bet (χ_1) و GATA-3 (χ_2) در سلول می‌باشند. یک سلول به TH2 (TH1) تمایز می‌یابد، هرگاه χ_1 بالا (پایین) و χ_2 پایین (بالا) باشد. در این زمینه یک مدل ریاضی توسط یاتس و همکاران [۱۹] [۱] را هم ببینید) توسعه یافته است. بر این اساس، χ_i توسط یک سیستم دینامیکی به صورت

$$\frac{d\chi_i}{dt} = f_i(\chi_1, \chi_2, S_i(t)) \quad (i = 1, 2),$$

توسعه می‌یابد که در آن $S_i(t)$ یک سیگنال به صورت

$$S_i(t) = \frac{C_i(t) + \iint \chi_i \Phi(\chi_1, \chi_2, t) d\chi_1 d\chi_2}{\iint \Phi(\chi_1, \chi_2, t) d\chi_1 d\chi_2},$$

و $C_i(t)$ یک سیگنال بیرونی (یعنی یک عفونت) است و همچنین $\Phi(\chi_1, \chi_2, t)$ چگالی سلول‌ها با غلظت (χ_1, χ_2) در زمان t می‌باشد. تابع Φ در قانون پایستگی زیر

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial \chi_i} (f_i \Phi) = g \Phi,$$

صدق می‌کند که در آن g نرخ رشد، و f_i دارای فرم خاص

$$f_i(\chi_1, \chi_2, S_i(t)) = -\mu \chi_i + (\alpha_i \frac{\chi_i^n}{k_i^n + \chi_i^n} + \sigma_i \frac{s_i}{\rho_i + s_i}) (\frac{1}{1 + \chi_j / \gamma_j}) + \beta_j,$$

است که در آن $(i, j) = (1, 2)$ و $(i, j) = (2, 1)$. فریدمن و همکاران در [۱۳] نشان دادند، زمانی که $t \rightarrow \infty$ ، تابع $\Phi(\chi_1, \chi_2, t)$ ، با توجه به پارامترهای سیستم دینامیکی، به اندازه دیراک ۱-قله، اندازه‌های دیراک ۲-قله، و یا اندازه‌های دیراک ۴-قله همگراست. ایده اثبات این است که از یک دنباله تطبیقی تودرتو از دامنه‌هایی که با افزایش زمان مسیرهای سیستم دینامیکی را محصور می‌کنند استفاده کنیم و سپس ثابت کنیم که دنباله تودرتو به ۱، ۲ یا ۴ نقطه همگراست. مکان هر قله در صفحه (χ_1, χ_2) ، معین می‌کند که آیا آن نقطه نمایشی از سلول‌های TH1 است و یا سلول‌های TH2. چنین ایده‌ای را می‌توان برای سیستم‌های دینامیکی دیگر با ضرایب غیرموضعی به کار بست.

۹. نتیجه

از لحاظ تاریخی، علم و تکنولوژی یک نیروی پیش‌برنده برای قضیه‌های جدید در ریاضی بوده‌اند. همبستگی عالی بین علوم فیزیک و ریاضی در جهان شناخته شده است. هر دو رشته با حمایت از یکدیگر پیشرفت کردند. معلم مشهور، جان دیویی، در کتابش به نام کودک و جامعه (۱۹۰۱) می‌نویسد که “ما یکسری زمین‌های دسته‌بندی شده نداریم که یکی از آنها ریاضی باشد دیگری فیزیک و دیگری تاریخ. ما نایستی به مدت طولانی به هر کدام از آنها به تنهایی بپردازیم. ما در جهانی زندگی می‌کنیم که تمام کناره‌ها و جوانب آن به یکدیگر گره خورده‌اند؛ همه مطالعات در ورای روابطی که در یک جهان مشترک بزرگ هستند، رشد می‌کنند.” درستی آن چیزی که جان دیویی در سال ۱۹۰۱ نوشت، امروزه بیشتر به چشم می‌آید، به ویژه در ریاضیات زیستی. هرچند مثال‌های کمی در این مقاله هستند که گویای این مطلب‌اند، اما در ورای این مثال‌ها، حیطه‌هایی اساسی و قابل توجه از زیست‌شناسی موجوداند که توسط ریاضیات پیشرفت کرده‌اند، مانند علوم اعصاب محاسباتی، دینامیک جمعیت، بوم‌شناسی، شیوع بیماری و گیاه‌شناسی نمونه‌هایی از این نوع هستند. در ریاضیات نیز می‌توان مطالعاتی را یافت که با استفاده از کاربردهای زیست‌شناسی انجام می‌شوند مانند معادلات واکنش-انتشار، شکل‌گیری الگو، معادلات دیفرانسیل تصادفی، روش‌های عددی و روش‌های ترکیبی که روش‌های گسسته را به پیوسته مرتبط می‌کنند. با در نظر گرفتن رویه حاضر در ریاضیات زیستی، من معتقدم که در دهه پیش رو ریاضیات مرز آینده زیست‌شناسی و زیست‌شناسی مرز آینده ریاضیات خواهد بود.

نسخه انگلیسی این مقاله را در [۶] ببینید.

مراجع

- [1] B.D. Aguda and A. Friedman, *Models of Cellular Regulation*, Oxford University Press, 2008.
- [2] X. Chen and A. Friedman, *A free boundary problem for an elliptic-hyperbolic system: An application to tumor growth*, SIAM J. Math. Anal. **35** (2003) 974–986.
- [3] G. Craciun, A. Brown and A. Friedman, *A dynamical system model of neurofilament transport in axons*, J. Theor. Biology **237** (2005) 316–322.
- [4] J. Day, A. Friedman and L.S. Schlesinger, *Modeling the immune response rheostat of macrophages in the lung in response to infection*, PNAS **106** (2009) 11246–11251.
- [5] M. Fontelus and A. Friedman, *Symmetry-breaking bifurcations of free boundary problems in three dimensions*, Asymptotic Analysis **35** (2003) 187–206.
- [6] A. Friedman, *What is Mathematical Biology and how useful is it?* Notices Amer. Math. Soc. **57** (2010), no. 7, 851–857.
- [7] A. Friedman and B. Hu, *Bifurcation from stability to instability for a free boundary problem arising in a tumor model*, Archive Rat. Mech. and Anal. **180** (2006), 293–330.

- [8] A. Friedman and B. Hu, *Uniform convergence for approximate traveling waves in reaction-hyperbolic systems*, Indiana Univ. Math. J. **56** (2007) 2133–2158.
- [9] A. Friedman and B. Hu, *Uniform convergence for approximate traveling waves in linear reaction-diffusion-hyperbolic systems*, Arch. Rat. Mech. Anal. **186** (2007) 251–274.
- [10] A. Friedman and B. Hu, *Bifurcation for a free boundary problem modeling tumor growth by Stokes equation*, SIAM J. Math. Anal. **39** (2007) 174–194.
- [11] A. Friedman and B. Hu, *Bifurcation from stability to instability for a free boundary problem modeling tumor growth by Stokes equation*, J. Math. Anal. Appl. **327** (2007) 643–664.
- [12] A. Friedman and B. Hu, *Stability and instability of Liapunov- Schmidt and Hopf bifurcation for a free boundary problem arising in a tumor model*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008) 5291–5342.
- [13] A. Friedman, C.Y. Kao and C.W. Shih, *Asymptotic phases in cell differentiation model*, J. Diff. Eqs. (2009) 736–769.
- [14] A. Friedman and F. Reitch, *Symmetry-reactive bifurcation of analytic solutions to free boundary problems: An application to a model of tumor growth*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001) 1587–1634.
- [15] A. Matzavinos, C.Y. Kao, J. Edward, F. Green, A. Sutradhar, M. Miller and A. Friedman, *Modeling oxygen transport in surgical tissue transfer*, PNAS **106** (2009), 12091–12096.
- [16] M.C. Reed, S. Venakides and J.J. Blum, *Approximate traveling waves in linear reaction-hyperbolic equations*, SIAM J. Appl. Math. **50** (1990) 167–180.
- [17] S. Roy, G. Gordillo, V. Bergdall, J. Green, C.B. Marsh, L.J. Gould and C.K. Sen, *Characterization of a pre-clinical model of chronic ischemic wound*, Physiol. Genomics **37** (2009) 211–224.
- [18] C. Xue, A. Friedman and C.K. Sen, *A mathematical model of ischemic cutaneous wounds*, PNAS **106** (2009) 16782–16787.
- [19] A. Yates, R. Callard and J. Stark, *Combining cytokine signaling with T-bet and GATA-3 regulations in TH1 and TH2 differentiation: A model for cellular decision making*, J. Theor. Biology **231** (2004) 181–196.



Towards Mathematical Sciences

Volume 1, Issue 1, 2021



Publisher

[Ferdowsi University of Mashhad](#)

Director-in-Charge

[Mohammad Sal Moslehian](#)

Editor-in-Chief

[Shirin Hejazian](#)

Executive Manager

[Mohammad Janfada](#)

Editorial Board

[Masoud Ariannejad](#), *University of Zanjan, Zanjan*

[Mohammad Janfada](#), *Ferdowsi University of Mashhad*

[Arezou Habibirad](#), *Ferdowsi University of Mashhad*

[Davod Khojasteh Salkuyeh](#), *University of Guilan*

[Amir Daneshgar](#), *Sharif University of Technology*

[Mahdi Doostparast](#), *Ferdowsi University of Mashhad*

[Ali Dolati](#), *Yazd University*

[Farzad Radmehr](#), *Ferdowsi University of Mashhad*

[Habib Rajabi Mashhadi](#), *Ferdowsi University of Mashhad*

[Bakhtiyar Shabani](#), *Ferdowsi University of Mashhad*

[Ahmad Safapour](#), *Vali-E-Asr University of Refsanjan*

[Massoumeh Fashandi](#), *Ferdowsi University of Mashhad*

[Gholam Reza Mohtashami Borzadaran](#), *Ferdowsi University of Mashhad*

[Ehsan Momtahn](#), *Yasouj University*

[Ali Asghar Molavi](#), *Hakim Sabzevari University*

[Madjid Mirzavaziri](#), *Ferdowsi University of Mashhad*

Advisory Board

[Faezeh Toutounian Mashhad](#), *Ferdowsi University of Mashhad*

[Rahim Zare Nahandi](#), *University of Tehran*

[Omid Ali Shehni Karamzadeh](#), *Shahid Chamran University of Ahvaz*

[Mohammad Ghasem Vahidi Asl](#), *Shahid Beheshti University*

[Hassan Sadeghi](#), *Ferdowsi University of Mashhad*

[Bahman Honary](#), *Ferdowsi University of Mashhad*

All rights are reserved for Ferdowsi University of Mashhad.

Mailing Address: TMSJ Office, Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran. P. O. Box 91775-1159.

Website Address: <https://tmsj.um.ac.ir>

Email: tmsj@um.ac.ir

Phone: +98-51-38806222 **fax:** +98-51-38807358



به سوی علوم ریاضی



فهرست مطالب

- ۱.....افت نوع اول و دوم درفرآیند یاددهی-یادگیری ریاضی در آموزش عمومی.....
ا. رفیع پور
- ۱۴.....مروری بر پیدایش و تحول مفهوم تابع.....
م. امیاری
- ۲۴.....تعبیر فیزیکی و هندسی مشتق گیری و انتگرال گیری کسری.....
ح. غلامی چهکنند؛ مرتضی گچ پزان
- ۳۵.....راز فالنامه شیخ بهائی.....
م. صال مصلحیان
- ۴۰.....نامساوی های ابرانقباضی و سوبولف لگاریتمی.....
س. ابوالفتح بیگی
- ۶۹.....ریاضیات زیستی چیست و کاربرد آن چگونه است؟.....
آ. فریدمن، مترجم: ا. خسروی