

دوره ۲، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۱



به سوی علوم ریاضی

شاپا الکترونیک ۵۱۶۲-۲۷۸۳

tmsj.um.ac.ir



بسم الله الرحمن الرحيم

به سوی علوم ریاضی

دارای پروانه انتشار شماره ۸۶۳۹۶ به تاریخ ۱۳۹۹/۲/۱۵ از وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی، شاپا الکترونیک ۵۱۶۲-۲۷۸۳

دوره ۲، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۱

صاحب امتیاز: دانشگاه فردوسی مشهد

مدیر مسئول

محمد صال مصلحیان

سردبیر

شیرین حجازیان

مدیر اجرایی

محمد جانفدا

اعضای هیات تحریریه

مسعود آراین نژاد، دانشگاه زنجان

محمد جانفدا، دانشگاه فردوسی مشهد

آرزو حبیبی راد، دانشگاه فردوسی مشهد

داود خجسته سالکویه، دانشگاه گیلان

امیر دانشگر، دانشگاه صنعتی شریف

مهدی دوست پرست، دانشگاه فردوسی مشهد

علی دولتی، دانشگاه یزد

فرزاد راد مهر، دانشگاه فردوسی مشهد

حبیب رجبی مشهدی، دانشگاه فردوسی مشهد

بختیار شعبانی ورکی، دانشگاه فردوسی مشهد

احمد صفاپور، دانشگاه ولیعصر رفسنجان

معصومه فشندی، دانشگاه فردوسی مشهد

غلامرضا محتشمی برزادران، دانشگاه فردوسی مشهد

احسان ممتحن، دانشگاه یاسوج

علی اصغر مولوی، دانشگاه حکیم سبزواری

مجید میرزا وزیری، دانشگاه فردوسی مشهد

اعضای مشورتی هیات تحریریه

فائزه توتونیان مشهد، دانشگاه فردوسی مشهد

رحیم زارع نهندی، دانشگاه تهران

امیدعلی شهنی کرم زاده، دانشگاه شهید چمران اهواز

محمد قاسم وحیدی اصل، دانشگاه شهید بهشتی

حسن صادقی، دانشگاه فردوسی مشهد

بهمن هنری، دانشگاه فردوسی مشهد

این نشریه به صورت دوفصلنامه (دو شماره در سال) منتشر می شود.

کلیه حقوق برای دانشگاه فردوسی مشهد محفوظ است

نشانی:

مجله‌ی به سوی علوم ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، ص.ب. ۱۱۵۹، مشهد ۹۱۷۷۵

ایمیل: tmsj@um.ac.ir

آدرس وبسایت: <https://tmsj.um.ac.ir>

فاکس: ۰۵۱-۳۸۸۰۷۳۵۸

تلفن: ۰۵۱-۳۸۸۰۶۲۲۲

مجله به سوی علوم ریاضی با هدف عمومی سازی ریاضیات، کمک به آشنایی جامعه به طور عام و جامعه دانشگاهی به طور خاص با جنبه‌های مختلف و کاربردهای ریاضی، آمار، و کامپیوتر و ارتباط آنها با سایر علوم در قالب چاپ مقالات علمی-ترویجی مرتبط می‌باشد.

این مجله مقالات در زمینه‌های ریاضی محض، ریاضی کاربردی، آمار و احتمال، علوم کامپیوتر، آموزش ریاضی، تاریخ و فلسفه ریاضی، کاربردهای ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر در سایر علوم، و نقدهای علمی را برای بررسی می‌پذیرد. همچنین ترجمه مقالاتی در موضوعات گفته شده نیز با شرایط خاص مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مقالات باید به گونه‌ای نوشته شوند که قابل فهم برای افرادی با اطلاعات پایه‌ای ریاضی در سطح کارشناسی یا دانشجویان تحصیلات تکمیلی باشند.

ارسال مقاله به این مجله به این معنی است که کلیه نویسندگان مقاله از این ارسال آگاه بوده، اصالت محتوای علمی آن را تأیید و با ارسال آن به مجله‌ی به سوی علوم ریاضی موافق بوده‌اند و به علاوه متعهد هستند که مقاله ارسالی به این مجله به‌طور همزمان در مراحل بررسی و یا چاپ در هیچ نشریه دیگری نیست. با ارسال مقاله به این مجله، همه نویسندگان متعهد می‌شوند که حقوق مالکیت فکری و اخلاق پژوهشی را رعایت نموده‌اند و کلیه حقوق استفاده از محتوا، جداول، تصاویر و ... را به ناشر واگذار کرده‌اند.

ارسال مقاله تنها از طریق لینک <https://tmsj.um.ac.ir> و به صورت الکترونیک امکان‌پذیر است. همچنین راهنمای نویسندگان و [فایل فشرده فرمت مجله](#) در این لینک قابل مشاهده است.

فهرست مطالب

مباحثی روی دوگان بهینه قاب‌ها در فضاهاى هیلبرت.....۱

ف. عربیانی نیشابوری، ع. ا. عارفی جمال

کنترل پروژه، مدیریت پروژه و برنامه‌ریزی شبکه‌ای.....۱۷

ا. منصوری

نقد و بررسی مفاهیم آنالیزی کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه.....۳۱

م. کیان

جبر خطی و فن‌آوری.....۸۰

ف. نوحی

یک روش کارا برای حل مسائل معکوس سهموی با شرط اضافی.....۹۱

س. شکریز، ج. آذری

کاهش فضای جستجوی مسائل بهینه‌سازی با روش‌های داده‌کاوی.....۱۱۰

م. حدادپور، م. علی‌نژاد مفرد، م. دهقان نیری

بعضی از راه‌کارهای ارتقای آموزش ریاضی.....۱۲۲

ف. قومنجانی، م. ک. انوری



SOME TOPICS ON OPTIMAL DUAL FRAMES IN HILBERT SPACES

FAHIMEH ARABYANI-NEYSHABURI¹ AND ALI AKBAR AREFIJAMAAL^{1*}

¹Faculty of Mathematics and Computer Sciences, Hakim Sabzevari University, Sabzevar, IRAN
fahimeh.arabyani@gmail.com;
arefijamaal@hsu.ac.ir

Abstract. In data transmissions usually a part of the data vectors are reshaped or erased, and we need to perform the reconstruction by using the partial information at hand. Hence, one of the deepest and most precious problems in frame theory is optimal dual problem, which asks for finding the best dual frames that minimize the reconstruction errors when erasures occur. In this paper, we will review on application of dual frames in signal processing, then we mention optimal reconstruction problem and some achievements and finally we state some open problems in this respect for readers.

2020 Mathematics Subject Classification. 42C15, 42C40

Keywords. Frames, dual frames, optimal duals, reconstruction formulas

Date: Received 15-7-2021 Revised 9-11-2021 Accepted 21-11-2021 Available Online 7-12-2021

*Corresponding author.



مباحثی روی دوگان بهینه قابها در فضاها ی هیلبرت

فهیمة عربیانی نیشابوری^۱ و علی اکبر عارفی جمال^{۱*}

^۱ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری

fahimeh.arabyani@gmail.com

arefijamaal@hsu.ac.ir

چکیده. در مبحث انتقال داده‌ها معمولاً بخشی از داده‌ها از دست می‌روند یا تغییر شکل می‌دهند و ما یلیم تنها با بخشی از اطلاعات در دسترس بازسازی عناصر را انجام دهیم. با توجه به اینکه قاب‌ها از ابزارهای بسیار مهم در انتقال داده‌ها محسوب می‌شوند، بنابراین یکی از مسائل مهم در نظریه قاب‌ها، پیدا کردن الگوریتم‌هایی برای بازسازی بهینه تحت حذف برخی ضرایب است. در این مقاله، شرح مختصری بر کاربرد دوگان قاب‌ها در پردازش سیگنال خواهیم داشت. سپس، مساله بازسازی بهینه و برخی دستاوردها در این زمینه را مطرح می‌کنیم. در نهایت چند مساله باز در این راستا برای علاقه‌مندان مطرح خواهیم کرد.

۱. سرآغاز

قاب‌ها در فضاها ی هیلبرت دنباله‌هایی از بردارها هستند که الگوریتم‌های موثری برای بازسازی و تجزیه عناصر فضا ارائه می‌دهند. این مفهوم ابتدا در سال ۱۹۵۲ توسط دافین^۱ و شافر^۲ در راستای برخی مطالعات در زمینه سری‌های فوریه غیر هارمونیک معرفی شد [۱۸] و می‌توان گفت که در حقیقت قاب‌ها تعمیمی از پایه‌های

کلید واژگان. قاب‌ها، دوگان قاب‌ها، دوگان‌های بهینه، فرمول‌های بازسازی.

2020 Mathematics Subject Classification 42C15, 42C40

تاریخ: دریافت ۱۴۰۰/۴/۲۴ بازنگری ۱۴۰۰/۸/۱۸ پذیرش ۱۴۰۰/۸/۳۰ انتشار برخط ۱۴۰۰/۹/۱۶

* نویسنده مسئول

نحوه ارجاع به این مقاله: ف. عربیانی نیشابوری، ع.۱. عارفی جمال، مباحثی روی دوگان بهینه قاب‌ها در فضاها ی هیلبرت،

به سوی علوم ریاضی، ۲ (۱۴۰۱)، شماره ۱، ۱-۱۶.

Duffin^۱

Schaeffer^۲

ریس هستند، با این تفاوت اساسی که قابها به دلیل وجود عناصر اضافی، در مقابل حذف و آشفستگی بردارها مقاوم‌ترند. این ویژگی مهم موجب شده که به ویژه در دو دهه اخیر قابها در علوم مهندسی و کاربردی مورد توجه فراوانی باشند [۶-۱۰، ۱۹] و انواع مختلف قابها و کاربردهای آنها توسط بسیاری از محققین مورد مطالعه قرار گیرند. در واقع در نظریه قابها، هر بردار مانند $f \in \mathcal{H}$ در فضای هیلبرت مورد مطالعه، می‌تواند با مقادیر عددی $\{\langle f, f_i \rangle\}_{i \in I}$ نمایش داده شود و سپس f به کمک یک الگوریتم توسط قاب دوگان، از این ضرایب بازسازی شود. در کاربردهای عملی، در این انتقالات برخی از ضرایب از دست می‌روند، تغییر شکل می‌دهند و یا دچار اغتشاش می‌شوند و نیاز داریم فقط با بخشی از اطلاعات در دسترس، بازسازی عناصر را انجام دهیم. بنابراین یکی از مسائل مهم در نظریه قابها، پیدا کردن دوگان‌های غیرکانونی و نیز دوگان‌های بهینه یک قاب، تحت حذف برخی عناصر است. یعنی یافتن دوگانی از یک قاب که خطای بازسازی در اثر حذف یک یا بیشتر از یک عنصر را کمینه کند. این مفهوم توسط هان^۳ و همکارانش در [۲۴، ۲۶] معرفی شد. در این مقاله، شرح مختصری بر مفهوم قابها و دوگان آنها خواهیم داشت و کاربرد دوگان قابها در پردازش سیگنال را بررسی خواهیم کرد. سپس، مساله بازسازی بهینه و برخی نتایج مهم در این زمینه را بیان کرده و در نهایت چند مساله باز در این راستا مطرح می‌کنیم. ابتدا تعاریف مقدماتی قابهای نامتناهی را بیان می‌کنیم. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر و I یک مجموعه اندیس‌گذار شمارا باشد. دنباله $F := \{f_i\}_{i \in I}$ در $\mathcal{H}$ یک قاب نامیده می‌شود هرگاه ثابت‌های مثبت A و B موجود باشند به‌طوری‌که

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad (f \in \mathcal{H}). \quad (۱.۱)$$

در این تعریف ثابت‌های A و B به ترتیب کران‌های پایین و بالای قاب نامیده می‌شوند. اگر F یک قاب باشد، به راحتی ثابت می‌شود که $\overline{\text{span}}\{f_i\}_{i \in I} = \mathcal{H}$ ، اگر چه این شرط برای وجود قابهای نامتناهی، کافی نیست. اگر در رابطه فوق فقط نامساوی کران بالا برقرار باشد، آنگاه F یک دنباله بسل نامیده می‌شود. به هر دنباله بسل سه عملگر مهم نسبت داده می‌شود. عملگر تجزیه $T_F : l^2(I) \rightarrow \mathcal{H}$ به صورت

$$T_F\{c_i\}_{i \in I} = \sum_{i \in I} c_i f_i$$

تعریف می‌شود. عملگر آنالیز $T_F^* : \mathcal{H} \rightarrow l^2(I)$ ، که الحاقی عملگر تجزیه است و به صورت

$$T_F^* f = \{\langle f, f_i \rangle\}_{i \in I}$$

تعریف می‌شود. همچنین عملگر قاب روی فضای $\mathcal{H}$ که ترکیب این دو عملگر است، یعنی $S_F = T_F T_F^*$. همه این عملگرها برای دنباله بسل F خوش‌تعریف و کراندارند. به‌علاوه، به‌راحتی می‌توان نشان داد که F یک قاب است اگر و تنها اگر عملگر قاب آن وارون‌پذیر باشد [۱۳]. دنباله بسل $G := \{g_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{H}$ دوگان

F نامیده می‌شود هرگاه $T_G T_F^* = I_{\mathcal{H}}$ یا به عبارت دیگر،

$$f = \sum_{i \in I} \langle f, f_i \rangle g_i, \quad (f \in \mathcal{H}).$$

برای هر قاب F می‌توان نوشت

$$f = S_F S_F^{-1} f = \sum_{i \in I} \langle f, S_F^{-1} f_i \rangle f_i = \sum_{i \in I} \langle f, f_i \rangle S_F^{-1} f_i, \quad (f \in \mathcal{H}).$$

بنابراین می‌توان گفت هر قاب حداقل یک دوگان به صورت $\{S_F^{-1} f_i\}_{i \in I}$ دارد که دوگان کانونی یا دوگان استاندارد قاب نامیده می‌شود. اگر یک دنباله بسط دارای یک دوگان باشد، آن دنباله و دوگانش هر دو قاب هستند [۱۳]. همچنین ثابت می‌شود که هر دوگان $\{g_i\}_{i \in I}$ از قاب F به صورت $i \in I, g_i = S_F^{-1} f_i + u_i$ است که در آن $\{u_i\}_{i \in I}$ دنباله‌ای است که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\sum_{i \in I} \langle f, f_i \rangle u_i = 0, \quad (f \in \mathcal{H}). \quad (2.1)$$

۲. کاربرد دوگان‌ها در پردازش سیگنال

قاب‌های گابور^۴ و موجک^۵ دو نوع مهم از قاب‌های نامتناهی هستند که در تحلیل‌های زمان-فرکانس نقش بسیار مهمی دارند و توسط انتقال‌ها، مدولاسیون‌ها و اتساع‌های یک سیگنال تشکیل می‌شوند. در این بخش، این قاب‌ها را معرفی می‌کنیم و با کاربرد دوگان قاب‌ها در پردازش سیگنال آشنا می‌شویم. در واقع نظریه ریاضی این نوع قاب‌ها بر اساس سه عملگر مهم روی فضای هیلبرت $L^2(\mathbb{R})$ است. انتقال به اندازه a ،

$$T_a : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad T_a f(x) = f(x - a)$$

مدولاسیون به مقیاس $b \in \mathbb{R}$

$$E_b : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad E_b f(x) = e^{2\pi i b x} f(x)$$

و اتساع به اندازه $c \neq 0$ که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_c : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad D_c f(x) = |c|^{1/2} f(cx).$$

Gabor^۴

wavelet^۵

یک قاب گابور برای $L^2(\mathbb{R})$ به فرم $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ است که در آن $g \in L^2(\mathbb{R})$ و $a, b > 0$. برای یک قاب گابور $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ دوگان کانونی به صورت $\{E_{mb}T_{na}S^{-1}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ می باشد که S عملگر قاب گابور است و در صورتی که $ab < 1$ قاب گابور تعداد نامتناهی دوگان خواهد داشت. در بسیاری از کاربردها با استفاده از دوگان های غیرکانونی نتایج دقیق تری برای بازسازی به دست می آید. روش هایی برای ساخت یک خانواده از دوگان ها و همچنین مقایسه دوگان کانونی با دوگان های غیرکانونی در پردازش سیگنال ها در [۴، ۵، ۱۲، ۱۴، ۲۳] ارائه شده است، که اینجا به طور مختصر بیان می کنیم. فرض کنید $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. عملگر اتساع D_a روی $L^2(\mathbb{R})$ برای $a > 1$ را در نظر بگیرید. خانواده $\{D_a^j T_k \psi\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ یک سیستم موجک تولید شده توسط تابع ψ نامیده می شود. همچنین یک سیستم موجک که یک قاب برای $L^2(\mathbb{R})$ نیز باشد، قاب موجک نامیده می شود. مشابه قبل دو قاب موجک $\{D_a^j T_{bk}g\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ و $\{D_a^j T_{bk}h\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ دوگان یکدیگر گفته می شوند، هرگاه

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, D_a^j T_{bk}h \rangle D_a^j T_{bk}g, \quad (f \in L^2(\mathbb{R})).$$

با توجه به اینکه دوگان کانونی یک قاب موجک لزوما ساختار یک سیستم موجک را ندارد [۱۵]، دوگان های غیرکانونی نقش بسیار مهمی در این نوع قابها دارند. قضیه زیر روشی برای ساخت دوگان قاب های موجک ارائه می دهد.

قضیه ۱۰.۲. [۲۳] فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $a > 1$. اگر $g \in L^2(\mathbb{R})$ طوری باشد که نگاشت $\hat{g}$ تابعی حقیقی مقدار باشد و به ازای یک مقدار $c \in \mathbb{Z}$ ، $\text{supp } \hat{g} \subset [-a^c, -a^{c-n}] \cup [a^{c-n}, a^c]$ ،

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{g}(a^j \xi) = 1 \quad (a.e. \quad \xi \in \mathbb{R}),$$

آنگاه تابع g و تابع h تعریف شده به صورت

$$h(x) = bg(x) + 2b \sum_{j=1}^{n-1} a^{-j} g(a^{-j}x) \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (۱.۲)$$

قاب های دوگانی به صورت $\{D_a^j T_{bk}g\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ و $\{D_a^j T_{bk}h\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ برای $L^2(\mathbb{R})$ تشکیل می دهند.

قضیه ۲.۲. [۴] فرض کنید $g \in L^2(\mathbb{R})$ و مقادیر a, b, n در فرضیات قضیه ۱۰.۲ صدق کنند. همچنین فرض کنید ثابت های مثبت B و A موجود باشند به طوری که

$$A \leq G(\xi) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(a^j \xi)|^2 \leq B \quad (a.e. \quad \xi \in \mathbb{R}).$$

آنگاه عملگر قاب موجک $\{D_a^j T_{bk} g\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\widehat{S}f = \frac{G}{b} \widehat{f}.$$

حال به کمک قضیه‌های فوق یک خانواده از دوگان‌های غیر کانونی برای برخی قاب‌های موجک ساخته می‌شود.

نتیجه ۳.۲. [۴] فرض کنید $g \in L^2(\mathbb{R})$ و مقادیر b, a, n در شرایط قضیه ۱.۲ صدق کنند. در این صورت توابع ϕ_i که در رابطه زیر صدق می‌کنند

$$\widehat{\phi}_i = \frac{b}{G} \widehat{g} - \widehat{g} + \frac{G}{b} \widehat{\phi_{i-1}}, \quad (1 \leq i < \infty)$$

خانواده‌ای از قاب‌های دوگان به صورت $\{D_a^j T_{bk} g\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ و $\{D_a^j T_{bk} \phi_i\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ برای $L^2(\mathbb{R})$ تولید می‌کنند که در آن $\phi_0 = h$ از قضیه ۱.۲ داده می‌شود.

برای درک اهمیت نتایج فوق مثال زیر را در نظر می‌گیریم.

مثال ۴.۲. اگر $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ به صورت زیر تعریف شود

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

قرار دهید $f_1(x) = f(x - \frac{1}{8})f(\frac{1}{2} - x)$ برای $x \in \mathbb{R}$ ، بنابراین $\text{supp } f_1 \subset [\frac{1}{8}, \frac{1}{2}]$ حال در نظر بگیرید

$$f_2(x) = \begin{cases} f_1(x) & x > 0, \\ f_1(-x) & x \leq 0 \end{cases}$$

و قرار دهید $\widehat{g} = \frac{f_2}{\sum_{j=-1}^1 f_2(2^j \cdot)}$ در نتیجه $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(2^j x) = 1$ با قرار دادن $n = 2$ ، $c = -1$ و $b = \frac{1}{2} \in (0, \frac{1}{2a^c}]$ نتیجه می‌گیریم که $\{D_a^j T_{bk} g\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ یک قاب موجک با یک قاب دوگان موجک تولید شده توسط تابع

$$h(x) = \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}g(\frac{1}{2}x),$$

است. با استفاده از نتیجه ۳.۲ خانواده ای از دوگانها با تبدیل فوریه زیر به دست می‌آوریم

$$\widehat{\phi}_i = \frac{1}{2G} \widehat{g} - \widehat{g} + 2G \widehat{\phi_{i-1}}, \quad (2.2)$$

برای هر $i \geq 0$ که $G = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}(2^j \cdot)|^2$ و $\phi_0 = h$.

به منظور مقایسه قابهای دوگان موجک در دقت بازسازی، قاب موجک مثال ۴.۲ را در نظر می‌گیریم. آنگاه به کمک قابهای دوگان موجک معرفی شده توسط رابطه فوق می‌توان فرمول بازسازی را به صورت زیر نوشت

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, D_a^j T_{bk} g \rangle D_a^j T_{bk} \phi_i, \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \quad i \geq 0. \quad (3.2)$$

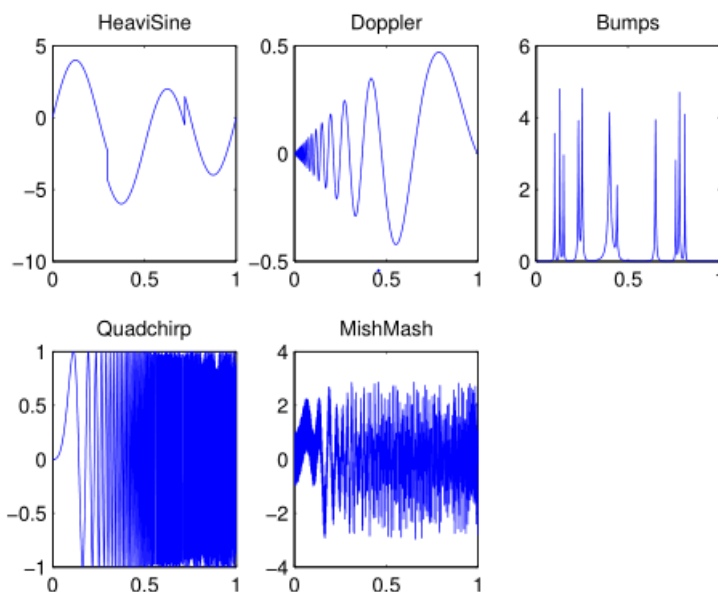
برای درک بهتر مزایای استفاده از دوگانها بر اساس مدل فوق در تقریب یک سیگنال $f \in L^2(\mathbb{R})$ ، توابع آزمون هویساین^۶، بامپ^۷، داپلر^۸، کوادچریپ^۹ و میش مش^{۱۰} تعریف شده در [۱۶، ۱۷] را در نظر می‌گیریم. برای محاسبه تخمین خطاها از فرمول خطای میانگین مربعات زیر استفاده می‌کنیم

$$n^{-1} \sum_{i=1}^n |\widehat{x}_i - x_i|^2.$$

AMSE					
Dual generator	Heavisine	Bumps	Doppler	QuadChrip	MishMash
Canonical	7.098725	5.80E-10	0.045354	0.684561	0.812872
φ_0	7.004994	5.72E-10	0.043258	0.661926	0.78447
φ_2	7.002138	5.71E-10	0.043244	0.661671	0.784236
φ_3	6.996444	5.711E-10	0.0432	0.661164	0.78377
φ_4	6.985143	5.713E-10	0.043165	0.66016	0.782844
φ_5	6.962903	5.70E-10	0.04306	0.658189	0.781012
φ_6	6.919891	5.693E-10	0.042853	0.654389	0.777432
φ_7	6.839766	5.67E-10	0.42448	0.647352	0.770606
φ_8	6.703133	5.65E-10	0.04168	0.635525	0.758292
φ_9	6.52425	5.66E-10	0.040303	0.62084	0.739019

جدول ۱: میزان خطای بازسازی برای تقریب توابع آزمون با فرمول دوگان نظیر مولدهای دوگان متفاوت

Heavisine^۶
Bump^۷
Doppler^۸
QuadChrip^۹
MishMash^{۱۰}



شکل ۱: توابع آزمون

	AMSEs				
	Heavisine	Bumps	Doppler	QuadChrip	MishMash
Canonical	7.098725	$5.80E-10$	0.045354	0.684561	0.812872
Hard wavelet den.	0.22	0.27	0.29	0.99	1.00
Soft wavelet den.	0.07	0.13	0.11	0.73	0.95
φ_8	6.703133	$5.65E-10$	0.04168	0.635525	0.758292
φ_9	6.52425	$5.66E-10$	0.040303	0.62084	0.739019

جدول ۲: میزان خطای بازسازی برای تقریب توابع آزمون با روش‌های مختلف

همانطور که در جدول ۱ ملاحظه می‌شود برای هر تست سیگنال بجز میش‌مش، یکی از دوگان‌های غیر کانونی خطای کمتری نسبت به دوگان کانونی ایجاد می‌کنند. علاوه بر آن، مقایسه نتایج جدول ۱ با نتایج حاصل از بازسازی با دوگان قاب گابور در [۵] و نیز استفاده از روش‌های دیگر مانند نویززدایی با موجک سخت^{۱۱} و نرم^{۱۲} در [۱۱] نشان می‌دهد که در این مثال تقریباً برای تمام توابع آزمون، دوگان‌های قاب موجک (۳.۲) موثرتر بوده‌اند، جدول ۲ را ببینید. اگر چه بر اساس نوع قاب و دوگان ممکن است قاب‌های گابور و یا روش‌های دیگر گاهی بهتر عمل کنند، اما مطلب فوق ارزش محاسبه و شناسایی دوگان‌های قاب را برای بازسازی نشان می‌دهد.

^{۱۱} hard wavelet denoising

^{۱۲} soft wavelet denoising

Normalized AMSEs					
Dual generator	Heavisine	Bumps	Doppler	QuadChrip	MishMash
Canonical	5.623246	$1.88E - 10$	0.140262	1.191727	0.412049
φ_0	6.121439	$6.23E - 11$	0.058008	0.79817	1.865155
φ_3	6.092812	$9.02E - 11$	0.070151	0.427603	1.933921
φ_4	6.097072	$9.99E - 11$	0.070707	0.396412	1.907641
φ_5	6.095215	$9.97E - 11$	0.07114	0.38542	1.899557
φ_6	6.086826	$9.95E - 11$	0.071961	0.380742	1.894946
φ_7	6.073669	$9.83E - 11$	0.073067	0.378176	1.890281
φ_8	6.05725	$9.66E - 11$	0.074316	0.376418	1.885203
φ_9	6.038534	$9.47E - 11$	0.075612	0.375034	1.879932
φ_{14}	5.926096	$8.53E - 11$	0.081642	0.370649	1.855485
φ_{30}	5.542141	$6.57E - 11$	0.092297	0.370165	1.810069

جدول ۳: میزان خطای بازسازی هنجار شده برای تقریب توابع آزمون با دوگان های مختلف

همچنین به منظور مقایسه دقیق تر خطاها، نتایج جدول ۱ در جدول ۳ هنجار^{۱۳} شده اند.

۳. مسئله بازسازی بهینه

همانطور که در مقدمه بیان شد، مسئله یافتن دوگان بهینه در قاب های متناهی در مسائل کاربردی اهمیت بسزایی دارد. قبل از مطالعه و بررسی دوگان های بهینه لازم است به معرفی قاب های متناهی در فضا های هیلبرت با بعد متناهی بپردازیم. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت n -بعدی باشد. دنباله $F = \{f_i\}_{i \in I_m} \subset \mathcal{H}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ نامیده می شود، هرگاه $\text{span}\{f_i\}_{i \in I_m} = \mathcal{H}$ که در آن $I_m = \{1, \dots, m\}$. مشابه قبل به هر قاب متناهی F نیز سه عملگر نسبت داده می شود؛ عملگر تجزیه $T_F : l^2(I_m) \rightarrow \mathcal{H}$ که به صورت $T_F\{c_i\}_{i \in I_m} = \sum_{i \in I_m} c_i f_i$ تعریف می شود. عملگر آنالیز، الحاقی T_F^* که به صورت $T_F^*f = \{\langle f, f_i \rangle\}_{i \in I_m}$ به دست می آید، و عملگر قاب که ترکیب این دو عملگر است، $S_F = T_F T_F^*$. هر دنباله متناهی بسل است، در نتیجه همه این عملگرها خوش تعریف و کراندارند. با توجه به این حقیقت که فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ دارای بعد متناهی است، عملگرهای تجزیه و آنالیز پیوسته اند و به ویژه $f \mapsto \|T_F^*f\|$ یک تابع ناصفر روی کره واحد فشرده در $\mathcal{H}$ است. در نتیجه می توان گفت $F = \{f_i\}_{i \in I_m}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ است، اگر و تنها اگر ثابت های مثبت A و B موجود باشند به طوری که

$$A\|f\|^2 \leq \|T_F^*f\|^2 = \sum_{i \in I_m} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad (f \in \mathcal{H}). \quad (۱.۳)$$

در تعریف فوق ثابت های A و B به ترتیب کران های پایین و بالای قاب نامیده می شوند. مشابه قاب های نامتناهی، اگر $A = B$ ، قاب F چسبان نامیده می شود و در صورتی که $A = B = 1$ آن را یک قاب پارسوال می نامیم. قاب F یک قاب یکنواخت نامیده می شود، هرگاه ثابت α موجود باشد به طوری که $\|f_i\| = \alpha$ ، برای

^{۱۳}normalized

هر $i \in I$. دنباله $G := \{g_i\}_{i \in I_m} \subseteq \mathcal{H}$ دوگان F نامیده می‌شود، هرگاه $T_G T_F^* = I_{\mathcal{H}}$. به علاوه، ثابت می‌شود که F یک قاب است اگر و تنها اگر عملگر قاب آن وارون پذیر باشد [۱۳]، و در نتیجه $S_F^{-1} F$ یک دوگان قاب F است که دوگان کانونی نامیده می‌شود. در ادامه مجموعه تمام دوگان‌های F را با D_F نشان می‌دهیم.

مفهوم بازسازی‌های بهینه به کمک قاب‌های پارسوال با الگوسازی دقیق ابتدا توسط هلمز^{۱۴} و پالسن^{۱۵} در [۲۱] معرفی شد. به‌طور دقیق‌تر، اگر $\mathcal{D}_r$ نشان‌دهنده مجموعه همه ماتریس‌های قطری $m \times m$ با r عدد 1 و $n - r$ عدد 0 روی قطر اصلی باشد، در این صورت یک قاب پارسوال $F = \{f_i\}_{i \in I_m}$ برای فضای هیلبرت n بعدی $\mathcal{H}$ بهینه تحت 1-حذف نامیده می‌شود، هرگاه

$$\max\{\|T_F^* D T_F\| : D \in \mathcal{D}_1\}$$

بین تمام قاب‌های پارسوال m -عضوی در $\mathcal{H}$ ، مینیمم شود. همچنین، به استقرا می‌توان قاب پارسوال بهینه را برای هر r -حذف نیز تعریف کرد. این مساله سپس توسط هان و همکارانش در [۲۶] برای قاب‌های گسسته در حالت کلی و پیدا کردن دوگان بهینه به صورت زیر مطرح شد.

فرض کنید $G = \{g_i\}_{i \in I_m}$ یک دوگان از قاب $F = \{f_i\}_{i \in I_m}$ باشد و نیز $J \subset I_m$. برای هر $f \in \mathcal{H}$ اگر ضرایب $\{\langle f, f_i \rangle\}_{i \in J}$ حذف شده باشند، در این صورت برای بازسازی عنصر f با ضرایب باقیمانده خواهیم داشت

$$\sum_{i \in I_m \setminus J} \langle f, f_i \rangle g_i, \quad (f \in \mathcal{H}).$$

بنابراین عملگر خطا، E_J ، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E_J f = \sum_{i \in J} \langle f, f_i \rangle g_i = (T_G D T_F^*) f,$$

که D یک ماتریس قطری $m \times m$ است با عناصر قطری $d_{ii} = 1$ برای $i \in J$ و سایر جاها $d_{ij} = 0$. فرض کنید

$$d_r(F, G) = \max\{\|T_G D T_F^*\| : D \in \mathcal{D}_r\} = \max\{\|E_J\| : \text{card}(E_J) = r\}, \quad (۲.۳)$$

که در آن نرم، نرم عملگری و $\mathcal{D}_r$ مجموعه همه ماتریس‌های قطری $m \times m$ با r عدد 1 و $n - r$ عدد 0 روی قطر اصلی است. در این صورت $d_r(F, G)$ عبارت است از بزرگترین خطای ممکن، زمانی که r -حذف رخ

Holmes^{۱۴}

Paulsen^{۱۵}

می‌دهد. گوئیم G دوگان بهینه F تحت 1-حذف است، هرگاه

$$d_1(F, G) = \min \{d_1(F, Y) : Y \in D_F\}. \quad (۳.۳)$$

که در آن D_F مجموعه تمام دوگان‌های F است. به استقرا، یک قاب دوگان G بهینه برای F تحت r -حذف است، هرگاه تحت $(r-1)$ -حذف بهینه باشد و نیز داشته باشیم

$$d_r(F, G) = \min \{d_r(F, Y) : Y \in D_F\}.$$

با توجه به تعریف دوگان بهینه، اگر یک دوگان برای 1-حذف، دوگان بهینه یکتا باشد، آنگاه برای هر r -حذف نیز بهینه است. حال اولین سؤالی که پیش می‌آید این است که آیا برای یک قاب داده شده همیشه دوگان بهینه وجود دارد؟ پاسخ این سوال مثبت است. در [۲۶] نشان داده شد که برای قاب $F = \{f_i\}_{i \in I_m}$ در $\mathcal{H}$ که $i \in I_m, f_i \neq 0$ ، مجموعه دوگان‌های بهینه F که اینجا با OD_F نشان داده می‌شود، تحت هر r -حذف یک زیر مجموعه ناتهی، فشرده و محدب است. سپس بررسی کردند که تحت چه شرایطی دوگان کانونی بهینه است. مهمترین نتایج به‌دست آمده به شرح زیر است.

گزاره ۱.۳. فرض کنید $F = \{f_i\}_{i \in I_m}$ یک قاب پارسوال برای $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت دوگان کانونی، یکتا دوگان بهینه تحت 1-حذف (و بنابراین هر r -حذف) است اگر و تنها اگر F یک قاب یکنواخت باشد.

فرض کنید $F = \{f_i\}_{i \in I_m}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد. در نظر بگیرید

$$c = \max \{\|S_F^{-1} f_i\| \|f_i\| : 1 \leq i \leq m\},$$

همچنین فرض کنید $\Lambda_2 = \{1, \dots, m\} \setminus \Lambda_1$ و $\Lambda_1 = \{1 \leq i \leq m : \|S_F^{-1} f_i\| \|f_i\| = c\}$ برای $i = 1, 2$ ، $\mathcal{H}_i = \text{span}\{f_j : j \in \Lambda_i\}$ با استفاده از این نمادگذاری‌ها، نتایج زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۲.۳. [۲۴] فرض کنید $F = \{f_i\}_{i \in I_m}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد. آنگاه احکام زیر معادل‌اند:

(۱) دوگان کانونی $\{S_F^{-1} f_i\}_{i \in I_k}$ بهینه یکتا تحت 1-حذف است.

(۲) $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$ و $\{f_i\}_{i \in \Lambda_2}$ مستقل خطی است.

گزاره ۳.۳. [۲۴] فرض کنید $F = \{f_i\}_{i \in I_m}$ یک قاب از $\mathcal{H}$ باشد به‌طوری‌که $\{f_i\}_{i \in \Lambda_1}$ مستقل خطی است، آنگاه

(۱) اگر $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$ ، دوگان بهینه تحت 1-حذف برای F است اما این دوگان بهینه یکتا نیست.

(۲) اگر دنباله‌ای از اسکالرها به صورت $\{c_i\}_{i \in I_m}$ موجود باشد به‌طوری‌که $\sum_{i \in I_m} c_i f_i = 0$ و $c_i \neq 0$ ، برای هر $i \in \Lambda_1$ آنگاه دوگان کانونی، بهینه برای 1-حذف نیست.

مثال زیر نشان می‌دهد که دوگان کانونی لزوماً دوگان بهینه یکتا برای یک قاب پارسوال نیست.

مثال ۴.۳. فرض کنید $\{e_1, e_2, e_3\}$ پایه متعامد یکه استاندارد برای $\mathbb{R}^3$ باشد و

$$F = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_1, \frac{1}{\sqrt{3}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_3, \frac{1}{\sqrt{2}}e_3 \right\}.$$

به راحتی می‌توان نشان داد که F یک قاب پارسوال غیر یکنواخت برای $\mathbb{R}^3$ است. بنابراین با توجه به گزاره ۱.۳، دوگان کانونی آن یعنی F دوگان بهینه یکتا نیست. اگر چه نشان می‌دهیم که دوگان کانونی تحت 1-حذف بهینه است. برای این منظور، به برهان خلف فرض کنید دوگانی مانند $G = \{g_i\}_{i=1}^7$ از F وجود دارد که در

$$\max_{i \in I_7} \|g_i\| \|f_i\| < \max_{i \in I_7} \|f_i\|^2 \quad (4.3)$$

صدق می‌کند. می‌دانیم که هر دوگان F به صورت $\{f_i + u_i\}_{i=1}^7$ است که در آن $\{u_i\}_{i=1}^7$ در (۲.۱) صدق می‌کند. بنابراین

$$u_2 = -u_1, u_7 = -u_6, u_5 + u_6 + u_7 = 0.$$

حال با در نظر گرفتن بردار دلخواه $u_1 = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ و قرار دادن $u_2 = -u_1$ با استفاده از (۴.۳) به دست می‌آوریم:

$$\|g_i\|^2 \|f_i\|^2 < \frac{1}{4}, (i \in I_7)$$

به ویژه برای $i = 1, 2$ نتیجه می‌گیریم که $a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{2}a < 0$ ، $a^2 + b^2 + c^2 - \sqrt{2}a < 0$ که تناقض است. پس دوگان کانونی بهینه تحت 1-حذف است، در حالی که دوگان بهینه یکتا نیست.

با توجه به این که مجموعه دوگان‌های بهینه تحت هر حذف یک زیر مجموعه ناتهی، فشرده و محدب است، پس مجموعه نقاط فرین آن ناتهی است [۲۲]. نویسندگان با ذکر این نکته و با هدف شناسایی مجموعه نقاط فرین در مجموعه OD_F در [۱] به معرفی و شناسایی دوگان‌های بهینه غیرکانونی پرداختند و سپس مجموعه تمام نقاط فرین در OD_F را تحت 1-حذف به طور کامل شناسایی کردند. در واقع اگر برای یک دوگان $G = \{g_i\}_{i \in I_m}$ از $\{f_i\}_{i \in I_m}$ قرار دهید

$$c^g = \max\{\|g_i\| \|f_i\| : i \in I_m\}, \Lambda_1^g = \{i \in I_m : \|g_i\| \|f_i\| = c^g\}$$

و $\Lambda_2^g = I_m \setminus \Lambda_1^g$ و همچنین فرض کنید $\mathcal{H}_i^g = \text{span}\{f_j : j \in \Lambda_i^g\}$ ، $i = 1, 2$ ، آنگاه با این نمادگذاری‌ها نتایج زیر را داریم.

قضیه ۵.۳. [۱] فرض کنید $F = \{f_i\}_{i \in I_m}$ یک قاب از $\mathcal{H}$ باشد و $G = \{g_i\}_{i \in I_m}$ یک دوگان بهینه از F باشد. در این صورت G یک نقطه فرین برای OD_F است اگر و تنها اگر $\{f_i\}_{i \in \Lambda_2^g}$ مستقل خطی باشد.

به کمک قضیه ۵.۳ می‌توان دید که دوگان کانونی، که در واقع دارای l^2 -نرم مینیمم بین دوگان‌های F است، حتی اگر دوگان بهینه باشد لزوماً عنصر فرین نیست. از طرف دیگر، با توجه به این که OD_F ناتهی و فشرده است، دارای عضوی با l^2 -نرم ماکسیمم است. یعنی دوگان بهینه $\{g_i\}_{i \in I_m}$ از F موجود است به طوری که

$$\left(\sum_{i \in I_m} \|g_i\|^2 \right)^{1/2} = \max \left\{ \left(\sum_{i \in I_m} \|h_i\|^2 \right)^{1/2} : \{h_i\}_{i \in I_m} \in OD_F \right\}.$$

به وسیله اصل ماکسیمم مقدماتی^{۱۶} [۲۲] می‌توان نشان داد که چنین عناصری، فرین هستند.

گزاره ۶.۳. [۱] فرض کنید $F = \{f_i\}_{i \in I_k}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ و $G = \{g_i\}_{i \in I_k} \in D_F$ دارای l^2 -نرم ماکسیمم بین تمام دوگان‌های بهینه F باشد. آنگاه G نقطه فرین مجموعه OD_F است.

همچنین در [۱] برخی مشخصه‌سازی‌ها برای شناسایی دوگان‌های بهینه غیرکانونی انجام شد. به علاوه، قاب‌های دوگان بهینه تحت یک نوع آشفتگی عملگری قاب‌ها و تحت 1-حذف بررسی شد.

قضیه ۷.۳. اگر $F = \{f_i\}_{i \in I_m}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ و $U \in B(\mathcal{H})$ عملگری وارون‌پذیر باشد که $\|U\| \|U^{-1}\| \leq 1$. آنگاه تحت 1-حذف $\{g_i\}_{i \in I_m}$ دوگان بهینه F است اگر و تنها اگر $\{Ug_i\}_{i \in I_m}$ دوگان بهینه $(U^*)^{-1}F := \{(U^*)^{-1}f_i\}_{i \in I_m}$ باشد. به علاوه، یک تناظر دوسویی بین دوگان‌های بهینه F و UF وجود دارد.

در مثال زیر ملاحظه می‌کنیم که قضیه ۲.۳ برای دوگان‌های غیرکانونی برقرار نیست.

مثال ۸.۳. فرض کنید $\{e_1, e_2\}$ پایه متعامد یکه استاندارد برای $\mathbb{R}^2$ باشد و

$$F = \left\{ e_1, e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) \right\}.$$

سپس F یک قاب برای $\mathbb{R}^2$ است. ثابت می‌شود که F یک دوگان بهینه به صورت زیر دارد [۲۶]

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{3-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\}.$$

اکنون دنباله زیر را در نظر بگیرید

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{4} \end{bmatrix} \right\}.$$

در این صورت $G := \{g_i\}_{i=1}^3$ دوگان قاب F است و $\|g_i\| \|f_i\| = \sqrt{4+2\sqrt{3}}$ برای هر i . به عبارت دیگر $\{f_i\}_{i \in \Lambda_2^g} = \emptyset$ و نه تنها فضاهای $\mathcal{H}_1^g$ و $\mathcal{H}_2^g$ اشتراکی ندارند بلکه متعامد هستند، یعنی $\mathcal{H}_1^g \perp \mathcal{H}_2^g$ اگر چه G دوگان بهینه F نیست.

برای مطالعه بیشتر و دقیق‌تر دوگان‌های بهینه زمانی که اندازه عملگر خطا با نرم عملگری سنجیده می‌شود خواننده را به [۱، ۲۴-۲۶] ارجاع می‌دهیم.

مفهوم دوگان بهینه با در نظر گرفتن شعاع طیفی بجای نرم عملگری برای عملگر خطا در [۲۸] مورد مطالعه قرار گرفت. در این راستا، کمینه کردن خطای بازسازی با شعاع عددی و نیز مقایسه آن با شعاع طیفی و نرم عملگری در [۲] بررسی شد. همچنین برخی تعمیم‌ها از این مساله برای انواع دیگر قاب‌ها مانند قاب‌های ترکیب و K -قاب‌ها انجام شده است [۳، ۱۹، ۲۰، ۲۷]، با این وجود هنوز مسائل باز زیادی در این راستا و حتی برای قاب‌های گسسته وجود دارد که در پایان چند نمونه از این مسائل را برای علاقه‌مندان مطرح می‌کنیم.

۱- در مسائل کاربردی معمولاً بیش از یک حذف رخ می‌دهد، شناسایی دوگان‌های بهینه تحت حذف

$r > 1$ از مسائل مهم و بسیار جالب در این زمینه است. با در نظر گرفتن این نکته و قضیه ۵.۳،

آیا می‌توان نقاط فرین مجموعه OD_F را تحت ۲- یا به طور کلی r -حذف نیز شناسایی کرد؟

۲- آیا می‌توان شرایط لازم و کافی برای یک قاب تعیین کرد به طوری که تحت آن یک دوگان غیرکانونی، دوگان بهینه یکتا باشد؟

۳- همانطور که در مقدمه اشاره شد، در مبحث انتقالات سیگنال‌ها، برخی ضرایب ممکن است دچار

اغتشاش یا تغییر شکل شوند در حالی که تاکنون فقط برای مساله حذف ضرایب الگوسازی انجام شده است. بنابراین یک مساله دیگر ارائه روشی برای بازسازی سیگنال‌ها تحت آشفتگی یا تغییر شکل ضرایب است. (برای این منظور، قطعاً ابتدا باید یک نوع خاص از تغییر شکل را در نظر گرفت و سپس الگوریتم‌هایی برای حل مساله ارائه داد.)

مراجع

- [1] F. Arabyani-Neyshaburi, A. Arefijamaal and Gh. Sadeghi, *Extreme points and identification of optimal alternate dual frames*, Linear Algebra Appl. **549** (2018) 123-135.

- [2] F. Arabyani-Neyshaburi, A. Arefijamaal and Gh. Sadeghi, *Numerically and spectrally optimal dual frames in Hilbert spaces*, Linear Algebra Appl. **604** (2020) 52–71.
- [3] F. Arabyani-Neyshaburi and R.A. Kamyabi-Gol, *Matrix methods for perfect signal recovery underlying range space of operators*, ArXiv:2008.04892v1.
- [4] A. Arefijamaal, F. Arabyani-Neyshaburi and S. Matindust, *Construction of dual wavelet frame pairs and signal recovery*, SeMA J. **76** (2019), no. 1, 27–36.
- [5] A. Arefijamaal and E. Zekaei, *Signal processing by alternate dual Gabor frames*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **35** (2013) 535–540.
- [6] J.J. Benedetto and M. Fickus, *Finite normalized tight frames*, Adv. Comput. Math. **18** (2003), no. 2-4, 357–385.
- [7] J.J. Benedetto, A. Powell and O. Yilmaz, *Sigm-Delta quantization and finite frames*, IEEE Trans. Inform. Theory **52** (2006) 1990–2005.
- [8] B.G. Bodmann, *Optimal linear transmission by loss-insensitive packet encoding*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **22** (2007), no. 3, 274–285.
- [9] B.G. Bodmann and V.I. Paulsen, *Frames, graphs and other measures*, Linear Algebra Appl. **404** (2005) 118–146.
- [10] H. Bolcskel, F. Hlawatsch and H.G. Feichtinger, *Frame-theoretic analysis of over-sampled filter banks* IEEE Trans. Signal Process. **46** (1998) 3256–3268.
- [11] O. Christensen, *Time-Frequency Analysis and its Applications in Denoising*, Thesis, Department of Informatics, University of Bergen, 2002.
- [12] O. Christensen, *Pairs of dual Gabor frames with compact support and desired frequency localization*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **20** (2006) 403–410.
- [13] O. Christensen, *Frames and Bases: An Introductory Course*, Birkhäuser, Boston, 2008.
- [14] O. Christensen and R.Y. Kim, *On dual Gabor frame pairs generated by polynomials*, Fourier Anal. Appl. **16** (2010) 11–16.
- [15] I. Daubechies, *The wavelet transform, time frequency localization and signal analysis*, IEEE Trans. Inform. Theory **36** (1990), no. 5, 961–1005.
- [16] D.L. Donoho and I.M. Johnstone, *Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage*, Biometrika. **81** (1994) 425–455.
- [17] D.L. Donoho and I.M. Johnstone, *Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage*, Amer. Statist. Assoc. **90** (1995) 1200–1224.
- [18] R. Duffin and A. Schaeffer, *A class of nonharmonic Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952) 341–366.

- [19] Q. Guo, J. Leng, D. Han, Q. Fan, H. Li and Q. Gao, *Adaptive optimal dual frames for signal reconstruction with erasures*, IEEE Access. **4** (2016) 7577–7584.
- [20] S.B. Heineken and P.M. Morillas, *Properties of finite dual fusion frames*, Linear Algebra Appl. **453** (2014) 1–27.
- [21] R. Holmes and V. Paulsen, *Optimal frames for erasures*, Linear Algebra Appl. **377** (2004) 31–51.
- [22] S.R. Lay, *Convex Sets and Their Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1982.
- [23] J. Lemvig, *Constructing pairs of dual bandlimited framelets with desired time localization*, Adv. Comput. Math. **30** (2009) 231–248.
- [24] J. Leng and D. Han, *Optimal dual frames for erasures II*, Linear Algebra Appl. **435** (2011) 1464–1472.
- [25] J. Leng, D. Han and T. Huang, *Optimal dual frames for communication coding with probabilistic erasures*, IEEE Trans. Signal Process. **59** (2011), no. 11, 5380–5389.
- [26] J. Lopez and D. Han, *Optimal dual frames for erasures*, Linear Algebra Appl. **432** (2010) 471–482.
- [27] P.M. Morillas, *Optimal dual fusion frames for probabilistic erasures*, Electron. J. Linear Algebra **32** (2017) 191–203.
- [28] S. Pehlivan, D. Han and R. Mohapatra, *Linearly connected sequences and spectrally optimal dual frames for erasures*, J. Funct. Anal. **265** (2013), no. 11, 2855–2876.



PROJECT CONTROL, PROJECT MANAGEMENT, AND NETWORK PLANNING

AMIN MANSOORI¹

Dedicated to the memory of the late Professor Hamed Reza Tareghian

¹Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, IRAN
am.ma7676@yahoo.com; a-mansoori@mail.um.ac.ir

Abstract. Project control is one of the most important research topics in science and engineering that is closely related to management. In this paper, we introduce project control and project management and explain their differences. We try to describe project control in networks. In this case, we give a brief overview of precedence networks, probabilistic networks, and graphical evaluation and review networks. For planning with limited resources, we will study PERT and GERT networks. Finally, we will introduce the two softwares that are used to solve project control problems and examine their differences.



کنترل پروژه، مدیریت پروژه و برنامه‌ریزی شبکه‌ای

امین منصوری^۱

با گرامیداشت یاد استاد مرحوم جناب آقای دکتر حامد رضا طارقیان

^۱ گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

am.ma7676@yahoo.com; a-mansoori@mail.um.ac.ir

چکیده. کنترل پروژه یکی از مهم‌ترین مباحث پژوهشی در علوم و مهندسی است که ارتباط نزدیکی با مدیریت دارد. در این مقاله کنترل پروژه و مدیریت پروژه را مورد بررسی قرار می‌دهیم و تفاوت‌های آن‌ها را بیان می‌کنیم. سعی بر آن است که کنترل پروژه در شبکه‌ها را توصیف کنیم. در این راستا شبکه‌های تقدم و تأخر، شبکه احتمالی و شبکه‌های با بازنگری گرافیکی را به طور اجمالی توضیح می‌دهیم. برای برنامه‌ریزی با منابع محدود شبکه‌های پرت و گرت را مطالعه خواهیم کرد. در نهایت دو نرم افزار که برای حل مسائل کنترل پروژه مورد استفاده قرار می‌گیرند را معرفی و تفاوت‌های آن‌ها را بررسی خواهیم نمود.

۱. پیش‌گفتار

مدت‌ها در پی مرور مباحث کنترل پروژه بودم و هرازچندگاهی کتب کنترل پروژه و موضوعات مرتبط را تورق کرده و مطالبی از این طرف و آن طرف جمع‌آوری می‌کردم. از طرفی فقدان استاد بزرگوار جناب آقای دکتر حامد رضا طارقیان بسیار سخت بود. در این فقدان در پی فرصتی بودم که بتوانم ارادت خود را خدمت ایشان نشان دهم و این موضوع انگیزه اصلی در نگارش این مقاله بود. گفتار حاصل نتیجه جمع‌آوری و تنظیم آن مطالب بود. امید که ذره‌ای از زحمات استاد مرحوم را جبران نموده و یاد ایشان را گرامی بداریم.

2020 Mathematics Subject Classification. 93B70.

کلید واژگان. کنترل پروژه، مدیریت پروژه، برنامه‌ریزی شبکه‌ای، شبکه پرت، شبکه گرت.

تاریخ: دریافت ۱۳۹۹/۱۰/۱۴ بازنگری ۱۴۰۰/۸/۱۴ پذیرش ۱۴۰۰/۸/۱۹ انتشار برخط ۱۴۰۰/۹/۱۶

نحوه ارجاع به این مقاله: ا. منصوری، کنترل پروژه، مدیریت پروژه و برنامه‌ریزی شبکه‌ای، به سوی علوم ریاضی، ۲ (۱۴۰۱)،

شماره ۱، ۳۰-۱۷.

در کشورهای مختلف و حتی در ارگان‌های گوناگون هر کشور در مورد واژه‌های برنامه، طرح یا پروژه، اختلافات معنایی و قانونی وجود دارد؛ از این رو تعاریف و ساختارهای آنان ملموس و مشخص نیست و گاه به جای یکدیگر نیز استفاده می‌شوند. آرمان‌ها و اهداف تعیین شده حکومت در سطح برنامه‌ریزی بلند مدت یا استراتژیک، برنامه نامیده می‌شود که این برنامه‌ها دارای اهداف کیفی می‌باشند. مانند برنامه توسعه صنایع نفتی یا برنامه توسعه شبکه راه آهن کشوری.

پس از مشخص شدن برنامه‌ها در سطح بلند مدت هر کدام از آن‌ها به برنامه‌ریزی‌هایی میان مدت تقسیم می‌شوند. این کار توسط سیستم اجرایی کشور انجام خواهد شد. در طی این فرآیند این برنامه‌های تاکتیکی به مجموعه‌ای از طرح‌ها یا برنامه‌های اجرایی تقسیم می‌شوند که باید ظرف مدت ۵ تا ۱۰ سال (بیشتر یا کمتر) اجرا شوند و نتایج مورد نظر محقق شود. سپس طرح‌های میان مدت را به برنامه‌ریزی‌های کوتاه مدت تبدیل می‌کنند و در این میان پروژه همان مجموعه کارها و عملیاتی است که برنامه‌های کوتاه مدت نامیده می‌شود. این تفکیک توسط واحدهای ستادی یا سطوح مدیریت میانی نظام اجرایی کشور انجام می‌پذیرد. بر این اساس پروژه را اینگونه تعریف می‌نماییم:

تعریف ۱۰۱. يك پروژه مجموعه‌ای از فعالیت‌هاست که برای دستیابی به منظور یا هدف خاصی انجام می‌گیرد. پروژه‌ها شامل فعالیت‌هایی هستند که باید در زمان‌های مشخص، با هزینه‌هایی معین و کیفیت مشخص شده‌ای به انجام برسند؛ لازمه موفقیت هر پروژه، دستیابی توأم به هر سه عامل زمان، هزینه و کیفیت مشخص است. کمبود یا نقص هر کدام از این سه عامل منجر به شکست پروژه یا غیر اقتصادی بودن پروژه می‌شود.

همچنین تعریف مدیریت پروژه به صورت زیر خواهد بود:

تعریف ۲۰۱. [۸] مدیریت پروژه برنامه‌ریزی و هدایت پروژه در چهار چوب زمان، هزینه و کیفیت مشخص به سوی ایجاد نتایج مشخص آن است. مدیریت پروژه فعالیت‌های برنامه‌ریزی، سازماندهی، نظارت بر اجرا و هدایت اجرا را در بر می‌گیرد و سعی دارد تا با استفاده درست از منابع، نتایج مشخص و مورد انتظار را با هزینه توافق شده قبلی در موعد درست خود تحویل دهد. به بیان دیگر مدیریت پروژه به کارگیری دانش، مهارت‌ها، ابزار و تکنیک‌های لازم در اداره جریان اجرای فعالیت‌ها، به منظور رفع نیازها و انتظارات متولیان از اجرای پروژه است. مدیریت پروژه در اجرای این مهم از دو بازوی قدرتمند برنامه‌ریزی و کنترل پروژه بهره می‌گیرد.

برنامه‌ریزی به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۳۰۱. [۸] فرآیند برنامه‌ریزی، تعیین توالی و توازی فعالیت‌های لازم برای اجرای يك پروژه با در نظر گرفتن زمان مورد نیاز برای اجرای هر فعالیت و کیفیت تعیین شده برای آن فعالیت است.

در نهایت مفهوم کنترل پروژه در تعریف زیر بیان شده است.

تعریف ۴.۱. کنترل پروژه فرآیندی است در جهت حفظ مسیر پروژه برای دستیابی به یک تعادل اقتصادی موجه بین سه عامل هزینه، زمان و کیفیت در حین اجرای پروژه، که از ابزار و تکنیک‌های خاص خود در انجام این مهم کمک می‌گیرد. در واقع کنترل پروژه فرآیندی است که برای تشخیص به موقع مشکلات احتمالی در روند اجرای پروژه طراحی می‌شود. این فرآیند به مدیر پروژه اجازه می‌دهد که مشکلات پیش رو را قبل از بزرگ شدن و زمانی که یک راه حل آسان دارند، شناسایی و برطرف کند.

یک برنامه کنترل خوب باید در پی تحقق سه هدف عمده باشد. اول و مهم‌تر از همه، چنین برنامه‌ای باید معرف درستی از کار باشد و انجام آن را به نحوی هماهنگ با برنامه‌های طرح شده ساخت و مشخصات آن امکان‌پذیر کند. دوم آن‌که، این برنامه باید امکان تشخیص، ارزیابی و پیش‌بینی انحراف‌ها از برنامه زمان‌بندی شده را فراهم کند. در نهایت و سوم این‌که، برنامه کنترلی باید امکان عملیات اصلاحی دوره‌ای را فراهم کند تا بتوان بقیه برنامه زمان‌بندی شده را به طور اقتصادی با برنامه زمان‌بندی شده پیشنهادی همسو کرد [۲].

با توجه به توضیحات فوق، کنترل پروژه مبحثی پرکاربرد در حوزه‌های مختلف است. از جمله این کاربردها می‌توان به کاربردهای آن در پروژه‌های عمرانی، هتلداری، بازرگانی، صنعت و ... اشاره کرد [۳، ۷، ۹، ۱۱، ۱۷، ۱۸].

این مقاله در هشت بخش تنظیم شده است که بخش اول آن به مقدمه گذشت. در بخش دوم در مورد کنترل پروژه و مدیریت پروژه توضیحاتی داده می‌شود و تفاوت‌های آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. بخش سوم به بیان ویژگی‌های یک پروژه می‌گذرد. کنترل پروژه در شبکه‌ها و به طور خاص شبکه‌های PN^۱ در بخش چهارم بحث می‌شود. برنامه‌ریزی تخصیص منابع محدود در بخش پنجم مطالعه می‌شود. این بخش شروعی بر دو بخش بعدی است. بخش ششم و هفتم به ترتیب در مورد شبکه‌های احتمالی پرت (PERT)^۲ و گرت (GERT)^۳ مطالبی را ارائه می‌کند. مقایسه دو بخش اخیر در بخش هفتم با جریات مطرح می‌شود. در نهایت بخش هشتم با معرفی و مقایسه دو نرم افزار جهت حل مسائل کنترل پروژه این مقاله را به اتمام می‌رساند.

۲. کنترل پروژه و مدیریت پروژه

یکی از شیوه‌های رایج در بررسی وظایف مدیریتی، تقسیم‌بندی آن‌ها به سه دسته برنامه‌ریزی، اجرا و کنترل است. مثال زیر که مثالی معروف در این حوزه است، به درک بهتر و روشن شدن موضوع کمک می‌کند [۵].

مثال ۱.۲. فرض کنید قرار است به سفری دریایی برویم. در این سفر مبدأ و مقصد کاملاً مشخص است و شناختی سطحی از مسیر حرکت داریم. لذا برنامه‌ریزی ابتدایی را براساس داشته‌ها و برآوردهای خود انجام می‌دهیم. سوالات زیر می‌توانند اساس برنامه‌ریزی و تصمیمات ما بر پایه این برنامه‌ریزی باشند.

^۱ Precedence Network

^۲ Program Evaluation and Review Technique

^۳ Graphical Evaluation and Review Technique

چه موقع حرکت را آغاز کنیم؟ چه کسانی را به عنوان اعضای تیم، با خود ببریم؟ چه نقاط توقفی در میان راه داشته باشیم؟ برنامه‌ی زمان‌بندی ما چگونه خواهد بود؟ هزینه‌ی این سفر چقدر است؟ چقدر سوخت می‌خواهیم؟ سایر منابع مورد نیاز چه هستند؟

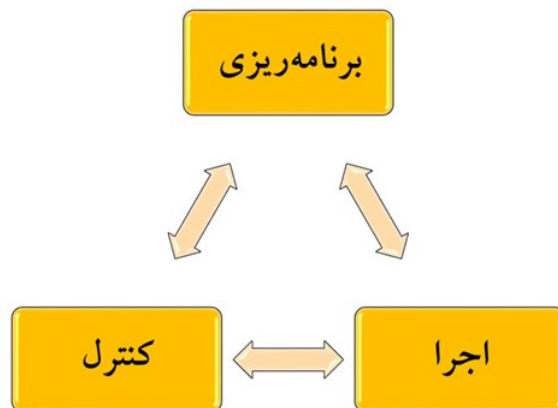
پس از برنامه‌ریزی و پاسخ به سوالات فوق که منجر به تصمیماتی می‌شود، سفر را شروع می‌کنیم. از چالش‌های در طول مسیر، فعالیت‌های اجرایی است که می‌توان گفت خیلی به چشم نمی‌آید و گاهی اوقات افراد بیرون کشتی این فعالیت‌ها را نمی‌بینند و سختی آن را درک نمی‌کنند. در صورتی که انجام موفقیت‌آمیز این سفر در گرو انجام این فعالیت‌هاست. برخی از این فعالیت‌ها به صورت زیر است:

۱- آشنایی با موتورکشتی و کار با آن ۲- تأمین غذای اعضای کشتی ۳- نظافت کشتی ۴- مدیریت اعضای تیم کشتی ۵- تصمیم‌گیری در شرایط بحرانی.

اما نوع سومی از فعالیت‌ها وجود دارد که غیرقابل اجتناب است. این فعالیت‌ها، فعالیت‌های کنترلی هستند. مثالی از این نوع فعالیت‌ها پاسخ به سوالات زیر است.

الان کجا هستیم؟ بر اساس برنامه، الان باید کجا باشیم؟ اگر وضعیت فعلی را ادامه دهیم، سفر در چه شرایطی (زمان و هزینه) به پایان خواهد رسید؟ برای اصلاح و بهبود وضعیت موجود، چه کاری می‌توانیم انجام دهیم؟

با استفاده از مثال فوق می‌توان نتیجه گرفت که کنترل ارتباط نزدیکی با برنامه‌ریزی و اجرا دارد (شکل ۱ را ببینید). برای کنترل، باید از بخش‌های مختلف اجرایی بازخورد بگیریم. همچنین باید بر اساس بازخوردهای به



شکل ۱: ارتباط بین برنامه‌ریزی، اجرا و کنترل

دست آمده از تیم اجرایی، داده‌ها، اطلاعات و شاخص‌های خود را دائماً به روز کنیم. ضمن این‌که نباید کورکورانه به برنامه و هدف‌گذاری اولیه وفادار بمانیم. اگر مطمئن هستیم که از برنامه اولیه فاصله گرفته‌ایم و شرایط تغییر کرده است، باید برنامه و مفروضات آن را اصلاح کرده و به واقعیت، نزدیک کنیم. در حقیقت کنترل پروژه از سه عامل زیر بهره می‌برد [۲۱]:

- تعیین وضعیت واقعی پروژه
- مقایسه وضعیت واقعی با برنامه
- در نظر گرفتن اقدامات اصلاحی

اگر فرآیند برنامه‌ریزی به طور کامل طی شده باشد باید بدانیم که مشخصات فنی هر فعالیت چیست، روش اجرای آن چگونه است، به چه منابعی نیاز دارد و زمان و هزینه پیش‌بینی شده اجرای آن چقدر است. از این مرحله به بعد پروژه آماده برای اجراست. اما کار مدیر پروژه به اینجا ختم نمی‌شود، بلکه او وظیفه دارد در حین اجرای پروژه با به کارگیری سیستم‌های کنترلی خاصی به مقایسه و ارزیابی پیش‌بینی‌ها با عملکردهای واقعی پرداخته و در صورت مشاهده اختلافات محسوس، عکس‌العمل‌های مناسب را نشان دهد. اساساً فرآیند کنترل، عملیات کاهش اختلاف میان طرح برنامه‌ریزی شده و طرح واقعی در حال اجراست. کنترل از یک سو با برنامه‌ریزی و از سوی دیگر با اجرای پروژه به طور پویا در ارتباط است. معمولاً فرآیند کنترل روی چهار جزء یک پروژه یعنی محدوده، کیفیت، هزینه و زمان پروژه صورت می‌گیرد. نمونه‌هایی از دلایل نیاز به کنترل در ذیل آمده است.

- (۱) مشکلات فنی که به صورت غیر منتظره پیش می‌آیند.
- (۲) خواسته‌های مشتریان در مشخصات سیستم تغییر می‌یابد.
- (۳) توالی فعالیت‌ها کمی ناصحیح تعیین شده و یا نوع روابط وابستگی به درستی تعریف نشده‌اند.
- (۴) فعالیت‌های پیش‌نیازی در زمان لازم تکمیل نشده‌اند و یا برخی از آن‌ها از قلم افتاده‌اند.
- (۵) مواد و منابع مصرفی زمانی که مورد نیاز بوده‌اند، در دسترس قرار نداشته‌اند.
- (۶) پیش‌بینی زمان، منابع و هزینه اجرای فعالیت‌ها مخصوصاً در حالات نرمال و فشرده به درستی صورت نگرفته است.
- (۷) به علت مشکلات فنی، برخی فعالیت‌ها به منابع بیشتری احتیاج پیدا نموده‌اند.
- (۸) محدوده و قلمرو پروژه بسط داده شده است.
- (۹) ضعف تشکیلاتی سازمان پروژه و عدم تناسب اختیارات با مسئولیت‌ها وجود دارد.

به طور خلاصه سه تفاوت اساسی بین کنترل پروژه و مدیریت پروژه وجود دارد. یکی از تفاوت‌های کلیدی این است که کنترل پروژه زیرمجموعه مدیریت پروژه با تمرکز اصلی بر مدیریت هزینه و برنامه پروژه است. یکی دیگر از تفاوت‌های کلیدی بین مدیر پروژه و کنترل‌کننده پروژه این است که مدیر پروژه کار تیم پروژه را هدایت می‌کند در حالی که کنترل‌کننده پروژه به تیم و مدیر پروژه مسائل مربوط به هزینه‌ها و برنامه‌های احتمالی/برنامه‌های بازایی را توصیه می‌کند. کنترل‌کننده پروژه به عنوان یک مشاور عمل می‌کند که توصیه‌های لازم را برای مدیریت پروژه ارائه می‌دهد و به تیم‌ها در استراتژی‌های مختلف و برنامه‌های بازایی کمک می‌کند تا هزینه‌های پروژه و برنامه را به مسیر بازگردانند. وی اطلاعات، نمودارها، داده‌ها و گزارش‌هایی ارائه می‌دهد که کمک می‌کند پروژه و آنچه می‌توانیم در مورد هزینه و وضعیت برنامه پروژه انجام دهیم را مدیریت کنیم. بنابراین کنترل‌کننده پروژه

تنها به عنوان یک مشاور عمل می‌کند. یکی دیگر از تفاوت‌های کلیدی بین کنترل‌کننده پروژه و مدیریت پروژه این است که کنترل‌کننده پروژه اطلاعات هزینه/برنامه پروژه را تولید می‌کند، در حالی که مدیر پروژه اطلاعات تولید شده را به مصرف می‌رساند و تصمیمات را برای پروژه می‌گیرد. بنابراین، کنترل‌کننده پروژه در تصمیم‌گیری برای این پروژه قرار ندارد. او اطلاعات را به مدیر پروژه و تیم ارائه می‌دهد و مدیر پروژه بر اساس اطلاعات ارائه شده و بر اساس پیشنهادات وی تصمیم می‌گیرد.

۳. ویژگی‌های یک پروژه

هر پروژه دارای ۶ ویژگی اصلی به شرح زیر است [۱].

پروژه یک کار منحصربه‌فرد، جدید و غیرتکراری است. هنگام دسته‌بندی روش‌های برنامه‌ریزی تولید اگر کار دارای ویژگی منحصربه‌فرد بودن باشد آن را پروژه نامیده و از روش‌های برنامه‌ریزی و کنترل پروژه برای برنامه‌ریزی آن استفاده می‌شود. اما اگر کار به صورت متناوب انجام شود آن را یک فرآیند تجاری یا تولیدی نامیده و از روش‌های برنامه‌ریزی تولید برای برنامه‌ریزی و مدل‌سازی آن استفاده می‌شود.

پروژه برای تحقق یک نتیجه عینی انجام می‌شود که بعد از اتمام پروژه این نتیجه در قالب یک محصول، ارائه خدمت یا تعهد باید به طور مشهود قابل تحویل باشد. نتیجه یک پروژه باید به صورت یک یا چند قلم قابل تحویل مشهود باشد. برای مثال اگر پروژه مربوط به ساخت یک برج مثل برج میلاد باشد در پایان کار باید برج مذکور با مشخصات از قبل تعیین شده مشهود و قابل تحویل به کارفرما یا مشتری باشد.

پروژه موقتی است، یک نقطه شروع و پایان مشخص داشته و زمان آن نامحدود نیست. به کاری پروژه اطلاق می‌شود که از نقطه زمانی تعریفی شروع شده و در نقطه زمانی خاصی پایان پذیرد. پروژه ممکن است ۶ ماه، ۱، ۳ یا ۱۰ سال طول بکشد ولی بالاخره به اتمام می‌رسد. بنابراین فرآیند ساخت یک سد پروژه است اما بهره‌برداری از آن پروژه نیست زیرا علاوه بر تکراری بودن پایانی ندارد.

هر یک از فعالیت‌های پروژه نیازمند منابع کاری و مصرفی مختلفی هستند. منابع به طور کلی به دو دسته منابع کاری که به آن منابع تجدیدپذیر نیز می‌گویند و منابع مصرفی یا منابع تجدیدنپذیر تقسیم می‌شوند. منابع کاری شامل نیروی انسانی، ماشین آلات و تجهیزات می‌باشد که به هر فعالیت تعداد مشخصی تخصیص می‌یابد و انجام فعالیت به عهده آن‌هاست. معمولاً ماهیت منابع کاری به گونه‌ای است که با اتمام یک فعالیت یا بسته کاری منابع تخصیص داده شده به آن آزاد یا بیکار می‌شوند و می‌توان آن‌ها را به سایر فعالیت‌ها تخصیص داد.

بودجه پروژه محدود و قابل پیش‌بینی است و باید یک حمایت‌کننده مالی داشته باشد. بودجه پروژه از طریق جمع بودجه مورد نیاز برای هر یک از تحویل شدنی‌ها قابل پیش‌بینی و محاسبه می‌باشد. بخش عمده این هزینه‌ها معمولاً مربوط به منابع کاری و مصرفی تخصیص یافته به فعالیت‌ها است. برای تأمین این هزینه‌ها

وجود یک حمایت کننده اولیه مالی ضروری است. حمایت کننده مالی پروژه ممکن است کارفرما یا مشتری پروژه بوده و یا سازمان مستقلی باشد.

در بخش‌های بعدی سعی می‌کنیم تا با مباحث پیشرفته‌تر کنترل پروژه آشنا شویم. تعاریف مقدماتی از هر بحث آورده می‌شود تا خواننده با کنترل پروژه روی شبکه‌ها آشنایی پیدا کند.

۴. کنترل پروژه در شبکه

برای مدیریت پروژه یکی از روش‌های مرسوم استفاده از شبکه فعالیت‌هاست. روش‌های رسم شبکه توسط دو نوع نمایش فعالیت‌ها روی گره (AON)^۴ و نمایش فعالیت‌ها روی کمان (AOA)^۵ توصیف می‌شود. در نمایش AON هر فعالیت را به صورت یک گره که معمولاً مستطیل است و روابط بین آن‌ها را به وسیله پیکان‌ها با خطوط توپر نشان می‌دهیم. در نمایش AOA فعالیت‌ها منحصر به شکل گره‌ای نیست بلکه می‌توان فعالیت‌ها و وابستگی‌های بین آن‌ها را به روش شبکه برداری یا سیستم فعالیت روی کمان نشان داد [۱۶]. از آنجایی که مدت زمان هر فعالیت عنصر پایه بسیاری از محاسبات در شبکه را تشکیل می‌دهد، برآورد صحیح آن نقش مهمی در سایر برآوردها و محاسبات بعدی بازی می‌کند. برآورد مدت زمان اجرای هر فعالیت و افزودن آن به مدل شبکه معمولاً بعد از فاز اول یعنی طرح ریزی منطق اجرای پروژه صورت می‌گیرد.

در جریان محاسبات زمانی، که به آن روش مسیر بحرانی (CPM)^۶ گویند، زودترین و دیرترین زمان وقوع رویدادها، فرجه فعالیت‌ها و مسیر بحرانی پروژه محاسبه می‌شوند [۴].

۱.۴ محاسبات مسیر پیشرو و پسرو این محاسبات از گره اول در شبکه شروع شده به سمت گره آخر پیش می‌رود و در طی آن زودترین زمان وقوع هر رویداد، زودترین زمان شروع هر فعالیت و نیز زودترین زمان پایان هر فعالیت را می‌توان محاسبه نمود. برعکس در محاسبات روش پسرو از گره آخر در شبکه شروع شده در حرکت پسرو به سمت گره اول ادامه می‌یابد و در طی آن دیرترین زمان وقوع هر رویداد، دیرترین زمان پایان هر فعالیت و دیرترین زمان شروع هر فعالیت را می‌توان محاسبه نمود.

۲.۴ شبکه‌های PN یکی از محدودیت‌های شبکه‌های برداری AOA این است که در آن‌ها تنها یک رابطه وابستگی یا تقدم-تأخر مجاز دانسته شده است و آن این که شروع هر فعالیت فقط وقتی ممکن است که کلیه فعالیت‌های پیشین‌سازی آن پایان یافته باشند. موارد بسیاری در عمل وجود دارد که در آن ماهیت یک فعالیت به گونه‌ای است که شروع آن صرفاً وابسته به پایان فعالیت یا فعالیت‌های پیشین‌سازی نیست بلکه شروع آن بعد از گذشت مدتی از شروع فعالیت پیشین‌سازی می‌تواند تحقق یابد و یا ممکن است محدودیتی برای شروع آن وجود نداشته باشد ولی پایان آن لازم است بعد از گذشت مدتی از پایان فعالیت پیشین‌سازی باشد و روابطی

^۴ Activity On Node

^۵ Activity On Arcs

^۶ Critical Path Method

از این قبیل. در نتیجه در بسیاری از پروژه‌ها معمولاً انواع دیگری از وابستگی‌های زمانی بین فعالیت‌ها لازم می‌شود که شبکه‌های برداری به طور مؤثر قادر به مدل‌سازی آن‌ها نیست و باید با استفاده از شبکه‌های PN آن‌ها را مدل‌سازی نمود. در شبکه‌های PN که به آن‌ها شبکه‌های تقدم-تأخیر نیز می‌گویند علاوه بر این که نوع روابط وابستگی بین فعالیت‌ها نسبت به شبکه‌های برداری گسترده‌تر است، نحوه نمایش شبکه آن نیز به روش گره‌ای AON است [۱۳، ۱۴].

۵. برنامه‌ریزی تخصیص منابع محدود

در بخش‌های قبلی توضیح داده شد که منابع به دو دسته منابع کاری که به آن منابع تجدیدپذیر نیز می‌گویند و منابع مصرفی یا منابع تجدیدنپذیر تقسیم می‌شوند. معمولاً ماهیت منابع کاری به گونه‌ای است که با اتمام یک فعالیت یا بسته کاری منابع تخصیص داده شده به آن آزاد یا بیکار می‌شوند و می‌توان آن‌ها را به سایر فعالیت‌ها تخصیص داد. همچنین ماهیت منابع مصرفی به گونه‌ای است که با اتمام یک فعالیت یا بسته کاری مقدار منابع مصرفی پیش‌بینی شده برای انجام آن فعالیت مصرف شده و به اتمام می‌رسد. در دو بخش قبل برای انجام محاسبات زمانی فرض بر این بود که منابع مورد نیاز به اندازه کافی در دسترس می‌باشند. به همین خاطر اثر منابع در برنامه زمانی در نظر گرفته نشد. در حالی که همیشه این طور نیست. یعنی ممکن است از هر نوع منبع تعداد محدودی در دسترس باشد و بخواهیم پروژه را با همین تعداد منابع انجام دهیم. واضح است که اگر محدودیت منابع وجود داشته باشد دیگر نمی‌توان شروع فعالیت‌ها را بر حسب زودترین زمان شروع برنامه‌ریزی کرد. حال این سؤال مطرح می‌گردد که زمان شروع فعالیت‌ها با در نظر گرفتن محدودیت منابع و روابط وابستگی بین فعالیت‌ها چگونه باشد تا پروژه با حداقل تأخیر ممکن نسبت به زمان اتمام محاسبه شده به پایان برسد. این مفهوم تحت عنوان مسئله برنامه‌ریزی تخصیص منابع محدود^۷ RCPSP مطرح می‌شود. با توجه به توضیحات فوق برنامه‌ریزی تخصیص منابع محدود دسته‌ای از مسائل هستند که در آن‌ها منابع در یک پروژه محدود هستند و می‌توان ادعا کرد که این نوع از مسائل به پروژه‌های دنیای واقعی بیشتر نزدیک است. روش‌های متعددی برای برنامه‌ریزی این نوع مسائل وجود دارد اما می‌توان آن‌ها را به چهار دسته زیر تقسیم کرد [۱۵، ۲۰].

چهار دسته روش‌های RCPSP در زیر آمده‌اند:

- (۱) روش‌های دقیق مبتنی بر برنامه‌ریزی ریاضی صفر و یک. این روش‌ها جواب بهینه را بدست می‌آورند اما به کارگیری آن‌ها برای مسائل بزرگ (بیش از ۱۰۰ فعالیت) با زمان پردازش قابل قبولی امکان‌پذیر نمی‌باشد.
- (۲) روش‌های دقیق مبتنی بر شاخه و کران و طرح‌های شمارشی. این روش‌ها نیز جواب بهینه را می‌دهند اما برای مسائل کوچک کاربرد دارند.

(۳) روش‌های ابتکاری مبتنی بر قوانین اولویت‌بندی. این روش‌ها جواب موجه یا شدنی را ارائه می‌دهند که معمولاً بهینه نیست. زمان پردازش آن‌ها روی کامپیوتر معمولاً سریع‌تر از سایر روش‌هاست. به همین خاطر برای مسائل بزرگ کاربرد دارند.

(۴) روش‌های فراابتکاری. این روش‌ها شامل الگوریتم ژنتیک، انواع جستجوها، شبکه عصبی و ... هستند که تلاش می‌کنند جوابی شدنی و نزدیک به بهینه با زمان پردازش نسبتاً معقول ارائه دهند.

منطق روش‌های فراابتکاری به دو دسته زیر قابل تقسیم است:

- روش‌های ایجاد: روش‌هایی که از یک برنامه خالی شروع شده و فعالیت‌ها را یکی یکی اضافه نموده تا این‌که یک برنامه شدنی حاصل شود.
- روش‌های بهبود دهنده: از یک برنامه شدنی که قبلاً توسط یکی از روش‌های ایجاد به وجود آمده شروع نموده و سعی در بهبود آن دارند.

۶. شبکه‌های احتمالی PERT

تقریباً بیشتر روش‌های مدیریت پروژه که تا به حال مورد استفاده قرار گرفته‌اند، توسط وزارت دفاع، صنایع نظامی و سازمان هوا فضای ایالات متحده در خلال سال‌های دهه ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ میلادی ابداع شده و توسعه یافته‌اند که روش‌هایی همچون روش PERT از آن جمله‌اند. صنعت ساختمان نیز در تکوین و توسعه روش‌هایی همچون روش مسیر بحرانی استفاده از نمودار شبکه‌ای و تسطیح منابع یاری رسانده است. در جریان ساخت اولین زیردریایی هسته‌ای آمریکا در سال ۱۹۵۰، برای نخستین بار جهت هماهنگ کردن صدها پیمانکار، هزاران منبع و اطمینان از اجرای به موقع پروژه، روشی جدید که امروزه با نام PERT شناخته می‌شود، ابداع شد. هر چند بدون وجود کامپیوتر عملیات دستی محاسبه مسیر بحرانی بسیار دشوار بود اما کمک بسیار زیاد این روش و اجرای موفقیت‌آمیز پروژه مذکور موجب شد تا همگان به اهمیت علم جدید پی ببرند. این روش بعد از آن در چندین پروژه بزرگ مورد استفاده قرار گرفت و موفقیت‌های چشم‌گیری را رقم زد.

شبکه‌های PERT یا فن ارزیابی و بازنگری پروژه برای حالاتی است که زمان فعالیت‌ها احتمالی هستند. تاکنون فرض بر این بود که زمان انجام هر یک از فعالیت‌ها قطعی است. به عبارت دیگر سعی بر آن بود تا با توجه به ماهیت و دقت پروژه برای انجام هر یک از فعالیت‌ها یک زمان قطعی برآورد شود و از حالات احتمالی پرهیز می‌شد. با توجه به این که عوامل متعددی در برآورد صحیح زمان یک فعالیت نقش دارند، تعیین زمان قطعی و دقیق آن همیشه ممکن نیست. مخصوصاً برای فعالیت‌هایی که برای اولین بار اجرا می‌شوند و تجربه خاصی از گذشته در مورد آن‌ها وجود ندارد. هر چند در حالاتی که تخمین‌ها دقیق نباشد نیز می‌توانیم زمان فعالیت‌ها را قطعی فرض نموده و در عوض در حین اجرا تغییرات احتمالی را اعمال کرده و پروژه را به‌هنگام کنیم. اما گاه نیاز است که گزارش‌ها و اطلاعات آماری دقیقی به مدیریت رده بالا داده شود. اطلاعاتی که بتواند به سؤالات زیر که در واقع خواسته‌های ما از PERT است پاسخ دهد [۱۰، ۱۲].

- (۱) زمان مورد انتظار و واریانس اتمام پروژه چقدر است؟
- (۲) با چه احتمالی پروژه در زمان مشخص به اتمام می‌رسد؟
- (۳) با اطمینان فرضاً ۹۵ درصد پروژه در چه زمانی به اتمام می‌رسد؟
- (۴) احتمال این که یک رویداد خاص فرجه‌ای به اندازه مشخص داشته باشد چیست؟
- (۵) اگر بدانیم رویداد مشخصی قطعاً در زمان معینی شروع شده است چه تغییری در پاسخ سؤالات ۱ و ۲ فوق به وجود می‌آید؟

مسلّم است که اگر از ابتدا یک زمان متوسط را به عنوان زمان قطعی یک فعالیت در نظر بگیریم و بخواهیم تغییرات احتمالی بعدی را از فرآیند به‌هنگام‌سازی اعمال کنیم دیگر قادر به پاسخ سؤالات آماری فوق نخواهیم بود. از طرفی اشکال دیگر این کار این است که هیچ فرقی بین فعالیتی که اجرای آن ممکن است بین ۳ تا ۱۷ روز طول بکشد با فعالیتی که اجرای آن ممکن است بین ۹ تا ۱۱ روز به طول بیانجامد قائل نمی‌شود و هر دو فعالیت را با در نظر گرفتن مدت متوسط زمان انجام ۱۰ روز برنامه‌ریزی می‌کند. لذا در شبکه‌های PERT زمان هر فعالیت را از ابتدا احتمالی در نظر می‌گیرند تا اثر واریانس زمان هر فعالیت نیز در محاسبات لحاظ گردد.

۷. شبکه‌های GERT

نظریات و تحقیقات دانشمندان مختلف منجر به توسعه فن گرافیکی شد که آن را GERT یا فن تکنیک ارزیابی و بازنگری گرافیکی نامیدند. گرت روشی مرکب از تئوری فلوگراف، توابع مولد گشتاور و پرت، جهت حل مسائل احتمالی می‌باشد. این روش تجزیه و تحلیل سیستم‌ها و مسائل پیچیده را امکان‌پذیر می‌سازد. یک شبکه GERT از مجموعه‌ای از رویدادها و فعالیت‌ها که برای تشکیل مدل یک سیستم به صورت منطقی به یکدیگر می‌پیوندند به وجود می‌آید، اما کلیه محدودیت‌هایی که در شبکه‌های CPM و PERT وجود داشت در شبکه‌های GERT وجود نداشته و بنابراین همه آن حالات را می‌توان مدل‌سازی نمود. به بیان دیگر برنامه‌ریزی خطی حالت خاصی از شبکه‌های GERT هستند. بنابراین هر چند که جمع‌آوری اطلاعات این‌گونه شبکه‌ها مشکل است اما کاربرد آن بسیار بالاست. برای آشنایی بیشتر به مقایسه شبکه‌های PERT و GERT می‌پردازیم [۶، ۱۹].

۱۰۷. مقایسه شبکه‌های GERT و PERT

- (۱) در شبکه‌های گرت نیز مانند شبکه‌های برداری هر فعالیت روی یک پیکان یا شاخه مانند شکل ۲ نشان داده می‌شود با این تفاوت که هر فعالیت شبکه گرت دارای دو پارامتر است که می‌توان روی فعالیت نشان داد. این دو پارامتر عبارتند از:

P_{ij} : احتمال وقوع گره j به شرط آن که i به وقوع پیوسته باشد.

$f_{ij}(t)$: تابعی از زمان مورد نیاز برای تکمیل فعالیتی که با شاخه $j - i$ نشان داده شده است.



شکل ۲: نحوه نمایش یک فعالیت شبکه گرت به همراه دو پارامتر آن

(۲) در شبکه‌های پرت تابع چگالی احتمال زمان فعالیت‌ها تنها محدود به توزیع سه پارامتری بتا است ولی در شبکه‌های گرت می‌توان از بسیاری از توابع توزیع برای معرفی پارامتر زمان یک فعالیت استفاده نمود. ضمناً هر کدام از فعالیت‌های یک شبکه می‌توانند یک تابع توزیع جداگانه داشته باشند و لازم نیست همه آن‌ها فقط از یک تابع توزیع پیروی کنند.

(۳) انشعاب‌های احتمالی در شبکه‌های گرت مجاز است. در شبکه‌های CPM و پرت تمام فعالیت‌ها باید اجرا شوند. بنابراین کلیه فعالیت‌های منشعب شده از یک گره قطعی است و تمام آن‌ها باید انجام شوند. در یک شبکه گرت ممکن است تعدادی از گره‌ها دارای انشعاب‌های احتمالی و تعدادی دارای انشعاب‌های قطعی باشند.

(۴) ایجاد حلقه در شبکه‌های گرت مجاز است. در شبکه‌های CPM و پرت ایجاد هرگونه حلقه غیرمجاز است. بنابراین در این شبکه‌ها یک فعالیت نه می‌تواند تکرار شود و نه به رویدادی که قبلاً تحقق یافته است ختم گردد ولی در شبکه‌های گرت ایجاد هرگونه حلقه مانعی ندارد. این قابلیت بیانگر این است که بعضی از فعالیت‌ها می‌توانند تکرار شوند و بعضی از رویدادها نیز می‌توانند بیش از یک بار تحقق یابند.

(۵) در شبکه‌های CPM و پرت قبل از آن که یک رویداد بتواند تحقق یابد، باید تمام فعالیت‌هایی که به آن رویداد ختم می‌شوند به اتمام برسند. همچنین هیچ رویدادی نمی‌تواند بیش از یک بار تحقق یابد. در گرت تحقق یک رویداد را می‌توان به گونه‌ای تعریف کرد که با اتمام یک یا چند فعالیت که به آن رویداد ختم می‌شوند تحقق رویداد امکان‌پذیر گردد.

(۶) در یک شبکه پرت فقط یک رویداد شروع و یک رویداد نهایی که بیانگر پایان پروژه است تعریف می‌گردد. اما در یک شبکه گرت وجود چند رویداد شروع و چند رویداد نهایی مجاز است و بدین ترتیب مدل شبکه‌ای گرت قادر است بسیاری از وضعیت‌های واقعی را که چنین نیازی برای آن‌ها وجود دارد مدل‌سازی کند.

(۷) در رسم شبکه‌های گرت از شکل‌های مختلف گره برای نشان دادن نوع رویداد استفاده می‌شود. در یک شبکه احتمالی گره متشکل از دو وجه، یکی ورودی و دیگری خروجی می‌باشد. به طور کلی سه رابطه منطقی برای ورودی و دو رابطه منطقی برای خروجی در نظر گرفته می‌شود.

۸. نرم افزارهای کنترل پروژه

در این بخش به معرفی دو نرم افزار برای حل مسائل کنترل پروژه و ویژگی‌های آن‌ها می‌پردازیم. نرم افزارهای Oracle Primavera و MsProject هر دو نرم افزارهایی هستند که در دسته نرم افزارهای مهندسی صنایع دسته‌بندی می‌شوند ولی در کل برای کنترل و مدیریت کلیه پروژه‌ها به کار می‌روند. هدف بیان ویژگی‌ها و خصوصیات منحصر به فرد و قابل توجه هر یک از دو نرم افزار پریماورا و ام اس پروجکت است. اگر چه نرم افزارهای پریماورا و ام اس پروجکت هر دو به منظور مدیریت جامع پروژه‌های عظیم طراحی شده‌اند ولی در واقع پریماورا قابلیت کنترل پروژه‌های عظیم را دارد و ام اس پروجکت برای مدیریت پروژه‌های کوچکتر به کار می‌رود. ام اس پروجکت امکان ایجاد تنها ۱۱ عدد Baseline را برای یک پروژه واحد به کاربر می‌دهد. این در حالی است که این مقدار برای پریماورا نامحدود است. پلتفرم چند کاربره از ویژگی‌های هر دو نرم افزار می‌باشد ولی در نرم افزار پریماورا چندین کاربر به صورت همزمان می‌توانند روی یک پروژه واحد کار کنند در حالی که ام اس پروجکت پروژه را در هنگامی که یک کاربر در حال ویرایش و یا افزودن اطلاعات است، بر روی سایر کاربران مجاز قفل می‌کند. از دیگر قابلیت‌های پریماورا در این زمینه، امکان تعریف سقف مجاز دسترسی هر کاربر در یک پروژه است. ایجاد تقویم سفارشی بر اساس منابع و پروژه، خصوصیتی است که هر دو نرم افزار دارند ولی امکان ثبت دستاوردها و وقایع روزانه در تقویم ام اس پروجکت قابلیت است که تنها به صورت دستی در پریماورا امکان‌پذیر می‌باشد. قابلیت پیش‌بینی ریسک‌های احتمالی پروژه، تبدیل مستقیم اطلاعات پروژه به HTML به منظور اشتراک‌گذاری در وب و همچنین مشخص کردن کارهایی که حداکثر تا یک ماه آینده باید انجام پذیرد به رنگ زرد، از جمله مواردی است که در پلتفرم پریماورا به صورت پیش فرض موجود و برخی در صورت ارتقای نرم افزار ام اس پروجکت در این نرم افزار قابل اجراست. تفاوت‌های جزئی زیادی بین این دو نرم افزار مهندسی وجود دارد ولی در کل انتخاب نرم افزار مطلوب بیش از همه به نیازهای سازمانی و نوع پروژه‌ای بستگی دارد که روی آن کار می‌کنیم.

مراجع

- [۱] م. سبزه پرور، کنترل پروژه به روش گام به گام، انتشارات ترمه، چاپ پانزدهم، تهران، ۱۳۹۱.
- [۲] ر.ب. هریس، برنامه‌ریزی شبکه‌ای، ترجمه محمدتقی بانکی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۷.
- [3] H. Akkermans and K.E. van Oorschot, *Pilot Error? Managerial decision biases as explanation for disruptions in aircraft development*, Project Manag. J. **47** (2016), no. 2, 79–102.
- [4] A.M. Aliyu, *Project management using critical path method (CPM): A pragmatic study*, Global J. Pure Applied Sci. **18** (2012), no. 3-4, 197–206.
- [5] J. Averous, *Practical Project Control Manager, Handbook*, Fourth Revolution Publishing, Singapore, 2016.
- [6] A. Azaron and S. Aref, *The use of a GERT based method to model concurrent product development processes*, European J. Oper. Res. **250** (2016), no. 2, 566–578.

- [7] J. Delisle, *Working time in multi-project settings: How project workers manage work overload*, Internat. J. Project Manag. **38** (2020), no. 7, 419–428.
- [8] W.E. Deming, *Out of the Crisis*, MIT Press, Cambridge, MA, 2000.
- [9] K. Jugdev, G. Mathur and T. Fung, *Mediated effect of project management asset characteristics on firm performance*, Internat. J. Managing Projects in Business, **13** (2019), no. 7, 1442–1464.
- [10] H. Kuklan, E. Erdem, F. Nasri and M.J. Paknejad, *Project planning and control: an enhanced PERT network*, Internat. J. Project Manag. **11** (1993), no. 2, 87–92.
- [11] J. Li, O. Moselhi and S. Alkass, *Internet-based database management system for project control*, Eng. Const. Arch. Manag. **13** (2006), no. 3, 242–253.
- [12] A. Mishakova, A. Vakhrushkina, V. Murgul and T. Sazonova, *Project control based on a mutual application of pert and earned value management methods*, Procedia Eng. **165** (2016) 1812–1817.
- [13] J. Nisar and S. Halim, *The effect of critical activity on critical path and project duration in precedence diagram method*, Internat. J. Struct. Const. Eng. **12** (2018), no. 9, 837–843.
- [14] S.A. Nisar and K. Suzuki, *Critical activity analysis in precedence diagram method scheduling network*, In: de Werra D., Parlier G., Vitoriano B. (Eds.) Operations Research and Enterprise Systems. ICORES 2015, pp. 314–322, Communications in Computer and Information Science 577, Springer, Cham, 2015.
- [15] S. Noori and K. Taghizadeh, *Multi-mode resource constrained project scheduling problem: A survey of variants, extensions, and methods*, Internat. J. Indust. Eng. Product. Res. **29** (2018), no. 3, 293–320.
- [16] N. Perrier, S.E. Benbrahim and R. Pellerin, *The core processes of project control: A network analysis*, Procedia Comput. Sci. **138** (2018) 697–704.
- [17] R. Picciotto, *Towards a new project management movement? An international development perspective*, Internat. J. Project Manag. **38** (2020), no. 8, 474–485.
- [18] D. Rezaia, R. Baker and R. Burga, *Project control: an exploratory study of levers of control in the context of managing projects*, J. Account. Organiz. Change **12** (2016), no. 4, 614–635.
- [19] L. Tao, D. Wu, S. Liu and J.H. Lambert, *Schedule risk analysis for new-product development: The GERT method extended by a characteristic function*, Reliab. Eng. Syst. Safety **167** (2017) 464–473.
- [20] M. Vanhoucke, *Tolerance limits for project control: An overview of different approaches*, Comput. Indust. Eng. **127** (2019) 467–479.
- [21] <https://memory.ai/timely-blog/the-importance-of-project-control-in-project-management>



INVESTIGATING ANALYTICAL CONCEPTS IN HIGH SCHOOL MATHEMATICS BOOKS

MOHSEN KIAN¹

¹Department of Mathematics, University of Bojnord, Bojnord, Iran
kian@ub.ac.ir

Abstract. In this paper, we investigate analytical concepts in high school mathematics books for mathematics students. We discuss some weak points and strong points of the books. Also, we suggest some analytical concepts which by many authors are necessary for students to improve their critical thinking.



نقد و بررسی مفاهیم آنالیزی کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه

محسن کیان^۱

^۱ گروه ریاضی، دانشگاه بجنورد

kian@ub.ac.ir

چکیده. در این مقاله، به نقد و بررسی مفاهیم آنالیزی در کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه برای رشته ریاضی و فیزیک پرداخته شده است. ضمن بررسی این مفاهیم که هم اکنون در کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه تدریس می‌شوند، سعی می‌کنیم پاره‌ای از نقاط ضعف و قوت آنها را بیان نماییم. به‌ویژه تلاش می‌کنیم محتوای جدید آنالیز ریاضی، که به زعم پژوهشگران برای دانش‌آموزان رشته ریاضی برای ورود به رشته‌های متنوع دانشگاهی و نیز گسترش تفکر انتقادی آنها لازم است، برای این کتاب‌ها پیشنهاد دهیم.

۱. پیش‌گفتار

کتاب‌های درسی رشته ریاضی دوره متوسطه در طی سالیان گذشته، قبل و بعد از انقلاب ۱۳۵۷ بارها مورد بازبینی و اصلاح قرار گرفته‌اند و همواره مدرسین و متخصصین حوزه آموزش ریاضی نکات و پیامدهای مثبت و منفی این تغییرات را بیان نموده‌اند. پیامدهای ناشی از تغییر مواد درسی ریاضی در دوره متوسطه به طور مستقیم بر علاقه دانش‌آموزان به این رشته و همچنین توان علمی آنان در دوره‌های دانشگاهی تأثیری غیرقابل انکار دارند.

نظام‌های آموزشی نیز طی سالیان گذشته دستخوش تغییر و تحول شده‌اند. نظام آموزش مدارس قبل از سال ۱۳۴۶ به دو دوره ۶ سال ابتدایی و ۶ سال متوسطه تقسیم شده بود. پس از آن نظام آموزشی تبدیل به نظامی

2020 Mathematics Subject Classification. 97A30, 97U20

کلید واژگان. مفاهیم آنالیزی، کتاب‌های دوره متوسطه، رشته ریاضی و فیزیک، حد و پیوستگی، مشتق، انتگرال.
تاریخ: دریافت ۱۴۰۰/۸/۱ بازنگری ۱۴۰۰/۸/۲۰ پذیرش ۱۴۰۰/۹/۵ انتشار برخط ۱۴۰۰/۹/۱۶

نحوه ارجاع به این مقاله: م.کیان، نقد و بررسی مفاهیم آنالیزی کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه، به سوی علوم ریاضی، ۲ (۱۴۰۱)، شماره ۱، ۷۹-۳۱.

موسوم به ۵-۳-۴ گردید، یعنی ۵ سال ابتدایی، سه سال راهنمایی و چهار سال متوسطه. این سیستم آموزشی تا سال ۱۳۷۰ در مدارس کشور اجرا می‌شد تا جایی که تصمیمی مبنی بر جدا کردن سال آخر متوسطه به عنوان دوره پیش‌دانشگاهی گرفته شد. از این رو، از سال ۱۳۷۰ به بعد، نظام آموزشی موسوم به ۵-۳-۳-۱ اجرایی شد، یعنی ۵ سال ابتدایی، سه سال راهنمایی و سه سال متوسطه و یک سال پیش‌دانشگاهی. در سال‌های اول بکارگیری این نظام آموزشی، ورود به دوره پیش‌دانشگاهی مستلزم گذراندن امتحان ورودی بود اما پس از مدتی این امتحان ورودی برداشته شد. در آخرین تغییرات، نظام آموزشی در سال تحصیلی ۱۳۹۲ از سیستم ۵-۳-۳-۱ به ۶-۳-۳-۳ تغییر یافت، یعنی دوره پیش‌دانشگاهی حذف شد و آموزش به ۶ سال دوره ابتدایی، ۳ سال دوره متوسطه اول و ۳ سال دوره متوسطه دوم تقسیم بندی شد. برای یافتن توصیف و تحلیل بیشتر نظام‌های مختلف آموزشی کشور به [۱۰، ۱۳] مراجعه نمایید.

در سال‌های اخیر، افت سطح علمی دانشجویان نو ورود به طور کلی در همه رشته‌های دانشگاهی و به طور خاص در رشته ریاضی کاملاً مشهود است ([۱۱] را ببینید). ضعف دانشجویان در مفاهیم پایه‌ای ریاضیات که در دوره متوسطه آموزش داده می‌شوند، و لازمه ادامه تحصیل فرد در دوره کارشناسی تقریباً تمامی رشته‌های مهندسی و علوم پایه هستند، تبدیل به مشکلی جدی برای مدرسين و دانشجویان شده است. در برخی موارد عدم تناسب مفاد آموزشی در دوره متوسطه با دوره کارشناسی نیز به چشم می‌خورد که با تغییر و بازنگری کتاب‌های دوره متوسطه، گاه به مشکل جدی‌تری تبدیل می‌شود.

در این طرح، به بررسی مفاهیم آنالیزی در کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه رشته ریاضی و فیزیک پرداخته شده است و نقاط ضعف و قوت این مفاهیم با ذکر دلایل مشخص توصیف شده‌اند.

برای بررسی این مفاهیم، چندین کتاب مورد بررسی و مقایسه قرار گرفته‌اند. در این بررسی، برای پرهیز از بکار بردن واژه‌های “نظام قدیم” یا “نظام جدید”، برای ارجاع به هر کتاب از سال چاپ آن استفاده خواهیم کرد. در مورد کتاب‌های مورد بررسی، یعنی کتاب “حسابان یک- پایه سوم متوسطه رشته ریاضی و فیزیک” که در فصل ۳ مورد بررسی قرار گرفته است و کتاب “حسابان دو- پایه چهارم متوسطه رشته ریاضی و فیزیک” که در فصل ۴ مورد بررسی قرار گرفته است، صرفاً واژه کتاب را مورد استفاده قرار خواهیم داد:

کتاب حسابان یک- پایه سوم دوره دوم متوسطه رشته ریاضی و فیزیک

کتاب حسابان دو- پایه چهارم دوره دوم متوسطه رشته ریاضی و فیزیک

کتاب ریاضی ۲- پایه یازدهم دوره دوم متوسطه رشته علوم تجربی

کتاب ریاضی ۳- پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه رشته علوم تجربی

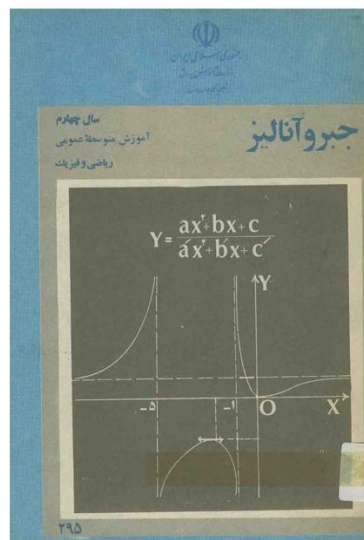
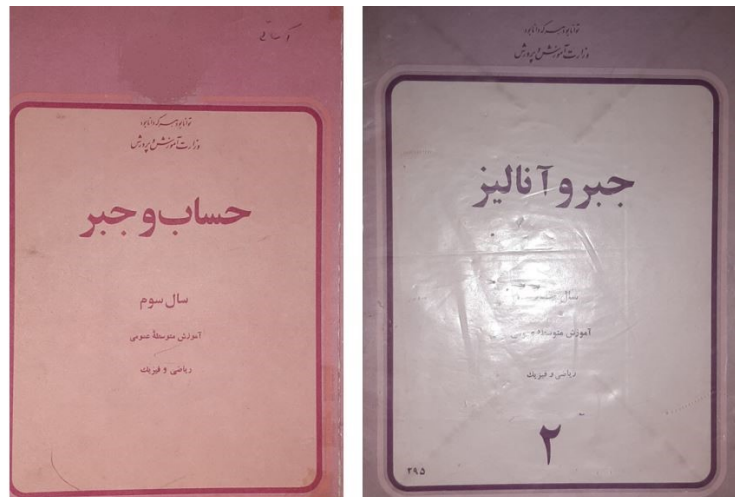
کتاب حسابان- سال سوم متوسطه رشته ریاضی و فیزیک چاپ ۱۳۹۲

کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش‌دانشگاهی رشته ریاضی و فیزیک چاپ ۱۳۹۴

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ	بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
اللَّهُمَّ صَلِّ عَلَى مُحَمَّدٍ وَآلِ مُحَمَّدٍ وَعَلِّمْ فَرْدَهُمْ	اللَّهُمَّ صَلِّ عَلَى مُحَمَّدٍ وَآلِ مُحَمَّدٍ وَعَلِّمْ فَرْدَهُمْ
حسابان (۱)	حسابان (۲)
رشته ریاضی و فیزیک	رشته ریاضی و فیزیک
پایه یازدهم	پایه دوازدهم
دوره دوم متوسطه	دوره دوم متوسطه
بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ	بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
اللَّهُمَّ صَلِّ عَلَى مُحَمَّدٍ وَآلِ مُحَمَّدٍ وَعَلِّمْ فَرْدَهُمْ	اللَّهُمَّ صَلِّ عَلَى مُحَمَّدٍ وَآلِ مُحَمَّدٍ وَعَلِّمْ فَرْدَهُمْ
ریاضی (۲)	ریاضی (۳)
رشته علوم تجربی	رشته علوم تجربی
پایه یازدهم	پایه دوازدهم
دوره دوم متوسطه	دوره دوم متوسطه
۱۳۹۶	
بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ	بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
حسابان	حساب دیفرانسیل و انتگرال
سال سوم آموزش متوسطه	دوره پیش دانشگاهی
رشته ریاضی و فیزیک	رشته علوم ریاضی
۱۳۹۲	۱۳۹۲

به علاوه، در این بررسی از محتوای کتاب‌های “حساب و جبر” سال سوم دوره متوسطه و “جبر و آنالیز” سال چهارم دوره متوسطه که چاپ قبل از انقلاب هستند و در ادامه آنها را کتاب‌های سال‌های دور خطاب می‌کنیم، استفاده خواهیم کرد. همچنین، کتاب “جبر و آنالیز” سال چهارم دوره متوسطه چاپ سال ۱۳۶۰ نیز در این مطالعه استفاده شده است.

تاکید می‌کنیم که مفاهیم آنالیزی به طور کلی شامل موضوعات حد، پیوستگی، مشتق و انتگرال است که هر کدام از این موضوعات شامل زیربخش‌های زیادی هستند. این مفاهیم به طور مشخص در دو کتاب حسابان یک پایه یازدهم و حسابان دو پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه گنجانده شده‌اند. در بررسی این دو کتاب سعی کرده‌ایم نگاه انتقادی داشته و برای اصلاح موارد پیشنهادهایی ارائه دهیم. با این وجود، محتوای بسیاری از دروس به خوبی تهیه و گنجانده شده است و در این طرح این نقاط مثبت نیز بررسی شده‌اند.



به طور کلی این بررسی به سه شیوه انجام شده است. اول: نکات مثبت و محتوای مناسب آورده شده در کتاب، دوم: نقد موارد نامناسب و پیشنهاد برای اصلاح و یا حذف آنها و سوم: پیشنهاد گنجاندن محتوای آموزشی جدید.

۲. کتاب حسابان یک، پایه یازدهم

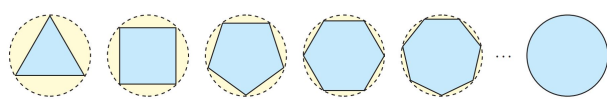
در کتاب مورد بررسی، همانند سایر کتاب‌های ویرایش جدید در رشته ریاضی و فیزیک، تقریباً تمامی گزاره‌ها و روابط بدون برهان آورده شده‌اند. گرچه حذف برخی از برهان‌های طولانی، که در کتاب‌های چاپ ادوار گذشته گنجانده شده بود، به روان شدن سیر آموزش محتوا کمک کرده است، اما در برخی از موارد که برهان‌ها جنبه ساختاری داشته و به دانش آموز در فهم بیشتر گزاره‌ها کمک می‌کرده است نیز از این کتاب‌ها حذف شده‌اند. شاید بتوان گفت که برجسته‌ترین نقطه قوت کتاب‌های ویرایش حاضر، تفکیک و دسته بندی مناسب محتوا می‌باشد.

۱.۲ حد در شروع آموزش مفهوم حد، در کتاب دوره جدید، توضیحات و مثال‌های مناسبی آورده شده است. در فعالیت صفحه ۱۱۴ کتاب (شکل ۱)، مثال مناسبی آورده شده است که می‌تواند به دانش‌آموز در فهم و درک مفهوم حد کمک کند.

شکل ۱: فعالیت صفحه ۱۱۴ کتاب حسابان ۱

فعالیت

در شکل زیر، شعاع دایره‌ها، برابر ۱ واحد است.



۱. با افزایش اضلاع چندضلعی‌های محاط در دایره، مساحت چندضلعی به مساحت چه شکلی نزدیک می‌شود؟
 ۲. مساحت دایره‌ای به شعاع ۱ چقدر است؟
 ۳. اگر مقدار تقریبی عدد π تا ۵ رقم اعشار را برای $\pi \approx 3.14159$ در نظر بگیریم و مساحت n ضلعی منتظم واقع در درون دایره را با A_n نشان دهیم، جدول زیر مقادیر A_n را به ازای برخی $n \in \mathbb{N}$ نشان می‌دهد:

n	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۱۰۰۰
A_n	۱/۲۹۹۰۳	۲	۲/۳۷۶۴	۲/۵۹۸۰۷	۲/۳۴۶۰۸	۲/۸۲۸۲۲	۲/۸۲۵۴۲	۲/۸۳۸۹۲	۳/۸۴۱۰۷	۳/۸۴۱۳۶	۳/۸۴۱۴۶	۳/۸۴۱۵۰	۳/۸۴۱۵۷

۴. با توجه به این جدول، هرچه تعداد اضلاع چندضلعی‌های داخل دایره زیاد می‌شود، جملات دنباله A_n (مساحت n ضلعی درون دایره) به عدد ... که برابر مساحت دایره است نزدیک می‌شوند.

مساحت چندضلعی‌های منتظم درون دایره (محاطی) را به هر اندازه که بخواهیم، می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک کنیم، به شرط آنکه تعداد اضلاع را به اندازه کافی زیاد کنیم.

مثال صفحه ۱۱۶ (شکل ۲) اولین مثالی است که دانش‌آموز با حد یک تابع مواجه می‌شود. در این مثال سعی شده است حد تابع در یک نقطه با محاسبه مقادیر تابع در نقاط نزدیک آن به دانش‌آموز نشان داده شود. گرچه هنوز مفاهیم حد چپ و حد راست بیان نشده است، اما در جدول محاسبه مقادیر تابع به‌طور غیرمستقیم اشاره می‌شود که برای نزدیک شدن به نقطه مورد نظر می‌توان با مقادیر کمتر یا با مقادیر بیشتر از آن نقطه به آن نزدیک شد:

شکل ۲: مثال صفحه ۱۱۶ کتاب حسابان ۱

x از چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شود

x از راست به عدد ۲ نزدیک می‌شود

x	۱	۱/۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	→	۲	←	۲/۰۰۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۵	۳
$f(x)$	۳	۳/۵	۳/۹	۳/۹۹	۳/۹۹۹	→	?	←	۴/۰۰۰۱	۴/۰۰۱	۴/۰۱	۴/۵	۵

$f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود

$f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود

در تعریف حد یک تابع در نقطه‌ای مانند a که در صفحه ۱۱۹ آورده شده است (شکل ۳)، از عبارت ”به جز احتمالاً در خود a “ استفاده شده است.

شکل ۳: تعریف حد یک تابع صفحه ۱۱۹

تعریف حد یک تابع

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی عدد a (به جز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشد. می‌گوییم «حد تابع f وقتی x به a نزدیک می‌شود برابر عدد حقیقی L است»، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد، به شرط آنکه متغیر x (با مقادیر مخالف a از دوطرف) به قدر کافی به a ، نزدیک شود.

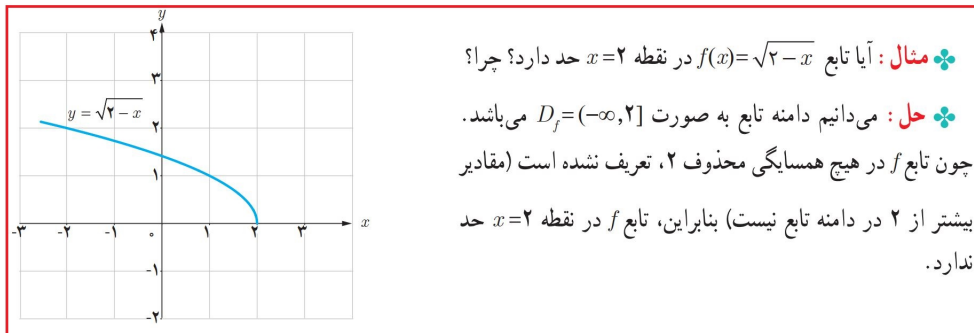
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

در این صورت می‌نویسیم:

عدد L را حد تابع f در a می‌نامیم.

همان‌گونه که در توضیحات کار در کلاس صفحه ۱۱۸ آورده شده است، پیشنهاد می‌شود دبیر در توضیح عبارت فوق بار دیگر تاکید نماید که برای تعریف حد یک تابع در نقطه‌ای مانند a ، نیاز است که تابع در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. به بیان دیگر، دانش آموز باید درک کند که منظور از اصطلاح «به جز احتمالاً در خود a » این است که برای وجود حد تابع در یک نقطه مانند a ، ممکن است تابع در نقطه a تعریف شده باشد و یا نباشد. این مطلب به طور مناسبی در مثال صفحه ۱۲۰ (شکل ۴) آورده شده است:

شکل ۴: مثال صفحه ۱۲۰



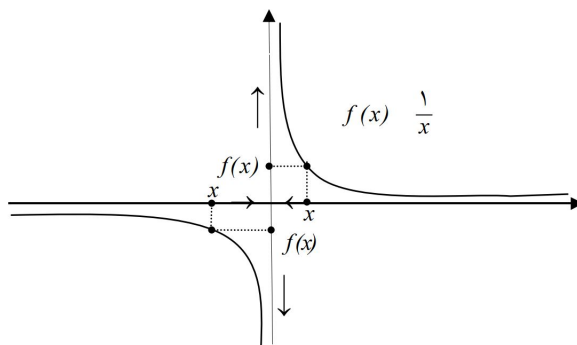
در این مثال به روشنی بیان می‌شود که چون تابع در هیچ همسایگی محذوفی از نقطه ۲ تعریف شده نیست، پس حد تابع در نقطه ۲ وجود ندارد.

به نظر می‌رسد پس از آوردن مثال‌هایی که در آنها دانش آموز به کمک نمودار و یا جدول مقادیر به محاسبه حد توابع می‌پردازد، بهتر است مثال یا مثال‌هایی آورده شود که در آنها حد تابع در نقطه داده شده وجود ندارد. به‌طور مشخص، مثال صفحه ۱۲۰ تنها مثال از این دست در این فصل می‌باشد. با این حال در این مثال شرایط تعریف حد وجود ندارد.

در کتاب حسابان سال ۱۳۹۲، این موضوع با آوردن یک مثال به روشنی توضیح داده شده است. پیشنهاد می‌شود مثالی از یک تابع آورده شود که شرایط تعریف حد وجود داشته ولی تابع در آن نقطه دارای حد نباشد. تاکید می‌کنیم که می‌توان همانند همه مثال‌های این فصل، از نمودار و یا جدول مقادیر برای اینکار استفاده کرد. یک مثال پیشنهادی به‌صورت زیر است:

شکل ۵: فعالیت ۲ صفحه ۱۳۶ کتاب حسابان سال دوم متوسطه دوره قدیم

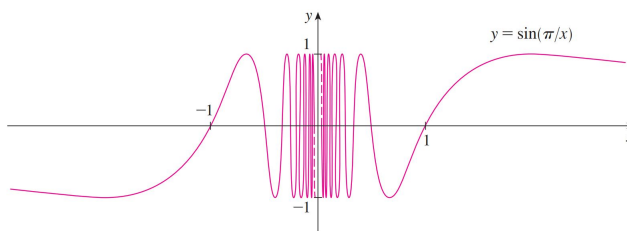
۲- آیا مقدارهای $\frac{1}{x}$ وقتی x به صفر نزدیک می‌شود، به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟ جواب خود را از طریق نمودار تابع $\frac{1}{x}$ که در زیر آمده است توضیح دهید.



فعالیت بالا نشان می‌دهد این طور نیست که هر تابعی در هر نقطه‌ای حتماً حد داشته باشد. توابعی هستند که مقدارهای آن‌ها، با نزدیک شدن x (در دامنه تابع) به عددی مانند a به هیچ عددی نزدیک نمی‌شوند. گوییم این گونه توابع در آن نقطه حد ندارند.

مثال. تابع $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ در نقطه صفر تعریف نشده است، ولی در هر نقطه حقیقی دیگر تعریف شده است. بنابراین شرایط تعریف حد این تابع در نقطه صفر وجود دارد.

شکل ۶: نمودار تابع $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$



با این حال از جدول مقادیر تابع در نقاط نزدیک به صفر و نمودار تابع مشخص است که تابع در نقطه صفر حد ندارد. زیرا هنگامی که مقادیر x به عدد صفر نزدیک می‌شود، مقادیر تابع به هیچ عدد مشخصی نزدیک نمی‌شود. به بیان دقیق‌تر، مقادیر تابع بین -1 و 1 در حال نوسان است.

جدول ۱: جدول مقادیر تابع در سمت راست نقطه صفر

x	0.5	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001	0.0001	0.00001
$\sin \frac{\pi}{x}$	0.1094	0.5212	0.8896	-0.7174	-0.9995	-0.9892	0.9946	-0.8595

جدول ۲: جدول مقادیر تابع در سمت چپ نقطه صفر

x	-0.5	-0.1	-0.05	-0.01	-0.005	-0.001	-0.0001	-0.00001
$\sin \frac{\pi}{x}$	-0.1094	-0.5212	-0.8896	0.7174	0.9995	0.9892	-0.9946	0.8595

★

در کتاب حساب و جبر سال سوم آموزش متوسطه سال‌های دور، بعد از معرفی حد تابع و چند مثال، به بیان حد تابع بر اساس ε و δ پرداخته شده است و مثالی از بررسی حد تابع به کمک این تعریف بیان شده است.

شکل ۷: استفاده از δ و ε در کتاب حساب و جبر سال‌های دور

حد تابع را به‌طور صحیح‌تر، می‌توان این‌طور تعریف کرد:

عدد b را حد تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow a$ گویند، اگر وقتی که $|x - a|$ از عدد مثبت α کوچکتر می‌شود، $|f(x) - b|$ نیز از عدد مثبت مفروض ε کوچکتر شود (α وابسته به ε و تابع است).

$$|x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

بیان زیر، برای تعریف حد کوتاه‌تر است، ولی کاملاً دقیق نیست:

عدد b را حد تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow a$ گویند، اگر به ازای مقادیر به قدر کافی کوچک $|x - a|$ ، مقدار $|f(x) - b|$ نیز به قدر دلخواه کوچک شود.

مثال - عدد ۲ حد تابع $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$ است، وقتی $x \rightarrow \frac{1}{2}$ ، زیرا اگر بخواهیم نامساوی زیر برقرار باشد ($x \neq \frac{1}{2}$):

$$\left| \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} - 2 \right| < \varepsilon$$

نتیجه می‌شود:

$$|2x - 1| < \varepsilon$$

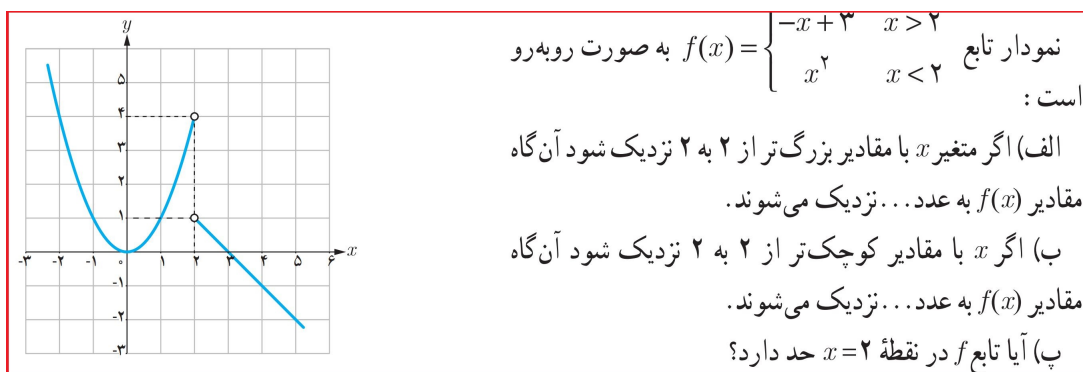
و یا:

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

یعنی قدر مطلق تفاضل تابع و حد: $\left| \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} - 2 \right|$ ، از مقدار مفروض ε به شرطی کوچکتر می‌شود که $\left| x - \frac{1}{2} \right|$ از $\frac{\varepsilon}{2}$ کوچکتر باشد. در این مثال $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$ است.

۲.۲ حد چپ و راست در ابتدای صفحه ۱۲۳، مراد از تعریف حد یک طرفه به کمک مثالی ساده توضیح داده شده است. فعالیت بعد از آن نیز به درک بهتر حد چپ و راست به دانش آموز کمک می‌کند:

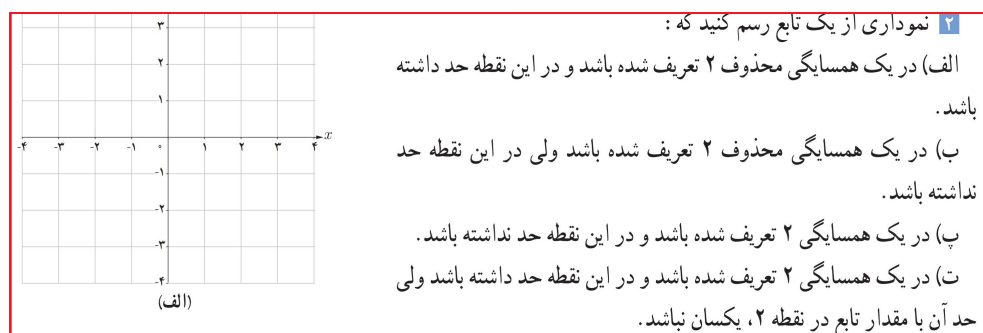
شکل ۸: فعالیت صفحه ۱۲۳



به علاوه، کار در کلاس شماره ۲ صفحه ۱۲۵ (شکل ۹) و تمرین ۳ صفحه ۱۲۸ به دانش آموز کمک می‌کند تا نقش همسایگی‌های راست و چپ را در وجود حدهای راست و چپ به روشنی درک کند و بتواند با استفاده از آنها به بررسی وجود حد در یک نقطه بپردازد. پیشنهاد می‌شود دبیر در کلاس به روشنی برای دانش آموز بیان کند که همانگونه که برای وجود حد تابع در یک نقطه، ابتدا لازم است تابع در یک همسایگی محذوف آن نقطه تعریف شده باشد، برای وجود حد راست ابتدا لازم است تابع در یک همسایگی راست آن نقطه تعریف شده باشد.

از آنجایی که کار در کلاس شماره ۲ صفحه ۱۲۵ اولین قدم دانش آموز برای یافتن حدهای یکطرفه است، پیشنهاد می‌شود دبیر برای هر کدام از موارد چندین نمونه را برای دانش آموزان بیان کند:

شکل ۹: کار در کلاس شماره ۲ صفحه ۱۲۵



در فعالیت صفحه ۱۲۶ (شکل ۱۰) به کمک تابع جز صحیح توضیح داده شده است که اگر دو تابع در یک همسایگی راست (چپ) یک نقطه با هم برابر باشند، آنگاه حد راست (چپ) آنها نیز با هم برابر خواهد بود. در اینجا یکی از توابع ثابت در نظر گرفته شده است.

شکل ۱۰: فعالیت صفحه ۱۲۶

در فعالیت قبل مشاهده کردیم که در بازه $(۱, ۲)$ که یک همسایگی راست ۱ می‌باشد نمودار تابع $f(x)=[x]$ بر نمودار تابع ثابت $g(x)=۱$ منطبق است و داریم $\lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = ۱$.

به همین ترتیب، در $(۰, ۱)$ که یک همسایگی چپ ۱ می‌باشد نمودار تابع $f(x)=[x]$ بر نمودار تابع ثابت $h(x)=۰$ منطبق است و داریم $\lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = ۰$.

اگر دو تابع f و g در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a با هم برابر باشند و حد راست یکی از آنها در a وجود داشته باشد آن‌گاه حد راست تابع دیگر نیز در a وجود دارد و مقدار این دو حد با هم برابرند، یعنی:

اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = L$.

برای اینکه دانش آموز موضوع را کلی‌تر درک کند، می‌توان از دو تابع استفاده کرد که ثابت نباشند. به عنوان مثال، می‌توان دو تابع $f(x) = x - [x]$ و $g(x) = |x|$ را در همسایگی راست صفر در نظر گرفت.

همان‌گونه که در بخش قبل توضیح داده شد، دانش آموز تا اینجا با مثالی برخورد نکرده است که مقدار تابع به بینهایت میل کند. از این رو، به نظر می‌رسد تمرین شماره ۵ صفحه ۱۲۹ (شکل ۱۱) تمرین مناسبی برای این بخش نباشد.

شکل ۱۱: تمرین شماره ۵ صفحه ۱۲۹

۵ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد راست تابع $f(x) = \frac{x}{[x]-۲}$ در نقطه $x=۲$ چه می‌توان گفت؟

۳.۲ قضایای حد برای بیان قضایای حد توابع، ابتدا ضروری است حد تابع ثابت و حد تابع همانی معرفی شوند. گرچه دانش آموز در بخش قبلی با مثال‌هایی شامل حد این دو تابع روبرو شده است (مانند فعالیت صفحه ۱۲۶ که در خلال آن حد تابع ثابت محاسبه شده است)، فعالیت صفحه ۱۳۰ با آوردن یک مثال سعی می‌کند این حدود را در حالت کلی بیان کند. با توجه به اینکه همانند سایر مطالب این کتاب، قضایای حد توابع بدون برهان آورده شده‌اند، باید به دانش آموز کمک کرد تا بتواند به نوعی درستی این قضایا را استدلال کند. این کار با یک مثال و در قالب رسم نمودار توابع در فعالیت صفحه ۱۳۱ انجام شده است.

مثال آورده شده در فعالیت صفحه ۱۳۵ (شکل ۱۲) به خوبی به دانش آموز گوشزد می‌کند که برای استفاده از قضایای حد مانند حد مجموع، ابتدا باید وجود حد هر یک از توابع را بررسی کرد.

از طرفی، کار در کلاس صفحه ۱۳۶ (شکل ۱۳) تاکید می‌کند که ممکن است حد مجموع دو تابع در یک نقطه موجود باشد، اما یکی از توابع در آن نقطه حد نداشته باشد.

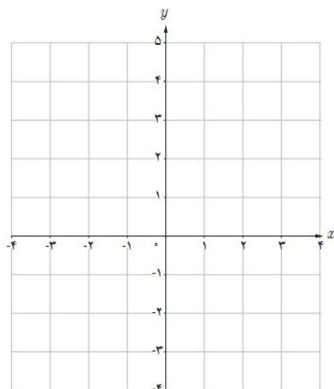
شکل ۱۲: فعالیت صفحه ۱۳۵

فعالیت

دو تابع $f(x) = \begin{cases} 4 & x \leq 2 \\ 3 & x > 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -2 & x \leq 2 \\ -1 & x > 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) ضابطه تابع $f+g$ را بیابید.

ب) نمودار توابع f ، g و $f+g$ را رسم کنید.



پ) آیا حد دو تابع f و g در $x=2$ وجود دارد؟

ت) آیا حد تابع $f+g$ در $x=2$ وجود دارد؟

ث) آیا می‌توان از قضیه حد مجموع برای محاسبه حد

$f+g$ در $x=2$ استفاده کرد؟ چرا؟

برای استفاده از قضیه حد مجموع، حد تفاضل و ...، ابتدا باید توجه کنیم که حد توابع f و g در نقطه $x=a$ موجود باشند.

شکل ۱۳: کار در کلاس صفحه ۱۳۶

کار در کلاس

فرض کنید توابع f و g در یک همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده‌اند.

الف) اگر $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ موجود باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ وجود دارند؟ چرا؟

تمرین ۶ صفحه ۱۴۰ (شکل ۱۴) نیز در همین راستا مطرح شده است.

شکل ۱۴: تمرین ۶ صفحه ۱۴۰

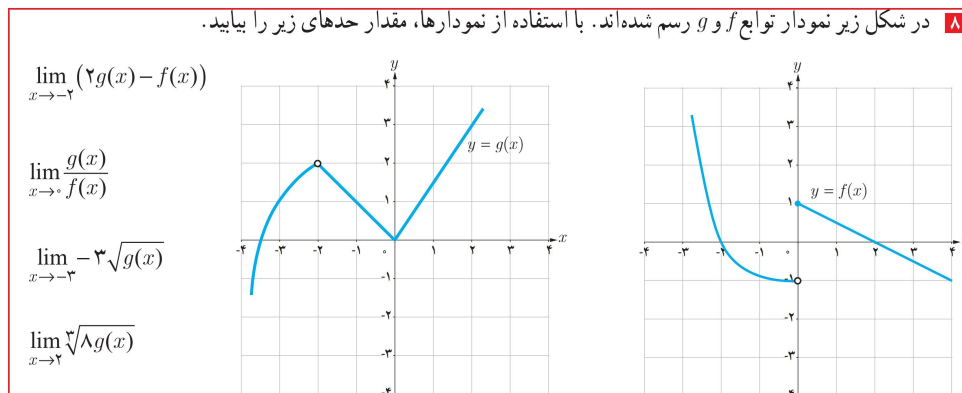
۶ اگر حد تابع f در a موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد در مورد وجود حد تابع $f+g$ در a چه می‌توان گفت؟

ممکن است دو مطلب فوق دانش آموز را تشخیص رابطه بین حد دو تابع و حد به عنوان مثال مجموع (تفاضل، حاصلضرب و یا خارج قسمت) آنها دچار سردرگمی کند. پیشنهاد می‌گردد دبیر توضیح کافی در این خصوص ارائه دهد. به علاوه می‌توان در توضیح دو مطلب اخیر، دو خط زیر را به عنوان تذکر در کتاب گنجاند:

برای اینکه حد مجموع (تفاضل، حاصلضرب و یا خارج قسمت) دو تابع در یک نقطه موجود باشد، لزومی ندارد هر کدام از آن توابع در آن نقطه دارای حد باشد. به عنوان مثال دو تابع فعالیت صفحه ۱۳۵ را ببینید. اما هرگاه بخواهیم از قضایای حد برای محاسبه حد مجموع، تفاضل، حاصلضرب و یا خارج قسمت دو تابع در یک نقطه استفاده کنیم، ابتدا حتما باید بررسی کنیم که هر دو تابع در آن نقطه دارای حد باشند.

تمرین ۸ صفحه ۱۴۰ می‌تواند به عنوان یک مثال خوب برای توضیحات بالا به عنوان یک فعالیت در کلاس مطرح شود. این تمرین کمک می‌کند دانش آموز به خوبی استفاده از قضایای حد را صرف نظر از چگونگی توابع تمرین کند. (شکل ۱۵)

شکل ۱۵: تمرین ۸ صفحه ۱۴۰



محاسبه حد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)}$ به کمک قضایای حد ممکن نیست، زیرا تابع $f(x)$ در نقطه صفر حد ندارد. با این وجود، اگر تابع $\frac{g(x)}{f(x)}$ را محاسبه کنیم داریم

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} \frac{3x}{-x+2} & x \geq 0 \\ \frac{-4x}{x^2-4} & x \leq 0 \end{cases}$$

بنابراین با اینکه تابع f در نقطه صفر حد ندارد، حد تابع $\frac{g(x)}{f(x)}$ در نقطه صفر برابر با صفر است.

۴.۲ حد توابع کسری، حالت $\frac{0}{0}$ در ابتدای این بخش ذکر شده است، که در آنجا به محاسبه حد توابع کسری پرداخته شده است که حد صورت و مخرج در نقطه مورد نظر هر دو برابر صفر است و از قضیه حد خارج قسمت نمی‌توان استفاده کرد.

مثال صفحه ۱۴۲ (شکل ۱۶)، نمونه‌ای از یک تابعی کسری است که حد صورت و مخرج هر دو در نقطه داده شده برابر صفر است:

شکل ۱۶: مثال صفحه ۱۴۲

❖ مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$ را بیابید.

❖ حل: حد صورت و مخرج کسر در $x=1$ برابر صفر می‌شود و در صورت کسر عبارت گنگ $\sqrt{x+8}-3$ وجود دارد. در این گونه موارد صورت و مخرج کسر را در یک عبارت مناسب ضرب می‌کنیم تا این عبارت گنگ، به عبارتی گویا تبدیل شود. در این مثال، صورت و مخرج کسر را در عبارت $\sqrt{x+8}+3$ ضرب می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} \times \frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+8}+3} \right)$$

اما آوردن عبارت "در این گونه موارد" در توضیحات حل این مثال، دانش آموز را مجاب می‌کند که راه حل بیان شده در این مثال کلی بوده و هرگاه با حدی این چنین شامل عبارت گنگ مواجه شد، باید عبارت گنگ را با ضرب در یک عبارت، تبدیل به عبارتی گویا نماید. با این حال، مثال صفحه ۱۴۳ (شکل ۱۷) را ببینید: واضح است که دانش آموز با روش بیان شده نمی‌تواند حد را محاسبه نماید. همانگونه که دیده می‌شود، این

شکل ۱۷: مثال صفحه ۱۴۳

❖ مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ را بیابید.

❖ حل: قرار می‌دهیم: $t = \sqrt{1+x}$. پس اگر x به صفر نزدیک شود، t به ۱ نزدیک می‌شود و داریم $x = t^2 - 1$ و بنابراین،

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{t^2-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2}$$

حد در کتاب با استفاده از تغییر متغیر حل شده است.

شاید برای حل حد توابع کسری در حالت $\frac{0}{0}$ ، بهترین توضیح کلی برای دانش آموز همانی باشد که در ابتدای بخش آورده شده است: "برای محاسبه حد تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ که در آن حد صورت و مخرج برابر صفر است، از قضایای حد نمی‌توانیم استفاده کنیم. برای محاسبه حد اینگونه توابع (در صورت وجود) با استفاده از اتحادهای جبری و اتحادهای مثلثاتی سعی می‌کنیم که صورت و مخرج کسر را ساده نماییم، تا جایی که دیگر حالت $\frac{0}{0}$ دیگر رخ ندهد."

به نظر می‌رسد چند نکته دیگر باید در این بخش گنجانده شود. ابتدا اینکه در مورد حدود چپ و راست در این حالت هیچ توضیح و یا مثالی آورده نشده است. در تمرین‌های این فصل در صفحه ۱۴۴ تنها یک مورد از

حدود یکطرفه آورده شده است:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2[x] - 8}{x - 2}.$$

در همین تمرین دانش آموز باید بداند که برای رفع حالت $\frac{0}{0}$ و ساده کردن صورت و مخرج، ابتدا باید تابع جز صحیح را از معادلات خود به نحوی کنار بگذارد. بنابراین پیشنهاد می‌شود دبیر در مورد حد تابع جز صحیح در کلاس توضیحات کامل ارائه دهد. این توضیحات لزوماً مربوط به این بخش نیست و حتی به نظر می‌رسد باید در بخش اول (مثال پایین صفحه ۱۲۶ را ببینید) داده شود.

یکی از مهمترین انتقاداتی که می‌توان به کتابهای حسابان رشته ریاضی وارد کرد، حذف بسیاری از مفاهیم اساسی از آنها است. باید دقت کرد که علی‌رغم حذف برخی از این مطالب، دانش آموز مجبور است به نحوی آنها را فراگیرد. مثال بسیار واضح در این زمینه حد توابع گویا در حالت ابهام $\frac{0}{0}$ است. کتاب حسابان پایه یازدهم در مورد تقسیم چندجمله‌ای بر عامل صفر شونده صحبتی نکرده است و حتی کتاب حسابان پایه دوازدهم نیز در این خصوص مطلبی نیاورده است. این موضوع تنها با چند مثال و نه به صورت کلی آمده است. مثالهای آمده در کتاب حسابان ۱ به نظر کافی نیست و در موضوع محاسبه حد توابع در حالت ابهام $\frac{0}{0}$ ، می‌توان مثال‌های متنوعی از بکارگیری تجزیه، فاکتورگیری و انواع اتحادها بیان کرد. بر خلاف انتظار، برخی از این مطالب در کتاب‌های رشته تجربی به شیوه‌ای بهتر بیان شده است. شکل ۱۸ از صفحه ۱۳۱ کتاب ریاضی پایه یازدهم تجربی آورده شده است.

شکل ۱۸: صفحه ۱۳۱ کتاب ریاضی پایه یازدهم تجربی

به طور کلی اگر $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ یک تابع گویا باشد که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای

هستند، برای محاسبه حد $f(x)$ در نقطه‌ای مانند a کافی است که حد $P(x)$ را بر

حد $Q(x)$ در آن نقطه تقسیم کنیم؛ به شرط آنکه $\lim_{x \rightarrow a} Q(x) \neq 0$

اگر در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای‌اند، داشته باشیم:

$P(a) = Q(a) = 0$ دیگر با قانون اخیر نمی‌توان حد را محاسبه کرد. در این حالت

به روش زیر عمل می‌کنیم:

چون $P(a) = Q(a) = 0$ بنابراین $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x - a$ بخش پذیرند. ابتدا

عبارت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را با تقسیم $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x - a$ ساده می‌کنیم و سپس

امکان استفاده از قانون تقسیم حدها را بررسی می‌کنیم.

نکته بسیار جالب توجه دیگر اینکه در پاورقی صفحه ۱۴۱ کتاب حسابان پایه یازدهم رشته ریاضی (شکل ۱۹) اشاره شده است که در این کتاب تنها حد آن دسته از کسرهایی مورد بررسی قرار می‌گیرند که صورت و مخرج آنها چند جمله‌ای‌های از حداکثر درجه دو و یا عبارت رادیکالی به صورت $\sqrt{ax+b}$ باشند.

شکل ۱۹: پاورقی صفحه ۱۴۱

۱. در این کتاب، حد کسرهایی مورد بررسی قرار می‌گیرند که صورت و مخرج آنها چند جمله‌ای‌های حداکثر از درجه ۲ و عبارات رادیکالی به صورت $\sqrt{ax+b}$ باشند. همچنین، در عبارات شامل توابع مثلثاتی، توان تابع سینوس و کسینوس حداکثر ۲ و کمان آنها به صورت $x+b$ یا $2x+b$ خواهند بود.

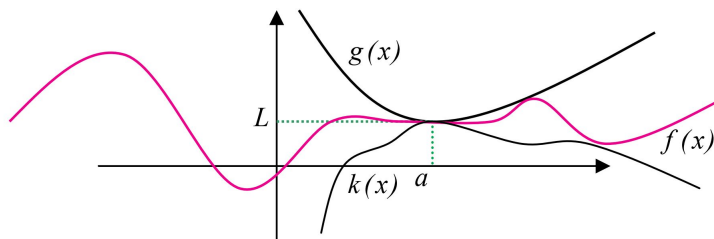
در حالی که در کتاب ریاضی پایه یازدهم رشته تجربی، حد کسرها در حالت بسیار کلی‌تر و با تنوع بیشتر مانند کسرهایی شامل چند جمله‌ای‌های درجه سوم وجود دارد. حتی در زمینه حد توابع مثلثاتی نیز کتاب ریاضی پایه یازدهم رشته تجربی بر خلاف انتظار شامل مثال‌های بسیار متنوع تری از کتاب‌های حسابان رشته ریاضی است!

مطلب بعدی حذف قضیه فشردگی از کتاب است. در کتاب حسابان سال سوم چاپ ۱۳۹۲، این قضیه بیان شده بود (شکل ۲۰).

شکل ۲۰: قضیه فشردگی - صفحه ۱۳۲ کتاب حسابان سال سوم دوره متوسطه قدیم

قضیه:

اگر تابعی مانند $f(x)$ در یک همسایگی محذوف نقطه‌ای مانند a بین دو تابع $g(x)$ و $k(x)$ قرار گیرد، مثلاً $k(x) \leq f(x) \leq g(x)$ ، و g و k در نقطه a دارای حد یکسان L باشند، نتیجه می‌شود $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.



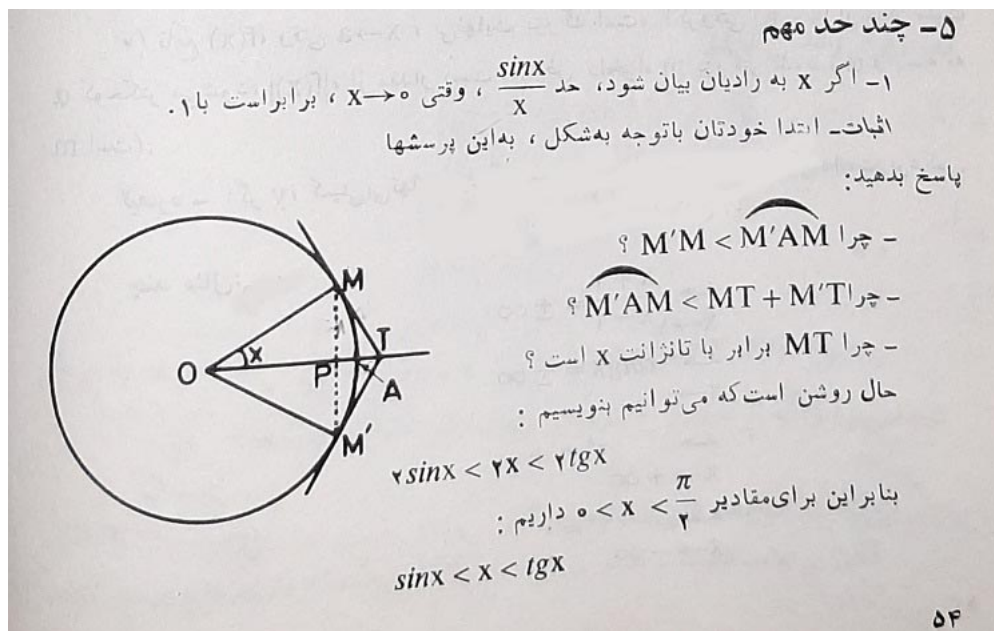
با حذف این قضیه، حد تابعی مانند $\frac{\sin x}{x}$ در نقطه صفر، برای دانش آموز رشته ریاضی تنها با کمک نمودار و جدول مقادیر بیان شده است.

باید یادآوری کنیم که در کتاب “حساب و جبر” سال سوم متوسطه سال‌های دور، علاوه بر همه موارد ذکر شده بالا، بخشی با عنوان “چند حد مهم” وجود داشت که در آن حد توابعی مانند $\frac{\sin x}{x}$ و $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ به تفصیل

مورد بررسی قرار گرفته‌اند (شکل ۲۱). همچنین، حدودی مانند $\frac{f(x)}{g(x)}$ در حالت‌های ابهام $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ معرفی شده و مثال‌هایی داده شده‌اند.

برای یادآوری، حد تابع $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ در کتاب مبانی آنالیز دوره کارشناسی رشته ریاضی به کمک سری‌ها برای دانشجویان بیان می‌شود.

شکل ۲۱: معرفی حدود مهم در کتاب “حساب و جبر” سال سوم متوسطه سال‌های دور



باید اشاره کرد که در کتاب حاضر همانند کتاب حسابان سال سوم چاپ ۱۳۹۲، حدود بینهایت و حد در بینهایت گنجانده نشده‌اند و بررسی آنها به سال چهارم متوسطه موکول شده است. اما در کتاب “حساب و جبر” سال سوم متوسطه سال‌های دور، این حدود نیز معرفی شده بودند و مثال‌های متنوعی از آنها داده شده بود (شکل ۲۲ را ببینید).

شکل ۲۲: حدود بینهایت در کتاب "حساب و جبر" سال سوم متوسطه سالهای دور

۴ - توابعی که در حد به صورتهای $\frac{\infty}{\infty}$ و $\infty - \infty$ بیرون می آیند .

مثال ۱ - مطلوب است $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (3x^2 - 4x + 5)$ حد

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (3x^2 - 4x + 5) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x^2 \left(3 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x^2 = +\infty$

به این ترتیب ، می توان نتیجه گرفت که وقتی در چند جمله ای $f(x)$ ، مقدار x لحاظ قدر مطلق به سمت بی نهایت میل کند ، حد $f(x)$ برابر است با حد جمله بادرجه بزرگتر

مثال ۲ - مطلوب است $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{2-x})$ حد

جمله بادرجه بزرگتر در این عبارت ، همان $2x$ است (جمله بعدی از درجه $\frac{1}{2}$ است) بنا بر این داریم :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{2-x}) = -\infty$

مثال ۳ - مطلوب است $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 4x - 1}$ حد

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 4x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} \right)} =$

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}} = 2$

یعنی وقتی در تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ ، صورت و مخرج هم درجه باشند ، حد کسر ، وقتی $x \rightarrow \pm \infty$ ، برابر است با نسبت ضریب جمله بزرگترین درجه صورت بر ضریب بزرگترین درجه مخرج .

مثال ۴ - مطلوب است $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x}}{3x + \sqrt{3x-2}}$ حد

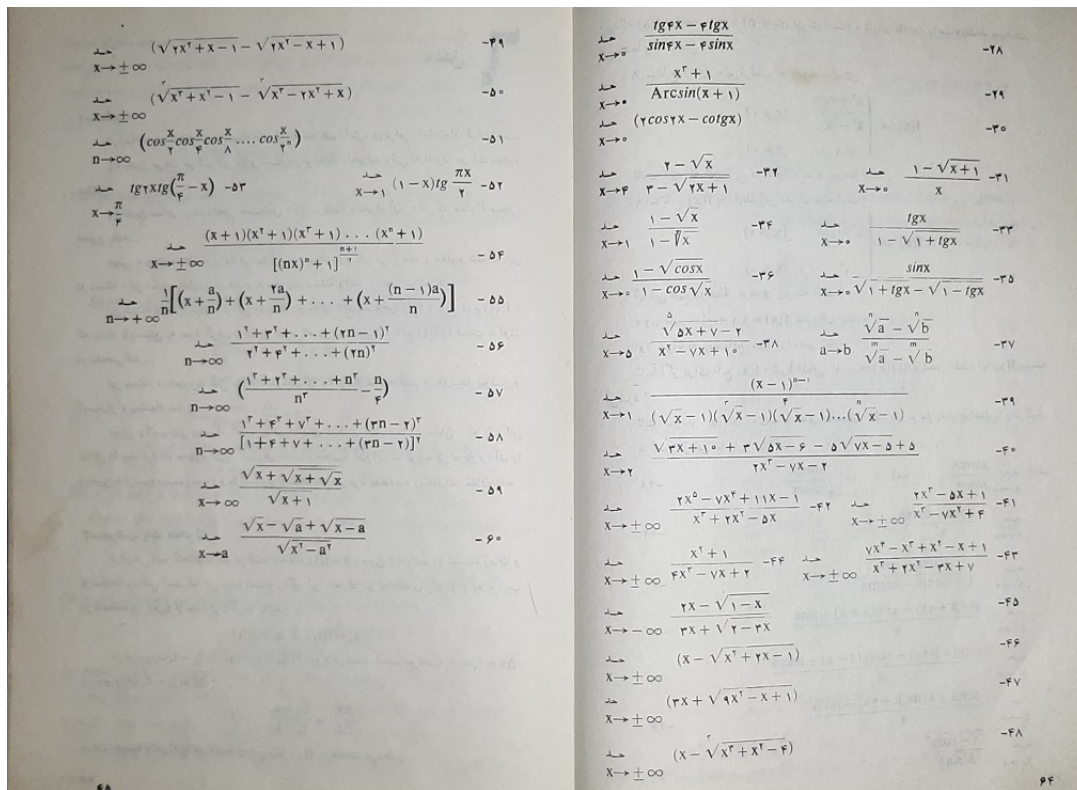
جواب : $\frac{2}{3}$ (چرا ؟)

مثال ۵ - مطلوب است $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{3x^2 + x})$ حد

در اینجا ، جمله x و جمله $-\sqrt{3x^2 + x}$ ، هردو از درجه اولند ، ولی ضریب جمله دوم از لحاظ قدر مطلق بزرگتر است (ضریب x مساوی ۱ و ضریب همین x در جمله $-\sqrt{3x^2 + x}$ از لحاظ قدر مطلق مساوی $\sqrt{3}$ است) . بنا بر این داریم :

در مورد تمرین ها نیز باید گفت اگر مسیری تاریخی برای کتاب های دوره متوسطه رشته ریاضی در نظر بگیریم، با هر بار ویرایش جدید، تعداد تمرین های هر فصل و تنوع آنها کمتر شده است. مبحث حد نیز از این قاعده

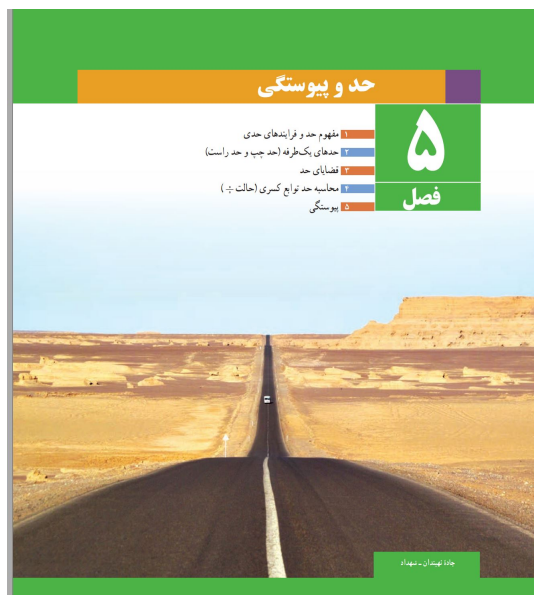
شکل ۲۳: تمرین‌های محاسبه حد در کتاب “حساب و جبر” سال سوم متوسطه سال‌های دور



مستثنی نبوده است. در توضیح همین بس که کتاب “حساب و جبر” سال سوم دوره متوسطه سال‌های دور در فصل حد علاوه بر مثال‌های متعدد، شامل ۶۰ تمرین محاسبه حد توابع متنوع است (شکل ۲۳ را ببینید). کتاب ویرایش حاضر در مبحث حد نیز با وجود برخی کاستی‌ها، تفکیک مناسبی برای محتوای خود اتخاذ کرده است. محتوای مربوط به حد در این کتاب هر چند بسیار خلاصه و اندک است، با این حال خود به چند قسمت کوچک‌تر شامل “مفهوم حد و فرآیندهای حدی، حدود چپ و راست، قضایای حد و محاسبه حد توابع کسری” تقسیم شده‌اند (شکل ۲۴) تا خواننده بتواند روندی روشن از موضوع را دنبال کند.

۵.۲ پیوستگی قبل از اینکه به بررسی مبحث “پیوستگی” در این کتاب بپردازیم، چند نکته کلی در این خصوص قابل بیان است که تصویر روشنی از آنچه رخ داده نشان دهد. نکته بسیار قابل تأمل این است که درس پنجم از فصل پنجم در این کتاب، تنها جایی است که به مبحث پیوستگی توابع اختصاص داده شده است. به عبارت دیگر، از آنجایی که در کتاب حسابان ۲ پایه دوازدهم نیز هیچ محتوایی از مبحث پیوستگی به طور مستقیم گنجانده نشده است، تنها صفحاتی که دانش آموز رشته ریاضی و فیزیک در مورد مبحث مهم پیوستگی مطلبی را فرا می‌گیرد، همین ۶ صفحه مطلبی است که در این درس آورده شده است. می‌توان تصور کرد که چه اتفاقی قرار است رخ دهد. دقت کنید که در این ۶ صفحه، هیچ اشاره‌ای به قضایای مربوط به پیوستگی توابع

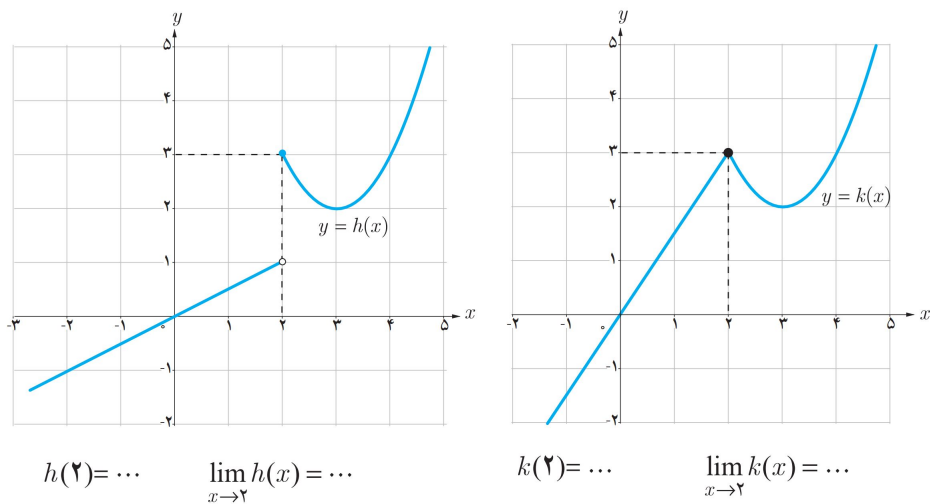
شکل ۲۴: فصل پنجم کتاب حسابان یک پایه یازدهم در مورد حد



نشده است و بنابراین دانش آموز تنها حقایقی که در مورد پیوستگی فرامی‌گیرد، همان مثال‌هایی است که در این صفحات آورده شده است.

در ادامه به بررسی این درس به طور مفصل می‌پردازیم. اولین فعالیت در این درس، تا حدی به دانش آموز کمک می‌کند درکی هندسی از مفهوم پیوستگی پیدا کند:

شکل ۲۵: فعالیت صفحه ۱۴۶



پس از بیان شرایط پیوستگی در صفحه ۱۴۶ (شکل ۲۶)، چند تابع به عنوان مثال آورده شده است که پیوستگی این توابع با توجه به حد آنها از درس‌های قبل نتیجه می‌شود.

شکل ۲۶: مثال صفحه ۱۴۶

❁ **مثال:** در بخش‌های قبل دیدیم که در هر نقطه a ، $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$ و $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$. پس توابع $y = \sin x$ و $y = \sqrt[n]{x}$ در هر عدد a ، پیوسته‌اند.

در کار در کلاس صفحه ۱۴۷ (شکل ۲۷)، دانش آموز تمرین می‌کند که ناپیوستگی تابع در یک نقطه می‌تواند به واسطه چندین شرط بیان شده در تعریف پیوستگی رخ دهد. اما به نظر می‌رسد قبل از کار در کلاس، باید مثال‌هایی آورده شود که در آنها ناپیوستگی توابع به دلیل برقرار نبودن شرط‌های مختلف بررسی شود. چند مثال مانند توابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ و $g(x) = [x]$ در صفحه ۱۴۶ آورده شده است که در آنها دلیل ناپیوستگی بیان نشده است و صرفاً بر اساس نمودار بیان می‌کند که تابع در نقطه داده شده ناپیوسته است.

شکل ۲۷: کار در کلاس صفحه ۱۴۷

کار در کلاس

- ۱ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه ۳ تعریف نشده باشد اما حد تابع در $x=3$ وجود داشته باشد. (توجه کنید که این تابع در $x=3$ پیوسته نیست)
- ۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد و حد تابع هم در نقطه a موجود باشد اما با مقدار تابع در a برابر نباشد. (توجه کنید که این تابع در a پیوسته نیست).
- ۳ نمودار تابعی را رسم کنید که در هر عدد حقیقی پیوسته باشد.
- ۴ نمودار تابعی را رسم کنید که همه جا پیوسته باشد به جز در دو نقطه.

پیشنهاد می‌شود پس از کار در کلاس صفحه ۱۴۹، پیوستگی تابع جز صحیح در یک یا چند جمله به صورت کلی و شفاف بیان شود: ”تابع $f(x) = [x]$ در هر عدد صحیح ناپیوسته است. در حقیقت، تابع $f(x) = [x]$ در هر عدد صحیح از راست پیوسته است. در بقیه اعداد حقیقی، این تابع پیوسته است.“

با توجه به آنچه دانش آموز از درس‌های قبل در مورد حد برخی توابع فراگرفته است، پیشنهاد می‌شود پیوستگی برخی توابع پرکاربرد و مشهور به صورت یک حقیقت کلی و نه در قالب مثال بیان شود. از طرفی، تقریباً تمامی قضیه‌های این کتاب بدون برهان آورده شده‌اند. بنابراین می‌توان پیوستگی این توابع را نیز در قالب یک قضیه آورد:

قضیه ۱۰۲. با توجه به آنچه در مورد حد توابع در بخش‌های قبلی خواندیم،

(۱) توابع $\sin x$ و $\cos x$ در هر نقطه مانند a پیوسته هستند.

(۲) هر چند جمله‌ای در هر عدد حقیقی مانند a پیوسته است.

علاوه بر آن، از آنجایی که این درس تنها بخشی است که به مفهوم پیوستگی پرداخته شده است، پیشنهاد می‌شود چند مطلب به این درس اضافه گردد. ابتدا چند قضیه درباره پیوستگی توابع که به موازات قضایای حد در درس‌های قبلی پیش می‌رود:

قضیه پیشنهادی ۱۰۲. اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه a پیوسته باشند، آنگاه

(۱) توابع $f(x) + g(x)$ و $f(x) - g(x)$ و $f(x)g(x)$ نیز در نقطه a پیوسته هستند.

(۲) تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ نیز در نقطه a پیوسته است به شرط اینکه $g(a) \neq 0$.

توابع $f(x) = 2 \sin x - 4 \cos x$ و $g(x) = x^2 \sin x$ در هر عدد حقیقی a پیوسته هستند.

از دو قضیه قبل در می‌یابیم که هر تابع گویا به صورت $\frac{p(x)}{q(x)}$ (تابعی که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای هستند) در همه نقاط حقیقی به جز در ریشه‌های مخرج کسر، پیوسته است.

تابع $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-4}$ به جز در دو نقطه ۲ و -۲، در همه نقاط حقیقی پیوسته است.

باید توجه کرد که قضایای پیشنهاد شده در بالا، به موازات قضایای مربوط به حد توابع که در درس‌های قبل این کتاب آورده شده‌اند، پیش می‌رود و دانش آموز تنها با درک مفهوم پیوستگی می‌تواند آنها را بلافاصله مورد استفاده قرار دهد و مثال‌های بسیار فراوانی از توابع پیوسته را فراگیرد. به عنوان مثال، قضیه صفحه ۱۳۶ در مورد حد توابع رادیکالی که در شکل ۲۸ آمده است را ببینید: با استفاده از این قضیه، می‌توان قضیه زیر در

شکل ۲۸: قضیه صفحه ۱۳۶

قضیه:

فرض کنید تابع f در نقطه a حد دارد.

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

اگر تابع f در یک همسایگی محذوف a نامنفی باشد آن‌گاه داریم:

به طور کلی، برای هر عدد طبیعی n ، اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی a تعریف شده باشد، آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

مورد پیوستگی اینگونه توابع را ارائه داد:

قضیه پیشنهادی ۲.۲. اگر تابع $f(x)$ در نقطه a پیوسته باشد، آنگاه

(۱) اگر n فرد باشد، آنگاه تابع $\sqrt[n]{f(x)}$ نیز در نقطه a پیوسته است.

(۲) اگر n زوج باشد و تابع $f(x)$ نامنفی باشد، آنگاه تابع $\sqrt[n]{f(x)}$ نیز در نقطه a پیوسته است

نکته دیگر در مورد ضرورت آوردن قضایای پیشنهادی فوق این است حل برخی تمرین‌های این درس نیز مستلزم استفاده از این قضایا است. به عنوان مثال تمرین ۱ قسمت پ و تمرین ۲ قسمت ت در صفحه ۱۵۱ را ببینید.

۳. کتاب حسابان دو، پایه دوازدهم

قسمتی عمده این کتاب را مفاهیم آنالیزی تشکیل می‌دهند. به جز دو فصل اول و دوم این کتاب که به طور مختصر شامل دروسی در مورد توابع و مثلثات است، سه فصل بعدی به مباحث حد، مشتق و کاربردهای مشتق اختصاص یافته است. نکته بسیار مهم در مورد این کتاب این است که هیچ درسی به موضوع پیوستگی اختصاص داده نشده است. این در حالی است که در کتاب حسابان یک پایه یازدهم نیز مبحث پیوستگی به صورت بسیار خلاصه و بدون آوردن هیچ قضیه و حقیقت کلی در مورد پیوستگی توابع آورده شده است.

۱.۳. حدهای نامتناهی قبل از بررسی این بخش از کتاب، نکاتی کلی در مورد محتوای کتاب‌های مختلف در این خصوص بیان می‌کنیم. ویرایش حاضر کتاب‌های متوسطه رشته ریاضی و فیزیک، به مانند کتاب حسابان چاپ سال ۱۳۹۲ و کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال چاپ ۱۳۹۴، مبحث ”حد در بینهایت و حدود نامتناهی“ را به سال دوازدهم منتقل کرده است. گرچه مفاهیم مربوط به این حدود در کتاب ”حساب دیفرانسیل و انتگرال“ چاپ سال ۱۳۹۴ بسیار کامل‌تر می‌باشد و در حین بررسی این فصل در مقاطع مختلف این موضوع به چشم می‌آید، اما این مباحث در سال‌های دور در کتاب‌های سال سوم دوره متوسطه گنجانده شده بود (شکل ۲۹ را ببینید).

در ادامه به بررسی این فصل کتاب می‌پردازیم.

فصل سوم کتاب حسابان دو با یک فعالیت آغاز می‌شود که برای معرفی حدود نامتناهی، حد تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نقطه صفر به کمک نمودار و جدول مقادیر بررسی می‌کند. توضیحات این فعالیت در مورد حد بینهایت این تابع استاندارد است (شکل ۳۰).

شکل ۲۹: فهرست کتاب "حساب و جبر" سال سوم متوسطه سال‌های دور

به نام خدا	
فهرست	
فصل ۱ - عدد	۳
مقدمه (۳) - مفهوم عدد (۶) - نیاذهای اساسی در ریاضیات (۷) - حلقه و میدان زیرمجموعه‌های R (۱۵) -	
میدانهای مرتب (۱۱) - فاصله‌های عددی (۱۲) - قدرمطلق (۱۵)	
فصل ۲ - چند جمله‌ایها	۱۹
یادآوری (۱۹) - تبدیل اتحادی چند جمله‌ایها (۲۵) - درجه یک چند جمله‌ای (۲۲) - دوچند جمله‌ای قرینه (۲۲) - حلقه چند جمله‌ایها (۲۲) - محاسبه باقیمانده و خارج قسمت یک چند جمله‌ای بر $(x-a)$ (۲۲) - بسط دوچند جمله‌ای نون (۲۵)	
فصل ۳ - تابع	۳۲
مفهوم کلی تابع (۳۲) - عبارتهای تحلیلی (۳۳) - تابعیاتی مقدنایی (۳۵) - انواع تابع (۳۶)	
فصل ۴ - بررسی تغییرات تابع	۴۱
صعودی و نزولی بودن تابع (۴۱) - نمودار و نمودار تابع (۴۲) - اکسترمم یک تابع (۴۳) - بررسی تغییرات یک تابع (۴۴)	
فصل ۵ - مفهوم حد و پیوستگی	۵۵
حد رشته (۵۵) - حد تابع (۵۱) - نیاذهای کوچک و نیاذهای بزرگ (۵۲) - حد قسبه (۵۴) - چند حد مهم (۵۴) - پیوستگی تابع در یک نقطه (۶۵)	
فصل ۶ - مشتق	۶۶
مقدمه (۶۶) - سرعت یک متحرک (۶۶) - مشتق یک تابع (۶۷) - دستورهایی برای مشتق به محاسبه مشتق (۶۸)	
فصل ۷ - کاربرد مشتق	۷۷
ضرب زاویه مماس بر منحنی - تغییر هندسی مشتق (۷۷) - شرط بخش پذیری چند جمله‌ای $P(x)$ بر $(x-a)^n$ (۷۹) - قاعده هویتنال (۸۱) - صعود و نزول یک تابع - ماکزیمم و مینیمم نسبی (۸۲) - قعر و لحد منحنی؛ کشتانظاف (۸۳)	
فصل ۸ - منحنی نمایش تغییرات تابعها	۸۸
بررسی تغییرات تابع $y = ax^2 + bx + c$ (۸۸) - تابع چند جمله‌ای درجه سوم (۹۲) - تابع کتری به صورت $y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$ (۹۵) - تابع نمایی (۱۵۵) - تابع لگاریتمی (۱۵۱) - بررسی معادله‌ها به کمک رسم منحنی (۱۵۲)	

شکل ۳۰: فعالیت صفحه ۴۷

با توجه به این فعالیت مشاهده می‌شود که وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود مقادیر $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی افزایش می‌یابد. به بیان دیگر می‌توان $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواهی، بزرگ‌تر کرد به شرطی که x را به اندازه کافی با مقادیر بزرگ‌تر از صفر، به صفر نزدیک کرد در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = +\infty$$

در صفحه ۴۸ مطلبی آورده شده است که از نظر ریاضی صحیح نیست و دانش آموز را در مورد وجود و عدم وجود حد گمراه می‌کند:

شکل ۳۱: تذکر صفحه ۴۸

❁ **تذکر:** این نماد نشان می‌دهد که حد فوق موجود نیست. چون مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک نمی‌شود و مثبت بی‌نهایت فقط یک نماد است که نشان می‌دهد مقدار تابع از هر عدد مثبتی می‌تواند بزرگ‌تر باشد.

در واقع جمله آورده شده در شکل ۳۱ نادرست است. زیرا حدهای بینهایت وجود دارند ولی مقدار این حدها عدد حقیقی نیست. دقت کنید که در انتهای صفحه ۵۰ کتاب مطلب درستی در مورد مفهوم بینهایت آمده است: ”در ریاضیات می‌گوییم بینهایت از هر مقدار دیگری بیشتر است.“ این مطلب کاملاً صحیح است. یعنی مثبت بینهایت عدد جدیدی است که آنرا با نماد $+\infty$ نمایش می‌دهند و از همه اعداد حقیقی بزرگتر است (ولی خود یک عدد حقیقی نیست). به همین صورت منفی بینهایت عددی است (که خود عددی حقیقی نیست) که آنرا با نماد $-\infty$ نمایش می‌دهند و از همه اعداد حقیقی کوچکتر است، [۱۲] را ببینید. باید دقت کرد که در آنالیز ریاضی، این یک قرارداد استاندارد است و دستگاه به وجود آمده از الحاق این دو عدد به اعداد حقیقی (یعنی $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) را دستگاه توسعه یافته اعداد حقیقی می‌نامند و گاهی به صورت $[-\infty, +\infty]$ نمایش می‌دهند.

در صفحه ۵۱ کتاب، برخی قضایا در مورد حدهای بینهایت آورده شده‌اند و همان‌گونه که در پاورقی این صفحه اشاره شده است، این قضیه‌ها بدون اثبات بیان شده‌اند.

پیشنهاد ما در این فصل، معرفی بهتر و بیشتر مثبت بینهایت و منفی بینهایت در شروع این فصل است. زیرا با این کار می‌توان به دانش آموز درک بسیار بهتری از حد بینهایت بخشید و علاوه بر آن، به جای آوردن قضایایی کاملاً انتزاعی و بدون هیچ‌گونه برهان، از خواص بینهایت‌ها استفاده کرد. به عبارت دیگر، دانش آموز می‌تواند کار با این دو عدد را همانند اعمال روی اعداد حقیقی فرا گرفته و تا انتها آسوده باشد. ضمن اینکه در دروس دوره دانشگاه (به عنوان مثال درس مبانی آنالیز ریاضی) نیز با این اعداد مواجه می‌شود. بیان چند قرارداد زیر در مورد اعمال روی بینهایت‌ها کمک می‌کند دانش آموز درک بهتری از قضایای آورده شده پیدا کند:

۱. برای هر عدد حقیقی مانند x داریم

$$-\infty < x < +\infty, \quad \text{و} \quad \frac{x}{+\infty} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{x}{-\infty} = 0.$$

۲. (مجموع و تفاضل) برای هر عدد حقیقی مانند x روابط زیر برقرار است:

$$x + \infty = +\infty, \quad x - \infty = -\infty, \quad +\infty - x = +\infty, \quad -\infty - x = -\infty$$

$$+\infty + \infty = +\infty, \quad -\infty - \infty = -\infty.$$

۳. (ضرب) اگر x یک عدد حقیقی مثبت باشد، آنگاه

$$x \times (-\infty) = -\infty, \quad x \times (+\infty) = +\infty;$$

و اگر x یک عدد حقیقی منفی باشد، آنگاه

$$x \times (-\infty) = +\infty, \quad x \times (+\infty) = -\infty.$$

با آوردن توضیحات بالا به عنوان معرفی بینهایت‌ها، به عنوان مثال قضایایی مانند قضیه ۴ و قضیه ۵ (شکل ۳۲) این درس به راحتی برای دانش آموز قابل استدلال است، زیرا از قضایای حد می‌تواند استفاده کند.

شکل ۳۲: قضیه ۵ صفحه ۵۴

❖ **قضیه ۵:** اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ آن‌گاه:

الف) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty$

ب) اگر $L > 0$ آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$

پ) اگر $L < 0$ آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty$

❖ **تذکر:** قضیه فوق برای حالتی که $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال چاپ سال ۱۳۹۴، تعریف حد با استفاده از دنباله‌ها بیان شده است (شکل ۳۳).

شکل ۳۳: تعریف صفحه ۷۱ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ ۱۳۹۴

تعریف: فرض کنیم D زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ و $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد، در این صورت، گوئیم حد تابع f در a ، عدد حقیقی L است و می‌نویسیم، $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه f مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست ($a_n \neq a$)، دنباله $\{f(a_n)\}$ به L همگرا باشد.

باید دقت کرد که در کتاب یاد شده، دنباله‌ها و همگرایی آنها در یک فصل مجزا بیان شده است و دانش آموز می‌تواند در درس‌های آینده از مفهوم دنباله به عنوان ابزاری قدرتمند استفاده کند. به همین ترتیب حدود بینهایت نیز به کمک دنباله‌ها تعریف شده‌اند.

شکل ۳۴: تعریف صفحه ۱۰۶ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ ۱۳۹۴

تعریف ۱: فرض کنیم تابع D زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ و $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد، در این صورت، گوئیم حد تابع f در a ، $+\infty$ است و می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ، هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه f مانند $\{x_n\}$ که همگرا به a است و $x_n \neq a$ ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty$

تعریف حد با استفاده از دنباله‌ها تعریفی جامع به نظر می‌رسد و باعث می‌شود دانش آموز بتواند برهانی برای قضیه‌ها بیابد و محاسبه حدود را به همراه اثبات آن فراگیرد. شکل ۳۵ را ببینید.

شکل ۳۵: مثال صفحه ۱۰۷ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ ۱۳۹۴

❖ مثال: به کمک تعریف (۲) ثابت کنید

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$$

✍ حل: برای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ که همگرا به ۲ است و $x_n \neq 2$ داریم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(x_n-2)^2} = -\infty$$

زیرا وقتی دنباله $\{x_n\}$ به ۲ همگرا باشد، دنباله $\{(x_n-2)^2\}$ با مقادیر مثبت به صفر همگراست بنابراین دنباله $\{f(x_n)\}$ به $-\infty$ واگراست.

اما در کتاب ویرایش حاضر، فصل مربوط به دنباله‌ها حذف شده است. از این رو، امکان استفاده از آنها در بررسی حد وجود ندارد.

در صفحه ۵۵، مجانب قائم توابع با آوردن مثالی معرفی شده است. سپس مثالی آورده شده است که شرایط مختلف وجود مجانب قائم با کمک نمودار نشان داده شده است.

مثال دیگری در صفحه ۵۶ وجود دارد (شکل ۳۶) که مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$ را بررسی می‌کند. اما این مثال به هیچ عنوان به دانش آموز برای درک راه حل یافتن مجانب قائم توابع کمکی نمی‌کند. زیرا در متن سوال، نقاط مورد بررسی برای وجود مجانب قائم آورده شده است. به عبارت دیگر، دانش آموز باید در حالت کلی بفهمد که این نقاط از کجا آمده‌اند. پیشنهاد ما این است که ابتدا مثالی ساده‌تر آورده شود که در آن به طور مشخص در حالت کلی روش یافتن مجانب قائم بیان شده باشد. به عنوان مثال: مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-4}$ را در صورت وجود بیابید.

با توجه به تعریف مجانب قائم، به دنبال نقطه‌هایی هستیم که حد تابع در آنها بینهایت شود. با توجه به قضیه ۳، برای یافتن این نقاط در توابع کسری باید نقاطی را بررسی کنیم که حد تابع مخرج در آن نقطه برابر صفر باشد. در تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-4}$ حد مخرج کسر یعنی $x-4$ در نقطه $x=4$ برابر صفر است. پس شرط مجانب قائم را برای این نقطه بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x+1}{x-4} = +\infty.$$

بنابراین $x=4$ مجانب قائم تابع است.

پیشنهاد می‌کنیم مثال صفحه ۵۶ نیز به همین ترتیب اصلاح شود و نقاط داده شده در متن سوال حذف شوند تا دانش آموز با راه حل بیان شده در مثال بالا، خود به دنبال یافتن نقاط احتمالی مورد بررسی باشد. بعلاوه، به نظر می‌رسد نگارش حل این مثال کمی گمراه کننده است:

شکل ۳۶: مثال صفحه ۵۶

❖ **مثال:** کدام یک از خطوط $x = -1$ و $x = 3$ مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ می‌باشند؟

حل: شرایط مجانب قائم را برای دو خط مذکور بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = -\infty$$

به علاوه از آنجا که $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ می‌توانیم بگوییم $x = -1$ نیز مجانب قائم منحنی تابع f است از طرفی

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

خط $x = 3$ شرایط مجانب قائم را ندارد. لذا منحنی تابع f فقط یک مجانب قائم به صورت $x = -1$ دارد.

به عبارت دقیق‌تر، جمله "به علاوه از آنجا که $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ " اضافی است و باید حذف شود. زیرا همین که $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$ کافی است که $x = -1$ را یک مجانب قائم در نظر بگیریم. نکته مشابهی در مورد مثال ابتدایی صفحه ۵۷ (شکل ۳۷) وجود دارد. دقت کنید که دانش آموز نمی‌داند

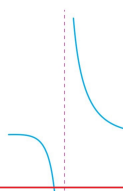
شکل ۳۷: مثال صفحه ۵۷

❖ **مثال:** نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x+1}{x^3+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می‌باشد؟

$$f(x) = \frac{x+1}{x(x^2+1)}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$



پس خط $x = 0$ مجانب قائم منحنی تابع است و در مجاورت این خط نمودار تابع به صورت روبه‌رو خواهد بود.

چرا حد تابع در نقطه صفر بررسی شده است.

کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ سال ۱۳۹۴، فقط شامل یک مثال در موضوع مجانب قائم در صفحه ۱۱۰ کتاب است که از این جهت کتاب ویرایش جدید کمی با تفصیل بیشتر کار کرده است. در همان صفحه، سوالی آورده شده است (شکل ۳۸) که علاوه بر اینکه دانش آموز یافتن مجانب قائم را تمرین می‌کند، با حد مجموع دوتابع روبرو می‌شود که یکی از آنها حد بینهایت دارد و دیگری حد ندارد.

شکل ۳۸: تمرین صفحه ۱۱۰ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ سال ۱۳۹۴



۱- مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ را در صورت وجود به دست آورید.

گذشته از تمرین یافتن مجانب قائم، این سوال مزیت دیگری نیز دارد. دانش آموز با حد تابعی $f + g$ روبرو می‌شود که f در نقطه دارای حد بینهایت است و تابع g حد ندارد. در این گونه موارد دانش آموز باید بداند که از قضیه ۵ در محاسبه حد مجموع نمی‌تواند استفاده کند.

۲.۳ حد در بینهایت مطابق معمول، معرفی حد توابع در بینهایت نیز با بررسی رفتار یک تابع با استفاده از نمودار و جدول مقادیر صورت گرفته است. توضیحات صفحه ۶۳ کتاب به خوبی به دانش آموز کمک می‌کند تا بفهمد که برخی توابع با بزرگ شدن (یا کوچک شدن) مقادیر x ، مقادیر تابع $f(x)$ افزایش می‌یابد.

پس از آوردن چند مثال در صفحه ۶۵، گزاره‌ای کلی در مورد حد چندجمله‌ای‌ها در بینهایت (شکل ۳۹) بیان شده است که بسیار مفید است و یکی از نقاط مثبت کتاب حاضر در این درس می‌باشد.

شکل ۳۹: صفحه ۶۵

به‌طور کلی حد هر چند جمله‌ای به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ در $\pm\infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

همان‌گونه که در کار در کلاس صفحه ۶۶ (شکل ۴۰) آمده است، نکته قبل در محاسبه حد توابع کسری در بینهایت مورد استفاده قرار می‌گیرد. چند سوال آمده در این کار در کلاس سبب می‌شود دانش آموز به خوبی این مطلب را فرا بگیرد. باید گفت که در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ سال ۱۳۹۴، به جای مطلب فوق با حل دو مثال توضیح داده شده است. از این رو، کتاب حاضر با آوردن مطلبی جامع‌تر در مورد چندجمله‌ای‌ها، بیان بهتری ارائه کرده است.

اما باید تاکید کنیم با این که قضایای صفحه ۶۵ برای حدود نامتناهی در بینهایت (بدون اثبات) بیان شده است و محدود مثال‌هایی نیز آورده شده است، کتاب در شرح و توضیح این حدود بسیار ضعیف عمل کرده است. برای درک بهتر موضوع، به آوردن چند مثال زیبا از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ سال ۱۳۹۴ بسنده می‌کنیم. این مثال‌ها (شکل ۴۱ و ۴۲) به دانش آموز گوشزد می‌کند که هنگام استفاده از قضایا باید دقت کرد که شرایط کاملاً برقرار باشد.

شکل ۴۰: کار در کلاس صفحه ۶۶

کار در کلاس

۱ الف) اگر $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ و $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ دو چند جمله‌ای باشند نشان دهید.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

شکل ۴۱: مثال صفحه ۱۱۶ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ ۱۳۹۴

❖ مثال: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ را محاسبه کنید.

حل: 

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right) = +\infty \end{aligned}$$

شکل ۴۲: مثال صفحه ۱۱۶ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ ۱۳۹۴

تذکر مهم: همواره نمی‌توان از قاعده‌های حدگیری برای حدهای نامتناهی استفاده کرد. زیرا $+\infty$ و $-\infty$ عدد نیستند.

مثلاً نوشتن اینکه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty - \infty$$

غلط است ($+\infty - \infty$) را نمی‌توان تعریف کرد) با این وجود، می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x^2 - 1) = +\infty$$

دقت کنید که هیچ گونه مثالی این چنین برای محاسبه حد در بینهایت عبارات کسری در کتاب نیامده است. علاوه بر این، در مورد محاسبه حد در بینهایت توابع رادیکالی هیچ گونه مثال و یا مطلبی نیامده است. در پاورقی صفحه ۵۴ ذکر شده است که در محاسبه حدود در این کتاب، حالات $0 \times \infty$ و $\infty - \infty$ مورد بررسی قرار نمی‌گیرند. بنابراین به طور مشخص، برخی از سوالات تمرین شماره ۳ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ ۱۳۹۴ در اهداف کتاب حاضر قرار نمی‌گیرند.

تمرین‌های این بخش نیز از نظر تعداد و تنوع بسیار محدود است. با این حال، تمرین یافتن مجانب‌های افقی و قائم یک تابع به طور همزمان نکته مثبت تمرین‌های کتاب حاضر است که در کار در کلاس صفحه ۶۸ و تمرین شماره ۴ در صفحه ۶۹ (شکل ۴۳) آمده است.

شکل ۴۳: تمرین شماره ۴ صفحه ۶۹

۴) مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید:

الف) $y = \frac{2x-1}{x-3}$

ب) $y = \frac{x}{x^2-4}$

پ) $y = \frac{1+2x^2}{1-x^2}$

ت) $y = \frac{2x}{1+x^2}$

باید اشاره کنیم که با وجود نمودار تابع در تمرین شماره ۲ صفحه ۶۹ (شکل ۴۴)، محاسبه حدهای خواسته شده به نظر بسیار ابتدایی باشد و هدف خاصی را محقق نکند.

شکل ۴۴: تمرین شماره ۲ صفحه ۶۹

۲) برای تابع f که نمودار آن داده شده است موارد زیر را به دست آورید:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

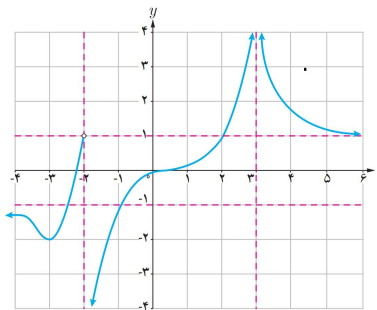
ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$

ث) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) =$

ج) مجانب‌های افقی و قائم



نکته دیگر این است که با نگاهی به کتاب ریاضی ۳ پایه دوازدهم رشته تجربی در می‌یابیم که نه تنها تفاوتی از لحاظ محتوا و عمق مطالب دیده نمی‌شود، چه بسا در برخی موارد تنوع مثال‌ها و تمرین‌ها در کمال تعجب در رشته تجربی بیشتر است! تمرین‌های کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ ۱۳۹۴ از نظر تعداد بسیار بیشتر بوده و دارای تنوع است، تمرین‌های محاسبه حدود شامل توابع رادیکالی، جزء صحیح و توابع مثلثاتی. به عنوان نمونه، تمرین سوم از صفحه ۱۲۰ این کتاب را که در مورد حد در بینهایت است (شکل ۴۵) ببینید.

موضوع دیگر حذف مبحث مجانب مایل است. مفهوم مجانب مایل که ابزار مفیدی برای درک رفتار برخی توابع در بینهایت است و در رسم نمودار توابع کاربرد دارد، در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ ۱۳۹۴، به عنوان موضوعی فرعی در بخش حد در بینهایت آورده شده است. اضافه بر این باید اشاره کنیم که در کتاب ”جبر و آنالیز“ سال چهارم متوسطه چاپ ۱۳۶۰، موضوع مجانب مایل حتی از این هم وسیع‌تر بررسی شده است. این کتاب، یک فصل کامل را به بررسی خطوط مجانب (عمودی، افقی و مایل) اختصاص داده و در پایان فصل ۳۷ تمرین متنوع در این خصوص دارد. موضوع

شکل ۴۵: تمرین ۳ صفحه ۱۲۰ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ ۱۳۹۴

۳- حدود زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-3}$	(ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+5x-1}{2x^2-1}$
(پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x^2+3x-1}$	(ت) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2+2x})$
(ث) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2-3x})$	(ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2+x+1}{x^2+x+3} \right]$
(ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \tan^{-1} x}{2-x}$	(ح) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{8x^3+2x^2-2x})$
(خ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+3}}$	(د) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$

مجانم مایل از کتاب حاضر حذف شده است. دیدگاه نگارندگان این پژوهش این است که حذف این موضوع خللی به روند مطالب کتاب وارد نیاورده است.

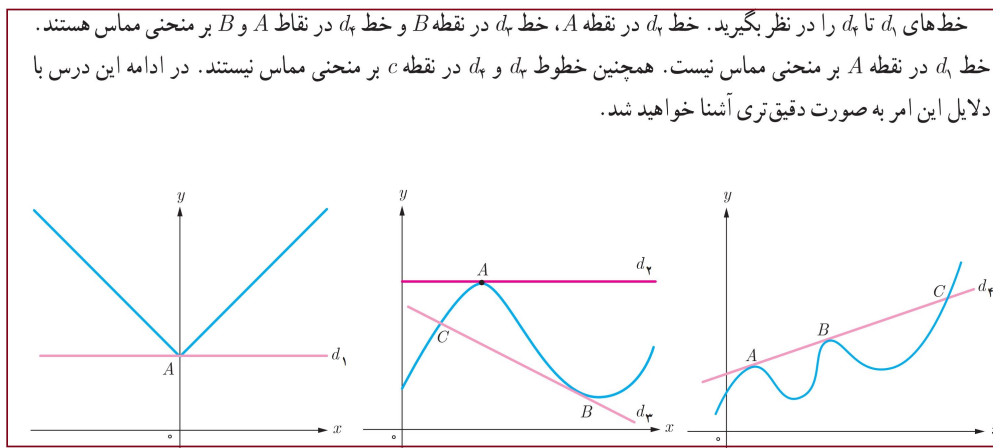
۳.۳ مشتق این فصل از کتاب سه درس دارد که در آنها ضمن معرفی مفهوم مشتق، به بیان رابطه مشتق پذیری و پیوستگی توابع و همچنین محاسبه مشتق توابع پرداخته می شود. اولین مطلب کلی که در بررسی این فصل به سرعت نمایان می شود، تغییرات زیاد ویرایش جدید نسبت به کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ ۱۳۹۴ است. متأسفانه باید گفت که در این فصل نیز برخی از این تغییرات سبب کاهش کیفیت محتوا شده است. در هر درس به تفصیل این ادعا را توضیح خواهیم داد. نکته دوم این که با مقایسه سریع کتاب حاضر با کتاب ریاضی ۳ رشته علوم تجربی می توان دریافت که محتوای این فصل تقریباً در دو کتاب یکسان است. بر خلاف اینکه انتظار می رود دانش آموز رشته ریاضی محتوای عمیق تر و جنبه های متنوع تری از درس را فراگیرد.

موضوع بسیار تامل برانگیز، حذف برخی از اساسی ترین مطالب ریاضی برای یک دانش آموز رشته ریاضی است. گرچه در ادامه به تفصیل به بررسی این فصل خواهیم پرداخت، ابتدا دقت کنید که موضوعات مشتق ضمنی، مشتق توابع وارون مثلثاتی و مشتق توابع نمایی و لگاریتمی از کتاب حاضر حذف شده است. برخی از این مفاهیم را می توان با برنامه ریزی مناسب در ریاضیات عمومی دوره کارشناسی پوشش داد. اما نکته مهم این است که محتوای دروس ریاضیات عمومی دوره کارشناسی تغییری نکرده است.

۴.۳ آشنایی با مفهوم مشتق در کتاب حاضر مبحث مشتق با توضیحاتی در مورد خط مماس بر یک منحنی و شیب آن آغاز شده است. گرچه این فرآیند برای معرفی مفهوم مشتق استاندارد است، اما باید گفت توضیحات آورده شده در کتاب حاضر بسیار طولانی (از صفحه ۷۲ تا صفحه ۷۷) و کسل کننده است. علاوه بر آن، روند

بیان مطالب به هیچ عنوان روشن نبوده و به نظر نمی‌رسد دانش آموزی که قرار است برای اولین بار با مفهوم مشتق روبرو شود، بتواند با این روند ارتباط برقرار کند. توضیح اینکه در اولین درس از این فصل، ابتدا سخن از شیب خط آورده شده، بدون اینکه رابطه یافتن شیب خط بیان شود. البته می‌دانیم که دانش آموز از سال‌های قبل با مفهوم شیب خط آشنایی دارد، اما این رابطه چند صفحه جلوتر هم بیان شده است. در ادامه دانش آموز مطالبی در مورد خط مماس می‌خواند و بدون اینکه بتواند دلیلی بیابد، با چند نمودار روبرو می‌شود که مثال‌هایی از خط مماس و غیرمماس آمده است.

شکل ۴۶: صفحه ۷۳



در ادامه، معرفی خط مماس بر یک منحنی با استفاده از تقریب آن بوسیله خطوط متقاطع در صفحات ۷۴ تا ۷۷ آمده است. تاکید می‌کنیم در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ سال ۱۳۹۴، معرفی خط مماس و شیب آن بسیار مختصر در صفحات ۱۲۱ و ۱۲۲ بیان شده است و به نظر می‌رسد بیان آن بسیار روشن‌تر بوده و برای فهم مطلب مفیدتر باشد. با این حال دلیل تغییر این بخش در ویرایش جدید مشخص نیست. در ویرایش قبلی، بعد از توضیحاتی در مورد خطوط قاطع، خط مماس به طور صریح تعریف می‌شود (شکل ۴۷).

شکل ۴۷: تعریف صفحه ۱۲۴ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ ۱۳۹۴

تعریف خط مماس: اگر f بر بازه‌ی بازی شامل a تعریف شده و حد زیر

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = m$$

موجود باشد، آنگاه خطی که از نقطه $(a, f(a))$ گذشته و به شیب m می‌باشد، خط مماس بر نمودار f در نقطه $(a, f(a))$ نامیده می‌شود.

مشکل مشابهی در بیان رابطه دیگر محاسبه مشتق دیده می‌شود. در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی سال ۱۳۹۴، با یک تغییر متغیر ساده بلافاصله رابطه دیگر یافتن مشتق تابع بیان می‌شود (شکل ۴۸).

شکل ۴۸: تعریف صفحه ۱۲۴ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ ۱۳۹۴

تعریف: فرض کنید a نقطه درونی از دامنه f است. در این صورت مشتق تابع f در $x=a$ که آن را به $f'(a)$ نشان می‌دهیم، برابر است با

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

اگر فرض کنیم $x = a + \Delta x$ آنگاه $\Delta x = x - a$

بدیهی است که وقتی Δx به صفر میل کند، x هم به a میل می‌کند.

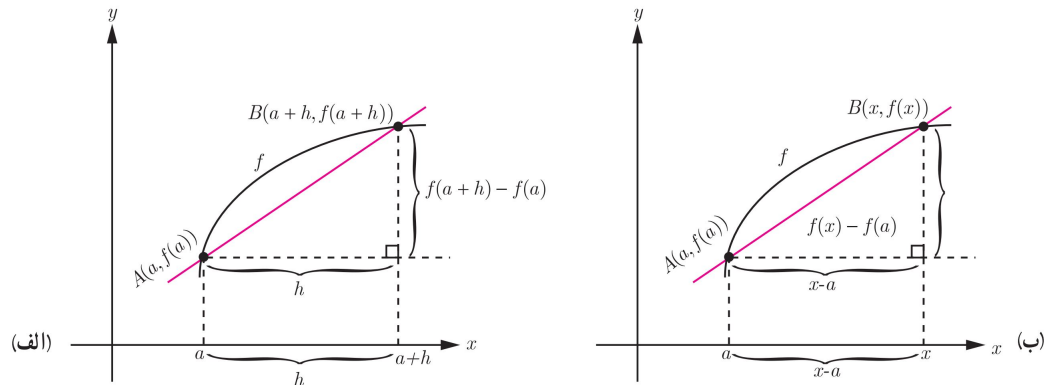
بنابراین

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

حال آنکه در ویرایش جدید سعی شده است رابطه دوم محاسبه مشتق، با استفاده از نمودار توضیح داده شود (شکل ۴۹). اما باز هم به نظر می‌رسد توضیحات آمده در صفحه ۷۹ طولانی و غیر ضروری بوده و کمکی به

دانش آموز نکند. البته در کار در کلاس صفحه ۸۰ کتاب به درستی قید شده است که به شیوه جبری نیز می‌توان رابطه دیگر محاسبه مشتق را به دست آورد.

شکل ۴۹: صفحه ۷۹



کار در کلاس پایین صفحه ۸۰ تمرین خوبی برای دانش آموز است تا بتواند از نظر هندسی رابطه بین شیب خط مماس بر منحنی و مشتق منحنی را درک کند. به علاوه، تمرین ۲ صفحه ۸۱ و تمرین ۸ صفحه ۸۳ از جمله تمرین‌های خوب این بخش در ویرایش جدید کتاب می‌باشند.

۵.۳ مشتق‌پذیری و پیوستگی این درس با یادآوری مفهوم مشتق‌پذیری تابع در یک نقطه و تعریف مشتق تابع به صورت خلاصه آغاز شده است. در فعالیت صفحه ۸۴ و کار در کلاس صفحه ۸۵، دانش آموز با دو تابع روبرو می‌شود که در نقطه داده شده مشتق‌پذیر نیستند و در حقیقت در آنها ناپیوسته‌اند. سپس این حقیقت کلی که مشتق‌پذیری پیوستگی را نتیجه می‌دهد، در قالب قضیه صفحه ۸۶ آمده است (شکل ۵۰).

شکل ۵۰: قضیه صفحه ۸۶

قضیه: اگر تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه f در a پیوسته است.

اثبات: کافی است نشان دهیم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \left((x-a) \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (x-a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) = 0 \cdot f'(a) = 0$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$ و از آنجا $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (چرا؟)

باید گفت اثبات این قضیه از محدود اثبات‌های آورده شده در این کتاب است. به علاوه، به نظر می‌رسد روند آوردن مطالب در این درس به همراه تفکیک صحیح این مطالب از درس قبل، به درک

بهرتر دانش آموز کمک می‌کند. در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی سال ۱۳۹۴، مطالب پشت سر هم و بدون تفکیک معناداری آورده شده بود. بلافاصله در ادامه درس به خوبی تاکید می‌شود که عکس قضیه فوق برقرار نیست و مثالی برای روشن شدن مطلب آمده است (شکل ۵۱).

شکل ۵۱: قضیه صفحه ۸۶

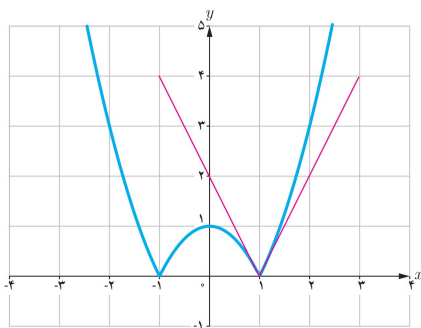
اگر تابع f در $x = a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x = a$ مشتق پذیر هم نیست.

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه درست نیست، یعنی حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی‌توان مشتق پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت.

❖ مثال: مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

دانش آموز با مفهوم مشتق یکطرفه، یعنی مشتق‌های چپ و راست در خلال حل این مثال آشنا می‌شود. گرچه تعریف مشتق‌های چپ و راست در ادامه به طور مستقل آورده شده است.

شکل ۵۲: صفحه ۸۷



بنابراین $f'(1)$ موجود نیست. به عبارت دیگر خط مماس بر منحنی در نقطه $x = 1$ وجود ندارد. اما حدهای یک‌طرفه فوق را می‌توان با وجود نیم‌خط‌های مماس بر منحنی در نقطه $x = 1$ توجیه کرد. اگر از سمت راست به نقطه $x = 1$ نزدیک شویم، شیب نیم‌خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲ و اگر از سمت چپ به $x = 1$ نزدیک شویم، شیب نیم‌خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲- است. حدهای راست و چپ بالا را به ترتیب مشتق‌های راست و چپ f در $x = 1$ می‌نامیم و با $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ نمایش می‌دهیم.

صفحات ۸۸ و ۸۹ کتاب به بیان حالاتی می‌پردازد که در آنها مشتق تابع وجود ندارد (شکل ۵۳). نقطه مثبت کتاب در اینجا نسبت به ویرایش‌های قبلی، توضیحات خلاصه و مفید ابتدای صفحه ۸۹ است.

کار در کلاس بعدی نیز به خوبی از نظر هندسی حالت‌های مختلف را نمایش می‌دهد. پیشنهاد ما در اینجا آوردن مثال‌هایی است که بیشتر از نظر جبری نقاطی که در آنها تابع مشتق دارد و یا مشتق پذیر نیست، بررسی شوند. به طور مشخص، مثالی در صفحه ۱۳۷ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی سال ۱۳۹۴ آورده شده است که به نظر مفید است (شکل ۵۴).

شکل ۵۳: صفحه ۸۹

به‌طور خلاصه می‌توان گفت :

اگر تابع f در $x = a$ هریک از شرایط زیر را داشته باشد، در این صورت در این نقطه مشتق پذیر نیست.

۱ f در a پیوسته نباشد.

۲ f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x = a$:

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای).

پ) هر دو نامتناهی باشند.

شکل ۵۴: مثال صفحه ۱۳۷ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی سال ۱۳۹۴

❖ **مثال:** مقادیر a و b را به قسمی تعیین کنید که تابع $f(x) = \begin{cases} (x+1)^3, & x \leq 0 \\ ax + a + b, & x > 0 \end{cases}$ در $x=0$ مشتق پذیر باشد.

✍ **حل:** برای مشتق پذیر بودن تابع f در $x=0$ ، ابتدا لازم است f در $x=0$ پیوسته باشد. یعنی تساوی‌های زیر برقرار باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$1 = a + b = 1$$

$$a + b = 1 \quad \text{و یا}$$

و با به اجرا گذاشتن شرط مشتق پذیری، باید $f'_+(0) = f'_-(0)$ و اما

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x+1)^3 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} ((x+1)^2 + (x+1) + 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax + a + b - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{x} = a$$

بنابراین با انتخاب $a=3$ و $b=-2$ تابع f در $x=0$ مشتق پذیر است.

با آمدن توضیحاتی در صفحه ۹۰، مشتق به عنوان یک تابع در ابتدای صفحه ۹۱ تعریف شده است. از کیفیت توضیحات صفحه ۹۰ که بگذریم، نکته قابل توجه این است که در هر دو مثال آورده شده برای محاسبه تابع مشتق، نحوه محاسبه دامنه تابع مشتق در این مثال‌ها توضیح داده نشده است. دقت کنید که در معرفی تابع مشتق، نحوه محاسبه دامنه آن ذکر شده است اما در مثال‌های حل شده هیچ اشاره‌ای به چگونگی به دست آوردن دامنه نشده است. به علاوه، پیشنهاد می‌شود کار در کلاس صفحه ۹۲ نیز به عنوان یک مثال حل شده آورده شود، زیرا اولین نمونه از تابعی چند ضابطه‌ای است که مشتق آن محاسبه می‌شود. لازم است اشاره کنیم که در کتاب چاپ ۱۳۹۴، نقاط مشتق ناپذیری یک تابع، پس از معرفی تابع مشتق آورده شده است.

شکل ۵۵: مثال های صفحه ۹۱

بنابراین $f'(x) = 2x$. همان گونه که قبلاً ذکر شد دامنه تابع f' ، مجموعه اعداد حقیقی است. به کمک این دستور مقدار مشتق تابع $f(x) = x^2$ در هر نقطه را می توان حساب کرد، به طور مثال:

$$f'(-\frac{1}{5}) = -\frac{2}{5}, f'(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \text{ و } f'(5^\circ) = 10^\circ$$

❖ **مثال:** اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید. سپس $f'(3)$ را مشخص نمایید.

حل: $f'(0)$ وجود ندارد. دامنه f' برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ است. اگر $x \neq 0$ داریم:

نکته مثبت دیگر کتاب این است که معرفی مشتق توابع اولیه، با روندی منظم در صفحه ۹۲ شروع می شود. تابع مشتق برای $f(x) = x^r$ در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی سال ۱۳۹۴، برای هر عدد گویای r بیان و ثابت شده است. با این حال، به نظر می رسد توضیحات آمده در کتاب حاضر برای معرفی مشتق این تابع کافی است و به خوبی خلاصه شده است. هر چند با کمال تعجب در پاورقی صفحه ۹۳ ذکر شده است که در این کتاب توابع رادیکالی تنها با فرجه ۲ و ۳ مدنظر هستند! با معرفی مشتق تابع $f(x) = x^r$ ، تنها کافی است مقادیر در نظر گرفته برای r را در این کتاب، اعداد گویا بیان کنیم. دقت کنید که مانند بسیاری از موارد در این کتاب، می توان اثباتی برای این فرمول نیاورد.

قوانین مهم محاسبه مشتق حاصل جمع، حاصل ضرب و تقسیم توابع در صفحه ۹۴ کتاب آورده شده است (شکل ۵۶).

شکل ۵۶: قوانین مشتق گیری صفحه ۹۴

❶ اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق پذیر باشند، آنگاه توابع kf ($k \in \mathbb{R}$)، $f \pm g$ و $\frac{f}{g}$ ($g(a) \neq 0$) نیز در $x = a$ مشتق پذیرند و داریم:

$$(kf)'(a) = kf'(a) \quad \text{ب)}$$

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a) \quad \text{الف)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2} \quad \text{ت)}$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \quad \text{پ)}$$

به کمک تعریف مشتق هریک از روابط بالا را می توان ثابت نمود، اما در این کتاب به اثبات آنها نمی پردازیم.

در هر صورت بهتر است برهان حداقل یکی از روابط آورده شود. با این حال مثال بعد در همین صفحه و کار در کلاس صفحه ۹۵ (شکل ۵۷) برای تمرین بکاربردن این قوانین مناسب است.

شکل ۵۷: کار در کلاس صفحه ۹۵

کار در کلاس

۱ مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید:

الف) $f(x) = \frac{1}{x-4}$

ب) $g(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 5)$

پ) $h(x) = \frac{x}{2x^2 + x - 1}$

۲ اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(2) = 3$ ، $f'(2) = 5$ ، $g(2) = 8$ و $g'(2) = -6$ مقدار $(fg)'(2)$ و $(\frac{f}{g})'(2)$ را به دست آورید.

یادآوری می‌کنیم که برهان برخی از این قوانین در کتاب حسابان سال ۱۳۹۲ و برهان قانون مشتق تقسیم توابع در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی سال ۱۳۹۴ آورده شده است. اما در کتاب حاضر، به طرز مناسبی مثال‌هایی بعد از بیان این قوانین آورده شده است.

از دیگر نقاط قوت کتاب حاضر می‌توان به این نکته اشاره کرد که مطالب مختلف کتاب به نحو مناسبی تفکیک شده‌اند و دانش‌آموز در میان انبوهی از مطالب بهم پیوسته گم نمی‌شود. شاید این موضوع در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی سال ۱۳۹۴ مشهود باشد. با این که کتاب مذکور در بسیار موارد دارای محتوای مناسبی است، یکی از نقاط منفی آن عدم تفکیک مناسب مطالب است، به طوری که در برخی موارد دانش‌آموز رابطه میان دو موضوع را گم می‌کند. با این وجود، در بسیاری از موارد، توضیحات کتاب مذکور جامع‌تر به نظر می‌رسد. لطفاً به نحوه بیان قانون مشتق تابع مرکب یا همان قاعده زنجیری در دو کتاب توجه کنید (شکل ۵۸ و ۵۹)

شکل ۵۸: قاعده زنجیری صفحه ۹۶

مشتق تابع مرکب / قاعده زنجیری

اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(fog)'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

❖ مثال: اگر $h(x) = (x^2 + 3x + 1)^2$ ، مطلوب است $h'(x)$.

پرواضح است که دانش‌آموز کدام یک از این توضیحات را بهتر درک می‌کند! به علاوه، فرمول‌های مشتق‌گیری از توابع مرکب خیلی به صورت خلاصه گفته شده است. پیشنهاد می‌کنیم فرمول‌های بیشتری همراه با مثال‌های حل شده آورده شود. از مهمترین آنها، می‌توان به توابع

$$y = \sqrt[n]{x}, \quad y = \sqrt[n]{x^m}, \quad y = \sqrt[n]{u}, \quad u = \sin x, u = \cos x$$

شکل ۵۹: قاعده زنجیری در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی سال ۱۳۹۴

۳-۸- قاعده زنجیری

با وجود اینکه می‌توانیم مشتق $\sqrt{x}$ و $x^2 + 1$ را بیابیم ولی هنوز نمی‌توانیم مشتق $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ را حساب کنیم.

توجه کنید که f تابعی ترکیبی است که اگر فرض کنیم $y = f(u) = \sqrt{u}$ و $u = g(x) = x^2 + 1$ می‌توانیم بنویسیم:

$$y = h(x) = f(g(x))$$

یعنی $h = f \circ g$

قاعده محاسبه مشتق تابع‌های f و g را می‌دانیم، در نتیجه دانستن قاعده‌ای که براساس آن بدانیم چگونه مشتق $h = f \circ g$ را برحسب مشتق‌های f و g پیدا کنیم، بسیار با اهمیت است. و این قاعده را قاعده زنجیری می‌نامند.

اکنون فرض کنید تابع $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ برابر است با تابع مرکب $y = f(g(x))$ ، که در آن $f(u) = \frac{1}{u}$ و $u = g(x) = x^2 + 1$ و این توابع دارای مشتق‌های $g'(x) = 2x$ ، $f'(u) = -\frac{1}{u^2}$ هستند.

اشاره کرد. از روش بیان هم که بگذریم، تعداد مثال‌های حل شده برای موضوع مهمی مانند قاعده زنجیری در این کتاب کم است.

نکته دیگر معرفی نمادهای لایب‌نیتز برای مشتق است که در این کتاب هیچ اشاره‌ای به آنها نشده است:

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = f'(x).$$

این نمادها به طور گسترده در دروس ریاضی دوره کارشناسی مورد استفاده قرار می‌گیرند و معرفی آنها در این کتاب به نظر ضروری می‌رسد.

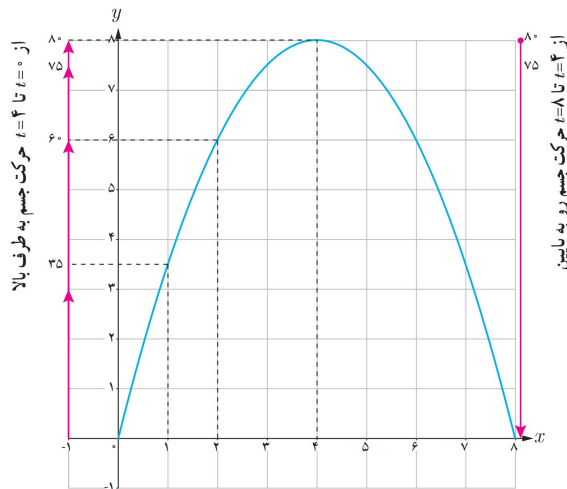
باید اشاره کنیم که در کتاب ریاضی ۳ پایه دوازدهم رشته تجربی، علاوه بر حذفیات بیان شده برای رشته ریاضی، مباحث نقطه عطف و تقعر و رسم نمودار نیز حذف شده‌اند.

در درس سوم از این فصل به آهنگ تغییر پرداخته شده است. گرچه می‌توان محتوای این درس را به صورت خلاصه‌تر بیان کرد، به نظر می‌سد بیشتر مثال‌ها و تمرین‌ها مناسب است. به طور مشخص، مثال صفحه ۱۰۷ (شکل ۶۰) گرچه طولانی است، اما مفهومی و کاربردی است.

صفحه ۱۰۶ نیز مثال مفیدی در مورد نرخ باروری دارد. کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی سال ۱۳۹۴ بیشتر در مورد آهنگ لحظه‌ای بحث کرده است و در مورد آهنگ متوسط مطالب کمی دارد. در هر حال روش بیان و مثال‌های کتاب حاضر در این موضوع با آنچه در کتاب سال ۱۳۹۴ آمده است کاملاً متفاوت است.

شکل ۶۰: مثال صفحه ۱۰۷

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای



❖ **مثال:** جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید. به طور مثال ۲ ثانیه پس از پرتاب این جسم در ارتفاع ۶۰ متری از سطح زمین است. به هر حال جسم پس از مدتی به زمین برمی‌گردد. نمودار مکان - زمان حرکت این جسم در شکل نشان داده شده است.

۶.۳ فصل پنجم: کاربردهای مشتق همانند آنچه در فصل‌های قبل نیز دیده می‌شود، تفکیک مناسب مطالب در این فصل نیز یکی از نقاط قوت کتاب حاضر نسبت به کتاب سال ۱۳۹۴ است. این فصل به سه درس تقسیم شده است (شکل ۶۱).

شکل ۶۱: فصل پنجم: کاربردهای مشتق

کاربردهای مشتق



فصل

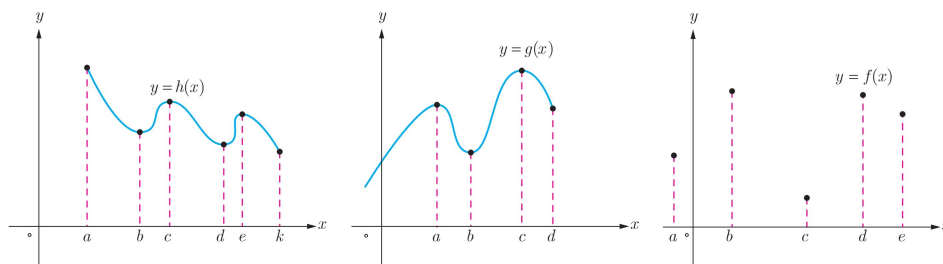
- ۱ اکسترم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی
- ۲ جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن
- ۳ رسم نمودار توابع

پس از مقدمه‌ای در خصوص نقاط اکسترم و تعریف آنها در صفحه ۱۱۲ و ۱۱۳، کار در کلاس صفحه ۱۱۳ (شکل ۶۲) شامل چند نمودار است که دانش آموز باید نقاط اکسترم نسبی و مطلق را با توجه به نمودار پیدا کند. اگر چه در صفحه ۱۱۳ به درستی بیان شده است که اکسترم‌های مطلق در یک بازه (مجموعه) در نظر گرفته می‌شوند، اما در کار در کلاس بیان سوال کامل نبوده و در واقع مشخص نیست دانش آموز باید اکسترم‌های مطلق را روی کدام بازه پیدا کند.

شکل ۶۲: کار در کلاس صفحه ۱۱۳

کار در کلاس

۱ در هر یک از نمودارهای توابع زیر مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق و همچنین طول نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را در صورت وجود مشخص نمایید.



در صفحه ۱۱۷ نقاط بحرانی یک تابع تعریف شده است. نکته دیگر این که معرفی نقاط بحرانی و کاربرد آنها فقط برای یافتن اکسترم‌های مطلق در این کتاب آمده است و مطلبی در خصوص یافتن نقاط اکسترم نسبی و ارتباط آنها با نقاط بحرانی نیامده است. این در حالی است که اگر روش یافتن اکسترم‌های نسبی با استفاده از نقاط بحرانی بیان شود، بلافاصله می‌توان نقاط اکسترم مطلق را نیز با بررسی نقاط ابتدا و انتهای بازه مورد نظر به دست آورد.

در موضوع بهینه‌سازی، کتاب حاضر دارای دو مثال در صفحه ۱۱۸ و ۱۱۹ می‌باشد. البته کتاب ریاضی ۳ پایه دوازدهم تجربی دارای یک درس مجزا به نام بهینه‌سازی است که در آن مثال‌ها و تمرین‌های متنوعی از این موضوع آورده شده است.

ارتباط بین مشتق یک تابع با صعودی یا نزولی بودن تابع در قضیه صفحه ۱۲۱ (شکل ۶۳) بیان شده است. فعالیت صفحه ۱۲۰ برای درک رابطه این دو مناسب به نظر می‌رسد. همچنین، کار در کلاس بعدی نیز می‌تواند در فهم این مطلب، که باید برای استفاده از این قضیه ابتدا شرایط آن برقرار باشد، مفید باشد. هر چند، پیشنهاد می‌کنیم این نکات با استفاده از مثال‌هایی عینی در کتاب گنجانده شود. به عبارت دقیق‌تر، مثالی از یک تابع آورده شود که در یک بازه داده شده مشتق‌پذیر نباشد ولی یکنوا باشد.

به علاوه، پیشنهاد می‌شود پس از بیان قضیه، مثال‌هایی در کتاب گنجانده شود که دانش‌آموز با بکار بردن این قضیه، صعودی یا نزولی بودن تابع داده شده روی بازه‌های مختلف را بررسی کند. مثال صفحه ۱۷۹ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی سال ۱۳۹۴ که در شکل ۶۴ آمده است، به دانش‌آموز کمک می‌کند بکاربردن قضیه فوق را تمرین کند.

شکل ۶۳: قضیه صفحه ۱۲۱

قضیه:

فرض کنیم تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته و بر بازه (a, b) مشتق پذیر باشد. در این صورت:

الف) اگر به ازای هر x در (a, b) ، $f'(x) > 0$ ، آن گاه تابع f بر $[a, b]$ صعودی اکید است.

ب) اگر به ازای هر x در بازه (a, b) ، $f'(x) < 0$ ، آن گاه تابع f بر $[a, b]$ نزولی اکید است.

پ) اگر به ازای هر x در بازه (a, b) ، $f'(x) = 0$ ، آن گاه تابع f بر $[a, b]$ یک تابع ثابت است.

کارد کلاس

۱) توابع $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = x^2$ در تمام $\mathbb{R}$ صعودی اکیداند.

الف) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید باشد، در آن بازه مشتق پذیر هم هست؟

ب) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید و مشتق پذیر باشد، در هر نقطه از آن بازه دارای مشتق مثبت است؟

شکل ۶۴: مثال صفحه ۱۷۹ حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی سال ۱۳۹۴

❖ مثال: مشخص کنید تابع f با ضابطه $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ در کجاها صعودی اکید و در کجاها نزولی اکید است.

✍ حل: ابتدا مشتق تابع را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

عبارت $f'(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

از نقطه نظر سطح دشواری مثال‌ها و تمرین‌ها نیز باید گفت کتاب سال ۱۳۹۴ شامل مثال‌هایی به مراتب دشوارتر بود. البته باید در نظر گرفت که در بسیاری از موارد دشواری مثال‌ها ناشی از جامعیت بیشتر محتوای آمده در کتاب مذکور است. به عنوان یک نمونه از همین مبحث، شکل‌های ۶۵ و ۶۶ را ببینید.

شکل ۶۵: مثال صفحه ۱۸۷ کتاب سال ۱۳۹۴

❖ مثال: مقادیر اکسترمم موضعی تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x}$ را روی بازه $(-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$

پیدا کنید.

شکل ۶۶: تمرین صفحه ۱۸۸ کتاب سال ۱۳۹۴



مقدارهای ماکسیمم و مینیمم موضعی تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{3}x - 2\cos x$ را روی بازه $(0, 2\pi)$ پیدا کنید.

از دیگر حذفیات مهم در این مبحث، آزمون مشتق دوم (شکل ۶۷) برای یافتن اکسترم‌های نسبی است. استفاده از این آزمون در برخی موارد به مراتب ساده‌تر از آزمون مشتق اول است. البته همانطور که پیش‌تر اشاره شد، در این کتاب بیشتر بر اکسترم‌های مطلق تاکید شده است.

شکل ۶۷: آزمون مشتق دوم در کتاب سال ۱۳۹۴

آزمون مشتق دوم برای اکسترم‌های موضعی

فرض کنیم $(c, f(c))$ نقطه بحرانی تابع f باشد که در آن $f'(c) = 0$ و f' به ازای جمیع x های بازه I ، شامل c موجود باشد. هرگاه $f''(c)$ وجود داشته و

الف) $f''(c) < 0$ ، آنگاه f در c ماکسیمم موضعی دارد.

ب) $f''(c) > 0$ ، آنگاه f در c مینیمم موضعی دارد.

درس دوم این فصل به تقعر منحنی‌ها و نقطه عطف نمودار توابع اختصاص دارد. به نظر می‌رسد توضیحات ابتدایی درس مناسب است. هر چند پیشنهاد می‌شود تعریف تقعر یک منحنی به صورت مجزا و صریح بیان شود. شکل ۶۸ را ببینید.

شکل ۶۸: تعریف تقعر در صفحه ۱۸۱ کتاب سال ۱۳۹۴

تعریف ۴:

الف) اگر نمودار f روی بازه I بالای همه مماس‌هایش باشد آنگاه نمودار f را مقعر رو به بالا می‌نامیم.

ب) اگر نمودار f روی بازه I پایین همه مماس‌هایش باشد، آنگاه نمودار f را مقعر رو به پایین می‌نامیم.

دو تابع آمده در فعالیت صفحه ۱۲۸ نیز برای درک جهت تقعر منحنی مناسب هستند. همچنین، مثال بعد از قضیه صفحه ۱۲۹ (شکل ۶۹) نیز از نظر محاسباتی و دشواری به نظر مناسب می‌رسد.

شکل ۶۹: قضیه و مثال صفحه ۱۲۹

قضیه :

فرض کنیم $f''(x)$ به ازای هر نقطه x از بازه باز I موجود باشد.

الف) اگر به ازای هر x از I ، $f''(x) > 0$ ، آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به بالا دارد.

ب) اگر به ازای هر x از I ، $f''(x) < 0$ ، آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به پایین دارد.

پ) اگر به ازای هر x از I ، $f''(x) = 0$ ، آزمون بی‌نتیجه است.

❁ مثال :

جهت تقعر توابع زیر را در دامنه تعریفشان به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{1}{x}$

ب) $g(x) = x^2 + 3x^2 + 1$



۷.۳ رسم نمودار توابع در مورد رسم نمودار توابع که به عنوان آخرین درس از این کتاب آمده است نیز باید گفت سطح مثال‌های حل شده در کتاب حاضر از نظر دشواری به مراتب پایین‌تر از ویرایش سال ۱۳۹۴ است. به عنوان مثال، در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی سال ۱۳۹۴، جدول رفتار و نمودار توابع معکوس مثلثاتی همچون $f(x) = \tan^{-1}(1/x)$ و $g(x) = \sin^{-1}(1/x)$ آورده شده است. همچنین، بررسی جدول رفتار و رسم نمودار توابع گویایی که صورت و مخرج آنها چندجمله‌ای‌های درجه دو و سه هستند نیز گنجانده شده است. هر چند طبق روند کلی که قبلاً به آن اشاره شد، می‌توان این موضوع را در مقایسه با کتاب‌های قدیمی‌تر نیز مشاهده کرد. به عنوان مثال، کتاب ”جبر و آنالیز“ سال چهارم دوره متوسطه چاپ ۱۳۶۰، یک فصل کامل را به رسم نمودار توابع اختصاص داده است که در میان انبوه مثال‌های حل شده آن می‌توان رسم نمودار توابع متناوب و توابع مثلثاتی را مثال زد. شکل ۷۰ را ببینید.

شکل ۷۰: رسم نمودار توابع مثلثاتی در کتاب "جبر و آنالیز" سال چهارم متوسطه چاپ ۱۳۶۰

مثال ۳- تعیین جدول تغییرات و رسم منحنی نمایش تابع: $y = \frac{1 - \sin x}{2 \sin x - 1}$ در فاصله $[-\pi, \pi]$

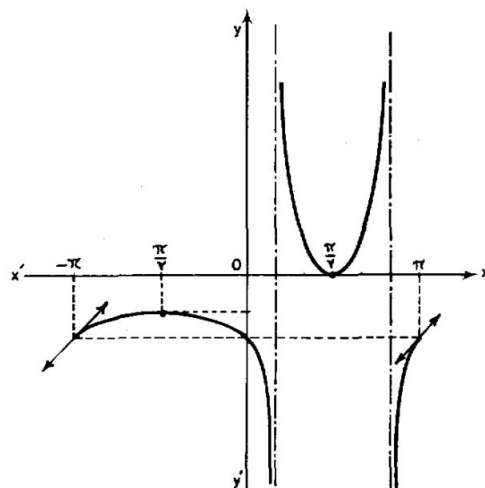
دوره تناوب تابع 2π است. تابع به ازای ریشه‌های $\sin x = \frac{1}{2}$ انحصالی است بنابراین $x = \frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{5\pi}{6}$ مجانبهای قائم منحنی می‌باشند.

تابع در این فاصله به ازای مقادیر $x = \frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{5\pi}{6}$ معین و پیوسته است:

$$y' = \frac{-\cos x}{(2 \sin x - 1)^2}, \quad y' = 0 : \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \text{ یا } x = \frac{5\pi}{6} \\ y = 0 \text{ و } y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pi \text{ یا } -\pi \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \rightarrow \frac{\pi}{6} \text{ یا } \frac{5\pi}{6} \\ y \rightarrow \pm \infty \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y'	+	0	-	-	0	+	+
y	-1	$-\frac{2}{3}$	-1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	-1



۱۴۷

۴. فصل پیشنهادی: انتگرال

باید گفت یکی از بزرگترین انتقاداتی که به ویرایش جدید کتاب وارد است، حذف مبحث انتگرال است. این در حالی است که کتاب سال ۱۳۹۴ در دوره پیش دانشگاهی شامل ۴۰ صفحه محتوا در مورد انتگرال بوده است! کتاب اشاره شده انتگرال را با مطالعه مساحت به عنوان حد مجموع آموزش داده است. آموزش

انتگرال معین و ویژگی‌های ابتدایی آن از مهمترین اهداف کتاب مذکور می‌باشد. به علاوه، قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال و همچنین معرفی انتگرال نامعین و برخی فرمول‌های آن نیز در این کتاب آمده است. با توجه به اینکه دانش آموز در فصل‌های قبلی مفهوم مشتق توابع را فراگرفته است و فرمول‌های مشتق‌گیری را می‌داند، می‌توان مفهوم انتگرال را به عنوان عکس عمل مشتق‌گیری، یعنی همان پاد مشتق و انتگرال نامعین در کتاب گنجانده، بدون آنکه بیمی از زیاد شدن حجم مطالب کتاب داشته باشیم. در ادامه محتوای مختصری برای این مطلب پیشنهادی ارائه می‌دهیم.

۵. انتگرال

در فصل‌های گذشته با عمل مشتق‌گیری آشنا شدیم. یعنی عملی که ما را از یک تابع مانند f به مشتق آن یعنی f' می‌رساند. در این فصل به دنبال عکس عمل مشتق‌گیری هستیم. فرض کنیم تابع $f(x)$ داده شده باشد. به دنبال تابعی مانند $F(x)$ هستیم به طوری که $F'(x) = f(x)$. اگر چنین تابعی موجود باشد، آنرا یک پادمشتق تابع f می‌نامیم. دقت کنید که اگر $F'(x) = f(x)$ ، آنگاه برای هر عدد ثابت مانند c نیز داریم $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$. بنابراین اگر $F(x)$ یک پادمشتق $f(x)$ باشد، آنگاه برای هر عدد ثابت مانند c تابع $F(x) + c$ نیز یک پاد مشتق $f(x)$ است.

۱. می‌دانیم مشتق تابع $y = x^2$ برابر است با $y' = 2x$. بنابراین تابع $F(x) = x^2$ یک پاد مشتق تابع $f(x) = 2x$ می‌باشد. همچنین، برای هر عدد ثابت مانند c ، تابع $x^2 + c$ نیز یک پاد مشتق تابع $f(x) = 2x$ می‌باشد.

۲. مشتق تابع $y = \sin x$ برابر است با $y' = \cos x$. بنابراین برای هر عدد ثابت مانند c ، تابع $F(x) = \sin x + c$ یک پاد مشتق تابع $f(x) = \cos x$ است.

مجموعه همه پاد مشتق‌های تابع $f(x)$ را انتگرال نامعین f می‌نامیم و با نماد $\int f(x) dx$ نشان می‌دهیم. بنابراین جواب یک انتگرال نامعین دسته‌ای از توابع است که در یک عدد ثابت اختلاف دارند. بنابراین می‌نویسیم

$$\int f(x) dx = F(x) + c.$$

در این نمایش، $f(x)$ را انتگرالده و dx را المان انتگرال‌گیری می‌نامیم. المان انتگرال‌گیری نشان می‌دهد که بر حسب چه متغیری انتگرال می‌گیریم. دقت کنید که $F(x)$ یک پاد مشتق دلخواه از تابع f است. به عبارت دیگر، برای یافتن انتگرال نامعین تابع f ، کافی است یک پاد مشتق دلخواه از آن را بیابیم.

با استفاده از فرمول مشتق توابع که در فصل‌های گذشته بیان شده است، فرمول‌های انتگرال زیر بلافاصله نتیجه می‌شود:

قضیه ۱.۵.

$$1) \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c;$$

$$2) \int \sin x dx = -\cos x + c;$$

$$3) \int \cos x dx = \sin x + c.$$

همچنین، با استفاده از خواص مشتق که در صفحه ۹۴ آمده است، خواص زیر برای انتگرال بلافاصله نتیجه می‌شود:

قضیه ۲.۵. فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دوتابع باشند که دارای انتگرال نامعین هستند و فرض کنیم a عددی ثابت باشد. در اینصورت

$$1) \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx,$$

$$2) \int a f(x) dx = a \int f(x) dx,$$

باید اشاره کنیم که متأسفانه به دلیل اینکه مشتق بسیاری از توابع اساسی در کتاب حاضر حذف شده است، انتگرال نامعین این توابع نیز قابل بیان نیست.

سپاس‌گزاری

این طرح حاصل پژوهشی است که نویسنده در قالب فرصت مطالعاتی در “گروه پژوهشی ریاضی طوسی” در بهار ۱۴۰۰ تحت نظارت آقای دکتر محمد صالح مصلحیان گذرانده است. نویسنده از ایشان که پیشنهاد موضوع پژوهش، فراهم آوردن منابع و کتاب‌های مورد بررسی و نظارت بر محتوای پژوهش را بر عهده داشته‌اند، قدردانی می‌نماید. به علاوه، نویسنده از آقای امین روشنی، دبیر ریاضی اداره آموزش و پرورش تبادکان، به واسطه نظرات و پیشنهادات ارزشمند ایشان تشکر و قدردانی می‌نماید.

مراجع

- [۱] حسابان (۱) - پایه یازدهم دوره دوم متوسطه - ۱۱۱۲۱۴، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران، چاپ چهارم، ۱۳۹۹.
- [۲] حسابان (۲) - پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه - ۱۱۲۲۱۴، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران، چاپ سوم، ۱۳۹۹.

- [۳] حسابان (کدکتاب ۲۵۸/۱)، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، چاپ چهارم، ۱۳۹۲.
- [۴] حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی (کدکتاب ۲۹۵/۱)، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، چاپ چهارم، ۱۳۹۴.
- [۵] حساب و جبر- سال سوم آموزش متوسطه عمومی رشته ریاضی و فیزیک، سازمان کتاب های درسی ایران، چاپخانه داوینا، ۱۳۵۵.
- [۶] جبر و آنالیز- سال چهارم آموزش متوسطه عمومی رشته ریاضی و فیزیک، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، چاپخانه مطبوعات، ۱۳۶۰.
- [۷] جبر و آنالیز ۱ و ۲، سال چهارم آموزش متوسطه عمومی رشته ریاضی و فیزیک، سازمان کتاب های درسی ایران، شرکت چاپ آفست گلشن، ۱۳۵۶.
- [۸] ریاضی (۲) - پایه یازدهم دوره دوم متوسطه رشته علوم تجربی ۱۱۱۲۱۱، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، چاپ اول، ۱۳۹۶.
- [۹] ریاضی (۳) - پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه رشته علوم تجربی ۱۱۲۲۱۱، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، چاپ سوم، ۱۳۹۹.
- [۱۰] ز. تالانی، تغییرات سه دهه گذشته در نظام آموزشی ایران، خبرآنلاین <https://www.khabaronline.ir/news/۳۴۷۷۲۲>.
- [۱۱] ق. صادقی، م.ص. مصلحیان، ا. صنمی، ع. مرصعی، م. میرزاویری، م. نوغانی دخت بهمنی، م. وثوق، آموزش مدرسه‌ای، مساله این است، نشریه ریاضی و جامعه، DOI.10.22108/msci.2021.130621.1470.
- [۱۲] م.ص. مصلحیان، نقد کتابهای دبیرستانی: حسابان ۱ و ۲، سخنرانی در جمع دبیران ریاضی مشهد، <http://profsite.um.ac.ir/~moslehian/Moslehian-Calculus1-2.pdf>
- [۱۳] ل. محمدامین زاده، بررسی تغییر نظام آموزشی ایران از طرح ۱-۳-۳-۵ به طرح ۳-۳-۶، کنفرانس بین المللی پژوهش‌های نوین در مدیریت و مهندسی صنایع، تهران، ۱۳۹۴، ۷۳ و ۴۳۵.



LINEAR ALGEBRA AND TECHNOLOGY

FARIBA NOOHI¹

¹Department of Computer, Alzahra Technical and Vocational Institute,
Technical and Vocational University of Khorasan Razavi, Mashhad, Iran
f.noohi@gmail.com

Abstract. In this article we give a brief history of the applications of linear algebra in technology. We investigate the influence of some introductory theorems on our today's world.



جبرخطی و فنآوری

فریبا نوحی^۱

^۱ گروه کامپیوتر، آموزشکده فنی و حرفه‌ای الزهراء، دانشگاه فنی و حرفه‌ای خراسان رضوی، مشهد، ایران

f.noohi@gmail.com

چکیده. در این مقاله با زبان ساده تاریخچه‌ای از کاربردهای جبرخطی را در فن‌آوری روز جهان توضیح می‌دهیم. هدف آن است که با ذکر مثال‌هایی نشان دهیم ریاضیاتی که به نظر مقدماتی می‌رسد تا چه حد بر آنچه در دنیای ما می‌گذرد تاثیر داشته است.

۱. پیش‌گفتار

ریاضیات به ما کمک کرده است تا جهان را بشناسیم و یک نظم فکری را پایه‌گذاری کنیم. این علم قادر است نحوه استدلال منطقی، تفکر نقاد و خلاقانه، توانایی حل مسأله و حتی مهارت برقراری ارتباط را به ما بیاموزد. ریاضی ابزار قدرتمندی است برای درک و نظم بخشیدن به زندگی. ریاضیات در جای‌جای زندگی ما حضور دارد، در کارهایی مانند اندازه‌گیری، شمردن، اقتصاد، مهندسی و نرم‌افزارها و همچنین در طبیعت، حتی جایی که خود ما حضور نداریم. ریاضی می‌تواند به توضیح پدیده‌های طبیعی بپردازد و حتی احساساتی مانند درک ما از زیبایی را توصیف کند. به قول توماس بریتز استاد ریاضی دانشگاه نیو ساوت ولز استرالیا «نه تنها ریاضیات زیباست، بلکه زیبایی نیز نوعی ریاضی است و این دو در هم تنیده هستند» دکتر بریتز زیبایی را در فرآیند ریاضی یافته است. او می‌افزاید: «از دیدگاه من، ریاضیات بسیار جالب است. از وقتی کودک بودم آن را دوست داشتم. گاهی، زیبایی و لذت ریاضی در مفاهیم، گاهی در نتایج و گاهی در تفاسیر آن است. سایر

2020 Mathematics Subject Classification. 01A60, 01A61

واژگان کلیدی. جبر خطی، اینترنت، علم داده، پردازش تصویر.

تاریخ: دریافت ۱۴۰۱/۲/۲ بازنگری ۱۴۰۱/۳/۱۲ پذیرش ۱۴۰۱/۳/۱۷ انتشار برخط ۱۴۰۱/۴/۱۹

نحوه ارجاع به این مقاله: ف. نوحی، جبر خطی و فن‌آوری، به سوی علوم ریاضی، ۲ (۱۴۰۱)، شماره ۱، ۸۰-۹۰.

اوقات، این فرآیندهای فکری است که ذهن شمار را باز می‌کند، احساسی که طی این فرآیند می‌گیرید یا تنها کاری که در جریان است؛ مانند گم شدن در یک کتاب خوب» [۱].

با این مقدمه و ستایش ریاضیات به گوشه‌ای از تاریخچه حضور بی‌بدیل آن در تعدادی از عملکردهای روزانه و بسیار متداولی که امروزه همگان با آن در ارتباط هستیم می‌پردازیم.

امروز زندگی ما بدون اینترنت معنا ندارد. ارتباط ریاضیات و اینترنت مانند ارتباط بین یک نویسنده و زبان است. کار یک نویسنده بدون زبان به سرانجام نمی‌رسد و نوشته‌هایش با تکامل زبان در ارتباط تنگاتنگ است. رایانه‌ها به کمک زبان ریاضی به وجود آمدند و دستگاه اعداد در مبنای دو امکان انجام محاسبات، پخش موسیقی، نمایش تصاویر و هر آنچه که امروز در استفاده از اینترنت مشاهده می‌کنیم را فراهم آورده است. همه این‌ها با دو حرف الفبای ۰ و ۱ انجام می‌شود. قوانین منطق ریاضی عملکرد رایانه‌ها، آدرس‌دهی اینترنتی و موتورهای جستجو را مدیریت می‌کنند. همچنین مدیریت داده‌ها و طراحی روش‌های امنیت شبکه نیز با استفاده از ریاضیات انجام می‌پذیرند. از سوی دیگر اینترنت و شبکه وب نیز زمینه مساعدی برای پیشرفت ریاضیات فراهم کرده‌اند و ریاضیدانان با استفاده از امکانات جستجو به آخرین دستاوردهای همکاران خود دسترسی دارند و از طریق ارتباط اینترنتی می‌توانند به تبادل نظر بپردازند. در واقع این معامله‌ای است که برای هر دو طرف سودآور است.

از سوی دیگر دنیای امروز دنیای داده‌هاست. داده‌هایی که قسمت اعظم آن در اینترنت تولید می‌شود و پردازش و استخراج اطلاعات از آنها جزء جدایی ناپذیری از حوزه‌هایی مانند اقتصاد، امنیت، مطالعات اجتماعی و مانند آن است. بسیاری علوم دیگر نیز در دنیای امروزی ما و با توجه به نیازها شکل گرفته‌اند. در سراسر شهرها دوربین‌های مدار بسته برای کاربردهای مختلف جایگذاری شده‌اند و در هر لحظه تصاویری به مراکز مختلف ارسال می‌کنند.

یکی از شاخه‌های جذاب ریاضی جبرخطی است. شاخه‌ای که با فضاها و برداری و نگاشتهای خطی بین آنها سروکار دارد. در واقع در حیطه علم امروز جایی وجود ندارد که ردپایی از جبر خطی در آن پیدا نشده باشد. در این مقاله سعی داریم با زبان ساده برخی کاربردهای جبرخطی را در حوزه فن‌آوری به‌خصوص سیستم وب، پردازش داده و فشرده سازی تصاویر بیان کنیم. در اینجا هدف توضیح ریاضی مسأله نیست و به چند و چون و چرایی رسیدن به الگوریتم‌های مورد بحث نمی‌پردازیم، حتی هدف توضیح آخرین دستاوردهای فن‌آوری و تاثیر ریاضی بر آنها نیست، بلکه تنها با ذکر مثال‌هایی نشان می‌دهیم که قضایای مقدماتی جبرخطی تا چه حد در پیشرفت فن‌آوری سهم دارند و در نتیجه بر زندگی روزمره ما تاثیر گذاشته‌اند. الگوریتم‌های جستجویی که در زیر به آنها می‌پردازیم از اولین الگوریتم‌های طراحی شده به سبک امروزی بودند که در طول زمان تغییر کرده و به الگوریتم‌هایی بسیار کارآمدتر تبدیل شده‌اند، ولی سادگی ایده آنها شروع خوبی برای درک کارکرد موتورهای جستجو است.

۲. استفاده از جبر خطی در الگوریتم‌های جستجو

در حوزه فن‌آوری معمولاً فضاهایی که متغیرها و داده‌ها در آن قرار می‌گیرند، فضاهای برداری هستند. در نتیجه پردازش مسائل با استفاده از ابزارهای جبر خطی میسر می‌گردد. تقریباً تمام موتورهای جستجوی اصلی وب امروزی از تحلیل پیوند^۱ برای بهبود نتایج جستجوی خود استفاده می‌کنند. تحلیل پیوند نوعی تحلیل داده است که چگونگی ارتباط صفحات وب را تحلیل می‌کند. بنیان این روش و استفاده از ساختار ابرپیوند^۲ وب، بر مبنای نظریه ماتریس ساخته شده است. روش تحلیل پیوند و پشتوانه‌ی آن یعنی جبر خطی به انقلابی در جستجوی وب منجر شد، به طوری که روش جستجوی پیش از روش تحلیل پیوند (قبل از ۱۹۹۸) در مقابل جستجوی با دقت قابل توجه پس از آن کاملاً رنگ باخت.

وقتی کاربری در جستجوی عبارت یا مطلبی است، از موتور جستجو انتظار دارد که صفحات مربوط با آن مطلب را به ترتیب اهمیت در دسترس وی قرار دهد. در حال حاضر وقتی در گوگل چیزی را جستجو می‌کنید این انتظار تا حد بسیار زیادی برآورده می‌شود. این قابلیت ناشی از وجود الگوریتم‌های جستجوی پیشرفته است که بر روش تحلیل پیوند استوارند. برای این که به اهمیت روش تحلیل پیوند پی ببریم برای یک دقیقه وضعیت جستجوی قبل از سال ۱۹۹۸ را در نظر بیاورید. به دلیل تعداد بی‌شمار صفحات وب یک پرس و جو از یک موتور اغلب فهرست بسیار طولانی از صفحات، حتی گاهی تا هزاران صفحه مرتبط را نشان می‌داد. کاربر می‌بایست این لیست بلند بالا را مرتب کرده و صفحاتی با بیشترین ارتباط را می‌یافت. واضح است که به دلیل وجود هرزنامه‌ها^۳ ترتیب ارائه شده در نتیجه‌ی جستجو کمک کمی به کاربر می‌کرد، زیرا برای فریب یک موتور جستجو جهت تولید رتبه‌ی بالاتر از حد معمول برای یک صفحه، هرزنگارها^۴ به طور آزادانه از متاتگ‌ها استفاده می‌کردند و ادعا می‌کردند که صفحه آنها از عبارات جستجوی محبوبی برخوردار است، که البته این عبارات هرگز در صفحات ظاهر نمی‌شدند. در اینجا شاید اشاره به این نکته مفید باشد که متاتگ‌ها عبارات کوتاهی در توصیف یک صفحه هستند که در خود صفحه ظاهر نمی‌شوند بلکه در کد آن صفحه وجود دارند. هرزنگارها همچنین عبارات جستجوی محبوب را در متون نامرئی (متن سفید روی زمینه سفید) بارها تکرار می‌کردند تا موتور جستجو را بفریبند. به این ترتیب کاربر با ترتیبی ساختگی از صفحات ظاهراً مرتبط با موضوع روبرو می‌شد که در واقع نشان از ارتباط واقعی و بیشتر با موضوع مورد نظر نبود. با ورود الگوریتم‌های جدید، متاتگ‌ها به تدریج در موتورهای جستجو بی‌اثر شدند. الگوریتم‌های هیتس^۵ و رتبه‌صفحه^۶ اولین الگوریتم‌های تحلیل پیوند بودند که در حدود سال ۱۹۹۸ توسعه یافتند و هر دو به‌طور قابل ملاحظه‌ای فرآیند جستجو را

^۱ link analysis

^۲ hyperlink

^۳ spams

^۴ spammers

^۵ HITS

^۶ PageRank

بهبود بخشیدند. البته هر دوی این الگوریتم ها در طول زمان جای خود را به الگوریتم های بهتری دادند ولی از آنجا که آشنایی با آنها به درک چگونگی کار الگوریتم های جستجو و ریاضیات دخیل در آنها کمک می کند، این الگوریتم ها را به طور مختصر بررسی می کنیم. ابتدا به توصیف ساده ای از الگوریتم هیتس می پردازیم.

۱.۲. الگوریتم هیتس. الگوریتم هیتس یک روش تحلیل پیوند است که جان کلاینبِرگ^۷ آن را به منظور تمرکز بر لیست های طویل و بدون قاعده جستجوها در صفحات وب ابداع کرد [۵]. او متوجه الگویی در بین صفحات وب شد. برخی صفحات مانند یک کانون^۸ یا پرتال عمل می کردند زیرا پیوندهای خروجی زیادی داشتند و برخی دیگر مانند قلمرو^۹ یا منبع یک موضوع عمل می کردند، زیرا به عنوان صفحاتی که حاوی اطلاعات مهمی درباره موضوع بودند، ارجاعات یا پیوندهای ورودی بسیاری داشتند. کلاینبِرگ دریافت که به نظر می رسد کانون های خوب به سوی قلمروهای خوب اشاره می کنند و قلمروهای خوب به وسیله کانون های خوب مورد اشاره قرار می گیرند. بنابراین او به هر صفحه i یک امتیاز کانونی h_i و یک امتیاز قلمروی a_i اختصاص داد. در واقع به ازای هر صفحه i ، در تکرار، k امتیاز کانونی $h_i^{(k)}$ و امتیاز قلمروی $a_i^{(k)}$ به شکل زیر تعریف شدند:

$$a_i^{(k)} = \sum_{j: e_{ij} \in E} h_j^{(k-1)}, \quad h_i^{(k)} = \sum_{j: e_{ij} \in E} a_j^{(k)}.$$

که در اینجا e_{ij} نمایش یک ابر پیوند از صفحه i به صفحه j است و E مجموعه همه ابرپیوندها است. او برای محاسبه امتیاز یک صفحه با امتیاز یکنواخت شروع کرد، یعنی اگر n تعداد صفحات در یک همسایگی خاص از لیست مورد نظر باشد، قرار داد

$$h_i^{(1)} = \frac{1}{n}, \quad a_i^{(1)} = \frac{1}{n}.$$

در اینجا منظور از همسایگی تمام صفحات لیست مورد نظر و تمام صفحاتی که از این لیست به آنها اشاره شده یا از آنها به صفحات لیست اشاره شده است، می باشد و بسته به نیاز لیست مورد نظر می تواند شامل صد یا صدها هزار صفحه باشد. این امتیازها با قاعده تکراری فوق تا زمانی که به یک مقدار ایستا همگرا شوند، محاسبه می شوند. با کمک جبر خطی می توانیم معادلات فوق را به شکل ماتریسی بنویسیم. فرض کنید h و a بردارهای ستونی به ترتیب حاوی امتیازات کانونی و قلمروی باشند و فرض کنید L ماتریس مجاورت در مجموعه همسایگی باشد، یعنی $L_{ij} = 1$ اگر صفحه i به صفحه j پیوند داشته باشد و در غیر این صورت $L_{ij} = 0$. در این صورت داریم

$$a^{(k)} = L^T h^{(k-1)} \quad \text{and} \quad h^{(k)} = L a^{(k)},$$

Jon Kleinberg^۷

hub^۸

authority^۹

و با انجام محاسباتی، به نتایج زیر می‌رسیم

$$a^{(k)} = L^T L a^{(k-1)}$$

$$h^{(k)} = L L^T h^{(k-1)},$$

که در اینجا $L^T L$ ماتریس کانونی^{۱۰} و $L L^T$ ماتریس قلمروی^{۱۱} نام دارند. وظیفه الگوریتم هیتس حل مسأله بردار ویژه

$$L^T L a = \lambda_1 a, \quad L L^T h = \lambda_1 h$$

خواهد بود، که در آن λ_1 بزرگترین مقدار ویژه $L^T L$ (و $L L^T$) و a و h بردارهای ویژه نظیر خواهند بود. علاوه بر جبرخطی مقدماتی که در الگوریتم هیتس به کار می‌رود، مسائل مهمی مانند همگرایی، وجود، یکتایی و محاسبه عددی این امتیازات هم وجود دارند که با استفاده از دانش ریاضی حل می‌شوند.

۲.۲. الگوریتم رتبه صفحه. هر دوی ایده گوگل و رتبه صفحه توسط سرگئی برین^{۱۲} و لاری پیج^{۱۳} زمانی که دانشجوی علوم کامپیوتر دانشگاه استنفورد بودند، شکل گرفت. هرچند امروزه الگوریتم‌های بسیار پیشرفته‌تری ابداع شده‌اند ولی توصیف الگوریتم رتبه‌صفحه می‌تواند درک موضوع را ساده‌تر کند. نام این الگوریتم یعنی PageRank هم به کلمه page در web page اشاره دارد و هم نام Lary Page. با یک پرسش شروع می‌کنیم. گوگل چگونه صفحات وب را جستجو می‌کند؟ پاسخ این است که گوگل صفحات وب را با کمک رتبه‌بندی صفحات برای یافتن کلمات کلیدی مورد نظر جستجو می‌کند. رتبه‌صفحه چیست؟ رتبه صفحه الگوریتمی بود که توسط جستجوگر گوگل برای رتبه‌بندی صفحات وب در نتایج موتور جستجوی خود استفاده می‌کرد و روشی برای اندازه‌گیری اهمیت صفحات وب بود [۲، ۳]. رتبه صفحه با شمارش تعداد و کیفیت پیوندهای ارجاع به یک صفحه کار می‌کرد تا تخمین تقریبی از اهمیت وب سایت را تعیین کند. فرض اساسی این بود که احتمالاً وب‌سایت‌های مهم‌تریونندهای بیشتری از وب‌سایت‌های دیگر دریافت خواهند کرد. برین و پیج روش بازگشتی شبیه به روش کلاینبرگ را استفاده کردند. از نظر آنها یک صفحه مهم بود اگر از سوی صفحات مهم دیگر به آن اشاره شود. یعنی از نظر آنها اهمیت صفحه شما (امتیاز رتبه‌صفحه) مجموع امتیازات رتبه صفحه‌هایی است که به صفحه شما اشاره می‌کنند. برای تعریف ریاضی رتبه یک صفحه، برین و پیج اینگونه استدلال کردند که وقتی یک صفحه مهم به چندین مکان اشاره می‌کند، وزن (رتبه‌ی) آن باید به طور متناسب بین صفحات توزیع شود. به عبارت دیگر، اگر یاهو به صفحه وب شما اشاره می‌کند، این خوب است، اما شما نمی‌بایست وزن (امتیاز) کامل آن را دریافت کنید زیرا آنها به بسیاری از مکان‌های دیگر هم اشاره می‌کنند. اگر یاهو علاوه بر

^{۱۰} hub matrix

^{۱۱} authority matrix

^{۱۲} Sergey Brin

^{۱۳} Lary Page

صفحه شما به 999 صفحه دیگر هم اشاره می‌کند آن گاه شما تنها اعتباری معادل 0.001 رتبه صفحه‌ی یا هو را به دست می‌آورید. آنها با استفاده از این ایده و استدلال‌های ریاضی فرمول بازگشتی زیر را پیشنهاد کردند:

$$r_i^{(k+1)} = \sum_{j \in I_i} \frac{r_j^{(k)}}{|O_j|},$$

که در آن $r_i^{(k)}$ رتبه صفحه i -ام در تکرار k ، I_i مجموعه صفحاتی که به صفحه i اشاره می‌کنند و $|O_j|$ تعداد پیوندهای خروجی صفحه j است. این الگوریتم نیز مانند هیتس از یک رتبه یکنواخت برای همه صفحات شروع می‌کند. یعنی اگر تعداد صفحات n باشد با $r_i^{(0)} = \frac{1}{n}$ شروع کرده و با تکرار آن را اصلاح می‌کند. این فرآیند را می‌توان به کمک ماتریس‌ها نمایش داد. فرض کنید V_k^T بردار ستونی رتبه‌صفحه در k -امین تکرار باشد. در این صورت می‌توان معادلات فوق برای رتبه‌صفحه را به شکل فشرده زیر نوشت:

$$V_{k+1}^T = H V_k^T,$$

که در آن H ماتریس ابرپیوندی با ستون‌های نرمال شده است (مجموع درایه‌های هر ستون برابر ۱ است)، یعنی

$$h_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{|O_j|}, & \text{اگر پیوندی از صفحه } j \text{ به صفحه } i \text{ باشد} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در اینجا سعی می‌کنیم با یک مثال ساده مسأله را توضیح دهیم [۶]. پنج نفر با نام‌های A, B, C, D و E را فرض کنید که برخی از آنها همدیگر را می‌شناسند و دوست هستند. ماتریس دوستی زیر را در نظر بگیرید.

$$H = \begin{pmatrix} & A & B & C & D & E \\ A & 0 & 1 & 1/3 & 0 & 1/2 \\ B & 1/4 & 0 & 1/3 & 0 & 1/2 \\ C & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 1/4 & 0 & 1/3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

با توجه به ستون‌های هر حرف درواقع این ماتریس نشان می‌دهد که A با هر چهار نفر دیگر دوست است و به دوستی همه‌ی آنها وزن مساوی می‌دهد، B و D هر کدام فقط یک دوست دارند، C سه دوست دارد و E دو دوست دارد. دقت کنید که وزن دوستی‌ها برابر است. بنابراین امتیاز دوستی برای A از این دیدگاه که چه

کسانی و با چه وزنی دوست او هستند، عبارت است از مجموع سطر A . با این توضیح داریم:

$$\begin{aligned} F(A) &= \frac{11}{6} & F(B) &= \frac{13}{12} & F(C) &= \frac{1}{4} \\ F(D) &= \frac{1}{4} & F(E) &= \frac{19}{12}. \end{aligned}$$

بیاید ببینیم در نهایت چه کسی بیشترین امتیاز دوستی را دارد؟ در ابتدا شما به همه امتیاز برابر می‌دهید یعنی $[\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}]$. حال روش تکراری زیر را به کار می‌بریم

$$V_{n+1} = HV_n,$$

که در آن $V_0 = [\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}]^T$ یعنی ترانهاده ماتریس سطری اولیه. این همان روش توانی است^{۱۴} که مقدار ویژه غالب و بردار ویژه خاصی متناظر با آن را به ما خواهد داد. در اینجا منظور از مقدار ویژه غالب، مقدار ویژه‌ای مانند λ است که به ازای هر مقدار ویژه دیگر مانند μ ، $|\mu| \leq \lambda$ ثابت می‌شود که بردار ویژه‌ای با درآیه‌های نامنفی متناظر با λ وجود دارد (قضیه ۱۰.۲ زیر را ببینید).

این بردار ویژه را V می‌نامیم، داریم

$$HV = \lambda V.$$

اگر $V = [v_1, \dots, v_5]$ آنگاه امتیاز نفر i -ام برابر است با λv_i .

اکنون مفهوم دوستی را با پیوند در یک وبگاه جایگزین می‌کنیم.

- وبگاه A دوست وبگاه B است، اگر یک ابرپیوند به وبگاه B داشته باشد.
- گوگل با گشتن در وب متوجه می‌شود که چه کسی دوست چه کسی است.
- تعداد "دوستان" یک وبگاه برابر است با تعداد پیوندهایی که در آن وبگاه مشاهده می‌شود.
- ماتریس H در حال گشتن در وب ساخته می‌شود، و پس از آن که ساخته شد مقدار ویژه مورد نظر را محاسبه می‌کنیم تا تقریبی برای رتبه‌صفحه به دست آید.

قضیه زیر که فرم اولیه آن برای ماتریس‌های با درایه‌های اکیدا مثبت توسط پرون^{۱۵} و بعداً تعمیمی از آن توسط فروبینیوس^{۱۶} ثابت شده، وجود بردار ویژه‌ای با درایه‌های نامنفی را برای مقدار ویژه غالب، تضمین می‌کند.

قضیه ۱۰.۲. فرض کنید $H = (h_{ij})$ یک ماتریس مربعی حقیقی با درایه‌های نامنفی باشد. در این صورت مقدار ویژه نامنفی λ برای H وجود دارد که به ازای هر مقدار ویژه دیگر مانند μ ، $|\mu| \leq \lambda$ و همچنین بردار ویژه‌ای متناظر با آن با درایه‌های نامنفی وجود دارد. λ یک ریشه ساده چند جمله‌ای مشخصه H است.

^{۱۴}power method

^{۱۵}Perron

^{۱۶}Frobenius

البته اثبات وجود یک جواب و پیدا کردن جواب در عمل، معمولاً دو مقوله جدا هستند و پیدا کردن روشی که منجر به یافتن جواب شود بسیار مهم است. در واقع روش تکراری فوق گاهی مشکل همگرایی و یا افتادن در دور دارد. برای حل این مشکل برین و پیچ به اصلاح این روش پرداخته و با استفاده از ماتریس‌های تصادفی الگوریتم‌های دیگری برای یافتن پاسخ‌های مناسب ساختند. در اینجا به جزئیات کار نمی‌پردازیم بلکه به طور مختصر متذکر می‌شویم که در این روش‌ها درایه‌های ماتریس H ، احتمال وجود پیوند بین دو صفحه خواهند بود که پیدا کردن توزیع این احتمال هم خود از اهمیت برخوردار است و پس از آن بایستی تغییرات مناسبی روی این ماتریس اعمال کرد تا همگرایی جواب را تضمین کند. این نشان می‌دهد که برای حل مسائلی از این نوع دانش ریاضی اساس کار است و با طرح هر مسأله جدید سطح و پیچیدگی دانش مورد نیاز نیز بالاتر خواهد رفت. در واقع امروزه الگوریتم‌های بسیار پیشرفته‌تر به وجود آمده‌اند که کار جستجو را بسیار موثرتر و سریع‌تر انجام می‌دهند ولی بنیاد همه آنها بر قضایای ریاضی استوار است.

۳. جبرخطی در داده‌پردازی

روش تحلیل مولفه‌های اصلی^{۱۷}، PCA

در جهان امروز، روزانه داده‌های زیادی در سایت‌های اجتماعی مختلف تولید می‌شود. در واقع ۹۰ درصد از داده‌های امروزی در سه یا چهار سال گذشته تولید شده است. این داده‌ها برای جمع‌آوری اطلاعات مهم و مرتبط باید به درستی تجزیه و تحلیل شوند. PCA تکنیک کاهش ویژگی برای استخراج ویژگی‌های غالب از داده‌ها است، به این معنی که یک مجموعه بزرگ از متغیرها را طوری به مجموعه کوچکتري کاهش می‌دهد که هنوز هم بیشتر ویژگی‌های مهم حفظ شده باشند. این ویژگی‌های استخراج شده به عنوان «مولفه‌های اصلی» شناخته می‌شوند. کاهش تعداد متغیرها می‌تواند به بهای کاهش دقت تمام شود، ولی مزیت این روش این است که کمی از دقت را به عنوان بهایی در ازای ساده‌تر کردن مسأله می‌پردازد، زیرا پردازش داده‌های کمتر در الگوریتم‌های یادگیری ماشین ساده‌تر و سریع‌تر است و از وارد کردن داده‌های اضافی در محاسبات اجتناب می‌شود. این روش را می‌توان به شرح زیر توصیف کرد [۴]:

مجموعه متغیرهای اولیه یک فضای برداری را تشکیل می‌دهند.

- یک مولفه اصلی ترکیب خطی از متغیرهای اولیه است.
- مولفه‌های اصلی به گونه‌ای استخراج می‌شوند که اولین مولفه اصلی حداکثر واریانس در مجموعه داده را توصیف می‌کند.
- مولفه اصلی دوم سعی می‌کند واریانس باقی مانده‌ی مجموعه داده را توصیف کند و با مؤلفه اصلی اول همبستگی ندارد.

- مولفه اصلی سوم سعی می‌کند واریانس را شرح دهد که با دو مولفه اصلی اول توصیف نمی‌شود، و به همین ترتیب.

اولین مولفه مهمترین است و بعد از آن دومی و سومی و الی آخر. حال چگونه مولفه اصلی را پیدا کنیم؟ از نظر هندسی مولفه‌های اصلی جهت‌هایی در فضای داده هستند که متناظر با مقادیر بیشین واریانس می‌باشند، به بیان دیگر خطوطی که بیشترین اطلاعات داده را دربر دارند. ارتباط بین واریانس و اطلاعات در اینجا اینگونه است که هر چقدر واریانس در طول یک خط بیشتر باشد، پراکندگی داده در طول آن بیشتر است و هرچقدر این پراکندگی بیشتر باشد به این معنی است که اطلاعات بیشتری روی آن قرار دارد. ثابت می‌شود که مولفه‌های اصلی، بردارهای ویژه ماتریس کوواریانس مجموعه‌ی داده است. یعنی ماتریسی که درایه i, j آن کوواریانس داده i و داده j باشد. از آنجا که $cov(i, i) = var(i)$ و $cov(i, j) = cov(j, i)$ ماتریس حاصل یک ماتریس متقارن خواهد بود که روی قطر، واریانس هر متغیر را دارد. هر بردار ویژه این ماتریس جهتی را نشان می‌دهد که بیشترین واریانس (اطلاعات) را در بر دارد و مقدار ویژه نظیر نیز مقدار این واریانس را به دست می‌دهد. با توجه به این که اغلب با داده‌های بزرگ سروکار داریم، محاسبه بردارها و مقادیر ویژه این ماتریس‌های بزرگ خود نیاز به الگوریتم‌های مفصلی دارد که با استفاده از قضایا و روش‌های ریاضی این کمیت‌ها را محاسبه می‌کنند.

۴. فشرده سازی تصویر

یک تصویر را می‌توان در یک ماتریس ذخیره کرد به‌طوری که هر درایه آن مقدار پیکسل نظیر آن باشد. به عنوان مثال یک عکس سیاه و سفید می‌تواند در فرمت PNG ذخیره شود که در آن هر پیکسل مقدار ۰ یا ۱ را دارد. فرض کنید تصویری با اندازه 480×423 پیکسل داشته باشیم. یعنی ماتریسی مانند M با اندازه 480×423 داریم که درایه‌های آن ۰ یا ۱ هستند. این ماتریس را با کمک روش تجزیه مقدار منفرد^{۱۸} به صورت $M = UDV^T$ تجزیه می‌کنیم، که در آن U یک ماتریس یکانی 480×480 ، V یک ماتریس یکانی 423×423 و D یک ماتریس 480×423 است که دارای یک زیر ماتریس قطری $r \times r$ می‌باشد، که به تعداد r از مقادیر منفرد M را روی قطر خود دارد و سایر درایه‌های D صفرند. در اینجا منظور از مقادیر منفرد، ریشه دوم مقادیر ویژه (الزاما نامنفی) ماتریس متقارن $M^T M$ است.

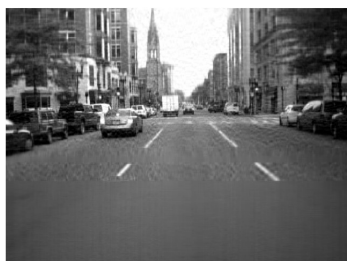
حال فقط با کمک ۳۰ مقدار منفرد اولیه تصویر را بازسازی می‌کنیم. تصویر دوم از نظر کیفی تفاوت زیادی با تصویر اول ندارد ولی با کاهش عناصر روی قطر به ۳۰ تا، به جای $480 \times 423 = 203040$ پیکسل، تعداد 480×30 پیکسل در U و 30×423 تا در V^T داریم. به این ترتیب

$$m = 30(1 + 480 + 423)$$

تعداد کل پیکسل‌ها خواهد بود که حدود ۱۳ درصد مقدار اولیه است. در شکل ۱ دو تصویر (آ) و (ب) را مقایسه کنید. تصور کنید که موسسه‌ای با هزار کارمند هر روز بخواهد با استفاده از دوربین چهره افراد وارد شده

^{۱۸} singular value decomposition (SVD)

به محل کار را شناسایی کند. این موسسه باید پایگاه داده‌ای حاوی حداقل چهار عکس از هر نفر داشته باشد، یعنی ۴۰۰۰ عکس. در زمان ورود هر کارمند باید عکسی از او گرفته شود و با آنچه در پایگاه داده ذخیره شده مقایسه گردد. مسلماً وقتی از روش فشرده سازی استفاده شده باشد، تعداد پیکسل‌های مقایسه شونده به طور معنی داری کمتر و زمان مقایسه نیز کوتاهتر خواهد بود.



(ب) بعد از فشرده‌سازی



(آ) قبل از فشرده‌سازی

شکل ۱. مقایسه دو تصویر

۵. سخن پایانی

مثال‌های فوق نمونه کوچکی از کاربردهای جبرخطی در فرآیند توسعه سریع علمی در روزگار ما هستند و این مثال‌ها خود به اشکال گوناگون در جاهای مختلفی نظیر مهندسی، پزشکی، اقتصاد و ... کاربرد دارند. این نشان می‌دهد که اگر پیشرفت‌های تئوری ریاضی نبود، جهان ما شکل دیگری داشت.

مراجع

- [۱] م. میرزاخانی، پارادوکسی نزدیک به جادو، <https://dmath-860.niloblog.com/p/44>.
- [2] S. Brin and L. Page, *The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine*, Computer Networks and ISDN Systems, **33** (1998) 107–117.
- [3] S. Brin, L. Page, R. Motwami and Terry Winograd, *The PageRank citation ranking: bringing order to the web*, Technical report, Computer Science Department, Stanford University, 1998.
- [4] S.M. Holland, *Principal Components Analysis (PCA)*, in: Encyclopedia of Environmental Change, edited by: J.A. Matthews, pp. 1–12, SAGE Publications, 2019. <https://doi.org/10.4135/9781446247501.n3114>.
- [5] J. Kleinberg, *Authoritative sources in a hyperlinked environment*, J. ACM. **46** (1999) 604–632.
- [6] R.C. Mittal, *Some applications of linear algebra in computer science*, Lectures in Jaypee Inst. Inform. Tech. 2021.



AN EFFICIENT METHOD FOR SOLVING PARABOLIC INVERSE PROBLEMS WITH OVERSPECIFY CONDITION

SIMIN SHEKARPAZ¹ AND HOSSEIN AZARI^{1*}

¹Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

s_shekarpaz@sbu.ac.ir

h_azari@sbu.ac.ir

Abstract. In this paper, the parabolic inverse problem with the unknown source parameter is introduced and we solve the problem using the operator splitting method. To solve this problem, it is necessary to determine the source parameter using an overspecify condition, and then by separating the problem and converting it into simpler sub-problems, each sub-problem is solved using Fourier transforms. Also, while providing numerical examples of efficiency and convergence, the proposed method for solving the parabolic inverse problem is shown.

2020 Mathematics Subject Classification. 65M12, 65M32, 80A23

Keywords. Parabolic inverse problem, operator splitting method, Fourier transform

Date: Received 4-12-2021 Revised 25-4-2022 Accepted 28-6-2022 Available Online 13-7-2022

*Corresponding author.



یک روش کارا برای حل مسائل معکوس سهموی با شرط اضافی

سیمین شکرپز^۱ و حسین آذری^{*}

^۱ دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

s_shekarpoz@sbu.ac.ir

h_azari@sbu.ac.ir

چکیده. در این مقاله، مسأله معکوس سهموی با پارامتر منبع مجهول معرفی شده و با استفاده از روش جداسازی عملگر به حل مسأله پرداخته‌ایم. برای حل این مسأله، در ابتدا با استفاده از شرط اضافی به تعیین پارامتر منبع پرداخته و سپس با جداسازی مسأله و تبدیل آن به زیرمسائل ساده تر، هر زیر مسأله با استفاده از تبدیلات فوریه حل می‌شود. هم چنین ضمن ارائه مثال‌های عددی کارایی و همگرایی روش پیشنهادی برای حل مسأله معکوس سهموی نشان داده می‌شود.

۱. معرفی

مسائل معکوس از سال‌های دور مورد توجه بوده است. اولین مطالعات درباره‌ی مسائل معکوس و بدووضع به نیمه اول قرن بیستم برمی‌گردد که موضوعات آن‌ها به مسائلی در فیزیک (مسائل معکوس در نظریه پراکندگی ذرات)، ژئوفیزیک (مسائل معکوس در کاوش‌های الکتریکی، زلزله شناسی و نظریه پتانسیل)، ستاره شناسی و دیگر علوم وابسته بود. در سال‌های اخیر، حوزه کاربرد نظریه‌ی مسائل معکوس تقریباً به همه علوم که از روش‌های ریاضی استفاده می‌کنند توسعه داده شده است.

امروزه تعداد زیادی از نشریات علمی به طور مستقیم و یا غیرمستقیم مسائل معکوس و بدووضع را بررسی می‌کنند. مسائل هدایت گرما، در دسته معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از نوع سهموی جای می‌گیرند.

2020 Mathematics Subject Classification. 65M12, 65M32, 80A23.

کلید واژگان. مسأله معکوس سهموی، روش جداسازی عملگر، تبدیلات فوریه.

تاریخ: دریافت ۱۴۰۰/۹/۱۳ بازنگری ۱۴۰۱/۲/۵ پذیرش ۱۴۰۱/۴/۷ انتشار بر خط ۱۴۰۱/۴/۲۲

^{*} نویسنده مسئول

نحوه ارجاع به این مقاله: س. شکرپز، ح. آذری، یک روش کارا برای حل مسائل معکوس سهموی با شرط اضافی، به سوی

علوم ریاضی، ۲ (۱۴۰۱)، شماره ۱، ۹۱-۱۰۹.

در مسائل مستقیم هدایت گرما، هندسه، شرایط مرزی، شرایط اولیه و خواص ترموفیزیکی معلوم می‌باشند و هدف محاسبه توزیع دما در داخل دامنه جواب می‌باشد. در مسائل معکوس هدایت گرما، یکی یا تعدادی از این اطلاعات نامعلوم بوده و هدف، تخمین آنها با استفاده از اطلاعات اضافی دیگر مانند دماهای اندازه‌گیری شده در داخل ناحیه جواب می‌باشد.

به دلیل اهمیت و کاربردهای فراوان مسائل معکوس، در این نوشته به بررسی و حل عددی مسأله معکوس سهموی مربوط به تعیین پارامتر منبع با شرط اضافی می‌پردازیم که به صورت زیر می‌باشد:

$$u_t = u_{xx} + p(t)u(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (1.1)$$

با شرط اولیه

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.1)$$

و شرایط مرزی

$$u(0, t) = g_1(t), \quad u(1, t) = g_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.1)$$

و شرط اضافی به یکی از صورت‌های

$$u(x^*, t) = E(t), \quad 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq t \leq T, \quad (4.1)$$

یا

$$\int_0^l K(x)u(x, t)dx = E(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.1)$$

مفروض است که در آن $\Omega_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ و $T > 0$. توابع u_0 ، g_1 ، g_2 ، f ، K و E توابع معلوم، اعداد T و x^* اعداد مثبت مشخص و توابع $u(x, t)$ و $p(t)$ مجهول هستند. به علاوه برای برخی اعداد ثابت $\rho > 0$ ، هسته $K(x)$ در رابطه زیر صدق می‌کند،

$$\int_0^1 |K(x)|dx \leq \rho. \quad (6.1)$$

این نوع معادلات در مطالعات مربوط به فرآیند هدایت گرمایی، قضیه کنترل و نفوذ شیمیایی کاربردهای زیادی دارند (مراجع [۶، ۷] را ببینید).

معادله (۱.۱) برای شرح یک فرآیند انتقال گرما با یک پارامتر منبع استفاده می‌شود و معادله (۴.۱) درجهی حرارت در نقطه x^* در زمان t را نمایش می‌دهد. هم چنین با استفاده از شرط اضافی (۵.۱) می‌توان انرژی مطلوب $E(t)$ را روی دامنه تعیین کرد.

مثال‌های متفاوت دیگری می‌توان یافت که شامل شرط انتگرالی اضافی می‌شوند، مثلاً انتقال گرما در یک لوله نازک در انتشار ذره در پلاسما [۱۹، ۱۰]. برای مشاهده کاربردهای بیشتر از این مسأله و مسائل مشابه مربوط به تعیین پارامتر منبع در فضاهای یک بعدی و n -بعدی به [۸، ۱۵، ۲۴-۲۸] مراجعه کنید.

وجود، یکتایی و وابستگی جواب‌های این مسأله در مراجع [۵، ۷، ۳۳] به اثبات رسیده است.

روش‌های زیادی برای حل عددی این مسأله وجود دارد، مانند تفاضل متناهی، عنصر متناهی، عنصر مرزی، طیفی و حجم متناهی. به عنوان مثال در [۵] روش تفاضل متناهی برای حل این مسأله به کار رفته است اما در مورد تحلیل همگرایی و پایداری صحبتی به میان نیامده است. در مرجع [۹]، روش اویلر پسرو برای حل مسأله با شرایط اضافی (۴.۱) به کار رفته است. هم چنین روش هم‌مکانی سینک برای حل مسأله معکوس با شرایط مرزی غیرموضعی در مرجع [۳۰] به کار رفته است. با استفاده از این روش، مسأله به یک دستگاه از معادلات انتگرالی ولترا تبدیل شده و همگرایی روش اثبات می‌شود.

در مراجع [۴، ۱۸، ۲۱] شرایط وجود و یکتایی برای جواب‌های مسأله معکوس با دو پارامتر مجهول مورد مطالعه قرار گرفته است. هم چنین مسائل مشابه در مراجع [۲، ۱۶، ۱۷، ۲۰، ۲۹، ۳۵، ۳۶] مورد مطالعه قرار گرفته است اما در مورد جواب‌های عددی با شرایط اضافی انتگرالی صحبتی به میان نیامده است.

در این مقاله، از روش‌های جداسازی عملگر برای حل مسأله معکوس سهموی مربوط به تعیین پارامتر منبع با شرط اضافی استفاده می‌شود. در این روش، با جداسازی معادلات پیچیده و تبدیل آن به زیر مسائل ساده‌تر، هر زیرمسأله با روش‌های انتگرال‌گیری مناسب حل می‌شود که با شرایط اولیه به هم مربوط هستند. سپس با ترکیب جواب‌های حاصل از زیر مسائل، جواب مسأله اصلی به دست می‌آید.

اولین نتایج حاصل در مورد جداسازی عملگر، مربوط به روش جداسازی لی-تروترو^۱ (مرجع [۳۲] را ببینید) در سال ۱۹۵۰ می‌باشد. در سال‌های ۱۹۶۰-۱۹۵۰ پیشرفت‌های زیادی در زمینه این روش‌ها در روسیه به وجود آمد که می‌توان از نتایج بدست آمده توسط مارچوک^۲، یانکو^۳ و سامارسکی^۴ اشاره نمود. اساسی‌ترین کار پژوهشی در این حوزه کاربرد روش‌های لی^۵ و استرانگ^۶ در حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی می‌باشد (مراجع [۲، ۲۸، ۳۱، ۳۴] را ببینید). در این روش‌ها، با به‌کارگیری روش‌های مرتبه بالاتر (مراجع [۴، ۲۲] را ببینید) خطای جداسازی کاهش می‌یابد. هم چنین با انتخاب مناسب تر تابع تکرار اولیه، روش تکرار بهبودیافته حاصل می‌شود که می‌توان مرتبه دقت را افزایش داد (مرجع [۱۳] را ببینید).

این مقاله شامل بخش‌های زیر می‌باشد: در بخش دوم پیش‌نیازهایی را که در طول این مقاله به آن‌ها نیاز داریم، بیان می‌کنیم. در بخش سوم روش جداسازی عملگر برای حل مسأله معکوس ارائه می‌شود. در بخش چهارم نیز با ارائه مثال‌های عددی کارایی الگوریتم پیشنهادی را برای حل مسأله فوق نشان می‌دهیم.

Lie-Trotter^۱Murchuk^۲Yanenko^۳Samarski^۴Lie^۵Strang^۶

۲. پیش نیازها

به منظور تحلیل خطای روش جداسازی عملگر برای حل مسأله (۱.۱)-(۴.۱) یا (۱.۱)-(۳.۱) با شرط اضافی (۵.۱)، نظریه نیم گروه های C_0 مورد استفاده قرار می گیرد. با به کارگیری تبدیلات

$$u(x, t) = y(x, t) + z(x, t), \quad z(x, t) = g_1(t)(1 - x) + g_2(t)x,$$

داریم

$$y_t = y_{xx} + p(t)y + g(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (۱.۲)$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$y(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$y(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

با شرط اضافی به صورت زیر

$$y(x^*, t)dx = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (۲.۲)$$

یا

$$\int_0^1 K(x)y(x, t)dx = \chi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (۳.۲)$$

که در آن

$$g(x, t) = f(x, t) - z_t(x, t) + p(t)z(x, t), \quad y_0(x) = u_0(x) - z(x, 0),$$

$$\psi(t) = E(t) - z(x^*, t), \quad \chi(t) = E(t) - \int_0^1 K(x)z(x, t)dx.$$

سپس نظریه نیم گروه برای مسأله (۱.۲) با شرایط مرزی همگن به کار برده می شود و جواب ها با شرایط مربوطه به دست می آیند.

با فرض این که $y(x, t)$ جوابی از مسأله (۱.۲)-(۲.۲) باشد، می توان نوشت،

$$y_{xx}(x^*, t) + p(t)y(x^*, t) + g(x^*, t) = \psi'(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

همچنین با در نظر گرفتن شرط انتگرال

$$\int_0^1 K(x)(y_{xx} + p(t)y + g(x, t))dx = \chi'(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (۴.۲)$$

لذا داریم

$$p(t) = \frac{\psi'(t) - y_{xx}(x^*, t) - g(x^*, t)}{\psi(t)}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.2)$$

و به طور مشابه برای شرط اضافی به فرم (۳.۲) می توان نوشت:

$$p(t) = \frac{\chi'(t) - \int_0^1 K(x)y_{xx}dx - \int_0^1 K(x)g(x, t)dx}{\chi(t)}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (6.2)$$

فرض کنیم $Y(t) = [x \mapsto y(x, t)]$ و $G(t) = [x \mapsto g(x, t)]$. مسأله مقدار اولیه زیر را در نظر می گیریم،

$$\begin{aligned} Y_t &= AY + F(t, Y), & (x, t) \in \Omega_T, \\ Y(0) &= Y_0, & 0 \leq x \leq 1, \end{aligned} \quad (7.2)$$

که در آن A یک عملگر خطی بی کران است (در این جا A مشتق دوم در جهت x می باشد) و

$$\begin{aligned} F(t, Y) &: [0, T] \times X \longrightarrow Y, \\ F(t, Y) &= p(t)Y + G(t), \end{aligned}$$

تابع غیرخطی از متغیرهای t و $Y(t)$ می باشد و $p(t)$ با رابطه (۵.۲) یا (۶.۲) به دست می آید. در این رابطه، X فضای جواب مسأله (۱.۲) می باشد.

۱.۲ روش جداسازی عملگر در این بخش مسأله مقدار اولیه (۷.۲) را روی بازه $[0, T]$ در نظر می گیریم. فرض کنیم $Y_n \approx Y(t^n)$ جواب عددی در زمان $t^n = n\tau$ و با طول گام τ باشد، در این صورت با به کارگیری روش جداسازی لی، زیرمسائل زیر را روی هر زیربازه $[t^n, t^{n+1}]$ در نظر می گیریم،

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= Av, & v(t^n) &= Y_n, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= F(t, w), & w(t^n) &= v(t^{n+1}), \end{aligned} \quad (8.2)$$

یا

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= F(t, w), & w(t^n) &= Y_n, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= Av, & v(t^n) &= w(t^{n+1}). \end{aligned} \quad (9.2)$$

زیرمسائل فوق می‌توانند به صورت کارا حل شوند که در آن Y_n تقریب جداسازی در $t = t^n$ می‌باشد. با به‌کارگیری الگوریتم‌های عددی برای حل زیرمسائل (۹.۲)، جواب می‌تواند به صورت زیر به‌دست بیاید،

$$\begin{aligned} w(t^{n+1}) &= \psi_\tau w(t^n), & w(t^n) &= Y_n, \\ v(t^{n+1}) &= \phi_\tau v(t^n), & v(t^n) &= w(t^{n+1}), \end{aligned}$$

که در آن زیر مسائل جداسازی با شرایط اولیه به هم مربوط می‌شوند. بنابراین جواب تقریبی به صورت $Y_{n+1} = \phi_\tau \psi_\tau(Y_n)$ می‌باشد.

۳. روش جداسازی عملگر برای حل مسأله منبع معکوس سهموی

در این بخش روش جداسازی عملگر لی برای محاسبه جواب‌های عددی در هر گام زمانی به کار می‌رود. با فرض مقادیر تقریبی $u_{sp}(x, t)$ روش جداسازی عملگر در n -امین گام، مقادیر $p(t)$ با استفاده از شرایط اضافی به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$p(t) = \frac{\psi'(t) - y_{xx}(x^*, t) - g(x^*, t)}{\psi(t)}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (۱.۳)$$

یا

$$p(t) = \frac{\chi'(t) - \int_0^1 K(x) y_{xx} dx - \int_0^1 K(x) g(x, t) dx}{\chi(t)}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (۲.۳)$$

که در آن $y(x, t)$ جواب مسأله متناظر با شرایط مرزی همگن می‌باشد. در نتیجه با استفاده از مقادیر محاسبه شده $p(t)$ در n -امین گام زمانی، زیرمسائل (۹.۲) به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$w_t = F(t, w) = p(t)w + g(x, t), \quad t^n \leq t \leq t^{n+1}, \quad w(x, t^n) = u_{sp}(x, t^n), \quad (۳.۳)$$

و

$$v_t = Av = \partial_x^2 v, \quad t^n \leq t \leq t^{n+1}, \quad v(x, t^n) = w(x, t^{n+1}), \quad (۴.۳)$$

که در آن $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ و N تعداد نقاط شبکه در بعد زمان است. زیرمسائل فوق برای محاسبه مقادیر تقریبی $u_{sp}(x, t)$ در $(n+1)$ -امین گام زمانی حل می‌شوند.

۱.۳ تبدیلات فوریه برای حل زیرمسائل جداسازی برای حل زیرمسائل (۳.۳)-(۴.۳) با شرایط مرزی متناوب، تبدیل فوریه سریع به کار برده می‌شود. هم چنین در موردی که شرایط مرزی دیریکله و نامتناوب باشند، روش تبدیل فوریه سینوسی استفاده می‌شود. تبدیل فوریه کسینوسی نیز می‌تواند برای شرایط مرزی نیومن و نامتناوب استفاده شود.

مسأله مقدار اولیه (۳.۳)-(۴.۳) روی دامنه $[0, 1] \times [0, T]$ را در نظر بگیرید. با فرض این که شرایط مرزی متناوب باشند، تابع $w(x, t)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$w(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{w}_k(t) e^{ik\pi x}, \quad (۵.۳)$$

که در آن ضرایب فوری به صورت زیر هستند:

$$\hat{w}_k(t) = \int_0^1 w(x, t) e^{-ik\pi x} dx. \quad (۶.۳)$$

فرض کنیم شبکه یکنواخت از $M + 1$ نقطه به صورت زیر را داشته باشیم،

$$x_j = \frac{j}{M}, \quad j = 0, 1, \dots, M.$$

با شرایط مرزی تناوبی، داریم $w(x_M, t) = w(x_0, t)$. بنابراین $w(x, t)$ در نقاط x_j می‌تواند به صورت زیر تقریب زده شود،

$$w(x_j, t) = \sum_{k=0}^{M-1} \hat{w}_k(t) e^{ik\pi j/M}, \quad (۷.۳)$$

که در آن

$$\hat{w}_k(t) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} w(x_j, t) e^{-ik\pi j/M}. \quad (۸.۳)$$

این رابطه تبدیل فوری گسسته تابع $w(x, t)$ نامیده می‌شود و می‌تواند برای محاسبه مقادیر تقریبی $w(x, t)$ به‌کار برده شود.

مقدار w_0 را به‌عنوان جواب اولیه معادله (۳.۳) در زمان ثابت t^n در نظر بگیرید که برابر مقدار اولیه Y_0 می‌باشد. با به‌کارگیری تبدیل فوری سریع، داریم

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{M-1} \hat{w}_k(t) e^{ik\pi x} &= p(t) \sum_{k=0}^{M-1} \hat{w}_k(t) e^{ik\pi x} + \sum_{k=0}^{M-1} \hat{g}_k(t) e^{ik\pi x}, \\ \hat{w}_k(0) &= \hat{w}_{0k}, \end{aligned} \quad (۹.۳)$$

و در نتیجه،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{w}_k(t) &= p(t) \hat{w}_k(t) + \hat{g}_k(t), \\ \hat{w}_k(0) &= \hat{w}_{0k}. \end{aligned} \quad (۱۰.۳)$$

با حل معادله (۱۰.۳) می‌توان نوشت،

$$\hat{w}_k(t) = e^{\int_0^t p(s)ds} \hat{w}_{0k} + \int_0^t e^{\int_s^t p(\sigma)d\sigma} \hat{g}_k(s) ds, \quad k = 0, 1, \dots, M-1, \quad (11.3)$$

که در آن ضرایب فوریه $w_0(x)$ هستند و با رابطه (۸.۳) محاسبه می‌شوند و $\hat{g}_k(s)$ ضرایب فوریه تابع $g(x, s)$ می‌باشند. انتگرال‌ها در رابطه (۱۱.۳) با استفاده از قاعده سیمپسون تقریب زده می‌شوند و جواب معادله (۳.۳) محاسبه خواهد شد که یک مقدار اولیه برای معادله (۴.۳) می‌باشد، یعنی $v(x, 0) = w(x, t)$.

به طور مشابه، برای محاسبه جواب معادله (۴.۳)، داریم:

$$v(x, t) = \sum_{k=0}^{M-1} \hat{v}_k(t) e^{ik\pi x}, \quad (12.3)$$

و با جایگذاری در معادله (۴.۳)، می‌توان نوشت،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{v}_k(t) &= -k^2 \pi^2 \hat{v}_k(t), \\ \hat{v}_k(0) &= \hat{v}_{0k}. \end{aligned} \quad (13.3)$$

با حل رابطه‌ی اخیر داریم،

$$\hat{v}_k(t) = e^{-k^2 \pi^2 t} \hat{v}_{0k}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1. \quad (14.3)$$

بنابراین، جواب $v(x, t)$ محاسبه می‌شود که متناظر با مقدار $v(x, t^{n+1})$ می‌باشد. با به‌کارگیری فرمول جداسازی عملگر لی، داریم:

$$y(x, t^{n+1}) = v(x, t^{n+1}),$$

و مقادیر $u_{sp}(x, t)$ در $(n+1)$ -امین گام به صورت

$$u_{sp}(x, t^{n+1}) = y(x, t^{n+1}) + z(x, t^{n+1})$$

محاسبه خواهد شد.

برای حل مسأله منبع معکوس فرضی با شرایط مرزی دیریکله و نامتناوب

$$u(., t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T],$$

تبدیل فوریه سینوسی و برای شرایط مرزی نیومن

$$\frac{\partial u}{\partial x}(., t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T],$$

تبدیل فوریه کسینوسی به کار می‌رود (مرجع [۲۳] را ببینید).

مسأله (۳.۳) را روی $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$ با شرایط اولیه و مرزی مفروض در نظر می‌گیریم. با استفاده از سری فوریه سینوسی، جواب می‌تواند به صورت زیر نوشته شود،

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{w}_k(t) \sin(k\pi x), \quad (15.3)$$

که به صورت زیر تقریب زده می‌شود،

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^M \hat{w}_k(t) \sin(k\pi x), \quad (16.3)$$

و در آن ضرایب فوریه است و داریم $w(x, 0) = w_0$. در رابطه‌ی اخیر تبدیل فوریه سینوسی به صورت زیر خواهد بود،

$$\hat{w}_k(t) = 2 \int_0^1 w(x, t) \sin(k\pi x) dx. \quad (17.3)$$

در نتیجه با جای‌گذاری (۱۶.۳) در رابطه‌ی (۳.۳) می‌توان نوشت،

$$\sum_{k=1}^M \frac{d}{dt} \hat{w}_k(t) \sin(k\pi x) = p(t) \sum_{k=1}^M \hat{w}_k(t) \sin(k\pi x) + \sum_{k=1}^M \hat{g}_k(t) \sin(k\pi x), \quad (18.3)$$

$$\hat{w}_k(0) = \hat{w}_{0k},$$

که به رابطه‌ی زیر منجر می‌شود،

$$\frac{d}{dt} \hat{w}_k(t) = p(t) \hat{w}_k(t) + \hat{g}_k(t), \quad \hat{w}_k(0) = \hat{w}_{0k}. \quad (19.3)$$

جواب معادله‌ی اخیر می‌تواند به صورت زیر نوشته شود،

$$\hat{w}_k(t) = e^{\int_0^t p(s) ds} \hat{w}_{0k} + \int_0^t e^{\int_s^t p(\sigma) d\sigma} \hat{g}_k(s) ds, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (20.3)$$

که در آن ضرایب فوریه تابع $w_0(x)$ هستند که با رابطه‌ی (۱۷.۳) محاسبه می‌شوند. انتگرال‌ها در رابطه‌ی

(۲۰.۳) با استفاده از فرمول سیمپسون تقریب زده می‌شوند. لذا جواب معادله‌ی (۳.۳) محاسبه می‌شود که یک

مقدار اولیه برای (۴.۳) می‌باشد، یعنی $v(x, 0) = w(x, t)$

به طور مشابه، برای محاسبه‌ی جواب معادله‌ی (۴.۳)، داریم

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^M \hat{v}_k(t) \sin(k\pi x), \quad (21.3)$$

و ضریب فوریه ی $\hat{v}_k(t)$ با رابطه ی زیر به دست می آید،

$$\hat{v}_k(t) = 2 \int_0^1 v(x, t) \sin(k\pi x) dx. \quad (22.3)$$

با جایگذاری (21.3) در معادله ی (4.3) داریم،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{v}_k(t) &= -k^2 \pi^2 \hat{v}_k(t), \\ \hat{v}_k(0) &= \hat{v}_{0k}, \end{aligned} \quad (23.3)$$

که در آن، جواب به صورت زیر محاسبه می شود،

$$\hat{v}_k(t) = e^{-k^2 \pi^2 t} \hat{v}_{0k}, \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (24.3)$$

در نتیجه $v(x, t)$ محاسبه می شود که متناظر با $v(x, t^{n+1})$ می باشد. با استفاده از فرمول جداسازی لی، داریم

$$y(x, t^{n+1}) = v(x, t^{n+1}),$$

و در نتیجه مقادیر $u_{sp}(x, t)$ در $(n+1)$ -امین گام محاسبه می شوند.

۴. نتایج عددی

در این بخش برای ارزیابی صحت روش جداسازی عملگر به مرور چندین مثال عددی می پردازیم و هم چنین زیرمسائل با استفاده از تبدیل فوریه حل می شوند. روش تبدیل فوریه سینوسی برای بسط جواب معادلات (3.3)-(4.3) به کار برده می شوند و جواب ها در فضای فوریه در $(n+1)$ -امین گام زمانی محاسبه می شوند. برای اثبات کارایی روش جداسازی عملگر لی، نتایج عددی را برای مقادیر مختلف τ و h محاسبه کرده ایم. فرض کنیم X فضای جواب مسأله (1.1)-(3.1) با شرایط اضافی مفروض به فرم (4.1) یا (5.1) باشد که یک فضای باناخ است (مرجع [12] را ببینید). برای جواب تقریبی $u_{sp}(x, t)$ روی فضای باناخ X نرم جواب ها به صورت زیر محاسبه می شود،

$$\|e_j\|_X = \|u(x_i, T) - u_{sp}(x_i, T)\|_X, \quad (1.4)$$

که در آن e_j متناظر با τ_j ، $(1 \leq j \leq J)$ می باشد و $u_{sp}(x_i, T)$ جواب تقریبی محاسبه شده با استفاده از روش جداسازی در مسأله معکوس می باشد.

در این قسمت نرم ماکزیمم خطا به صورت زیر تعریف می شود،

$$L^\infty - \text{norm} = \max_{1 \leq i \leq M} |u(x_i, T) - u_{sp}(x_i, T)|, \quad (2.4)$$

و مرتبه محاسباتی روش پیشنهادی عبارتست از،

$$\frac{\log(\frac{\|e_j\|}{\|e_{j+1}\|})}{\log(\frac{\tau_j}{\tau_{j+1}})}.$$

هم چنین خطای پارامتر منبع در زمان انتهایی به صورت $e_p(T) = |p(T) - P(T)|$ تعریف می‌شود که در آن $P(T)$ جواب تقریبی است.

مثال ۱.۴. مسأله (۱.۱)-(۴.۱) روی دامنه‌ی $\Omega_T = [0, 1] \times [0, 1]$ با داده های مفروض زیر را در نظر می‌گیریم،

$$f(x, t) = -(1 - e^{4t})(e^{-\frac{\pi^2}{4}t} \cos(\frac{\pi}{2}x)),$$

$$u_0(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x),$$

$$g_1(t) = e^{-\frac{\pi^2}{4}t}, \quad g_2(t) = 0,$$

$$x^* = \frac{1}{2}, \quad E(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi^2}{4}t},$$

و جواب‌های دقیق عبارتند از،

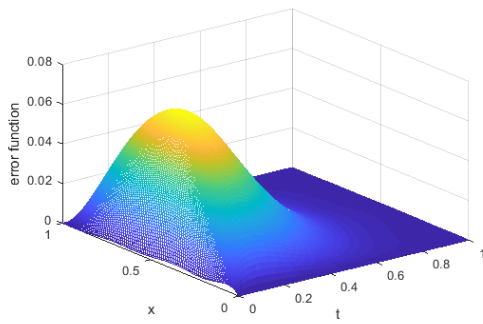
$$u(x, t) = e^{-\frac{\pi^2}{4}t} \cos(\frac{\pi}{2}x), \quad p(t) = 1 - e^{4t}.$$

در این مثال، خطای پارامتر منبع در زمان انتهایی به ازای مقادیر $h = \tau = 0.01$ عبارتست از 1.76×10^{-3} . نرم ماکزیمم خطا و مرتبه محاسباتی روش جداسازی عملگری در جدول ۱ در زمان انتهایی T برای $h = 0.01$ و مقادیر مختلف τ محاسبه شده‌اند.

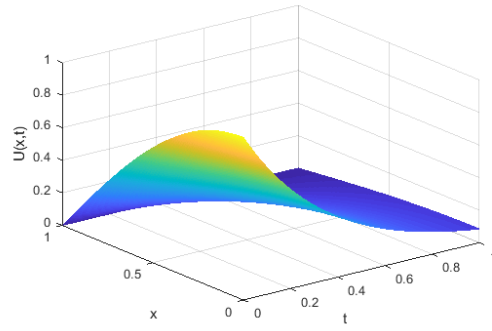
جدول ۱. نرم ماکزیمم خطا و مرتبه محاسباتی روش جداسازی لی در مثال ۱.۴ برای $h = 0.01$ و مقادیر مختلف τ

روش تبدیل فوریه		τ
مرتبه محاسباتی	نرم ماکزیمم	
	0.3708	$\frac{1}{8}$
1.0712	0.1765	$\frac{1}{16}$
1.1537	0.0793	$\frac{1}{32}$
1.3469	0.0312	$\frac{1}{64}$
1.6681	0.0098	$\frac{1}{128}$
1.9784	0.0025	$\frac{1}{256}$
2.3326	0.0005	$\frac{1}{512}$
1.0092	0.0002	$\frac{1}{1024}$

شکل ۱ جواب‌های تقریبی $u_{sp}(x, t)$ و تابع خطای مربوط به روش جداسازی عملگر را در دامنه‌ی $\{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ برای $h = 0.01$ و $\tau = \frac{1}{1024}$ نشان می‌دهد.

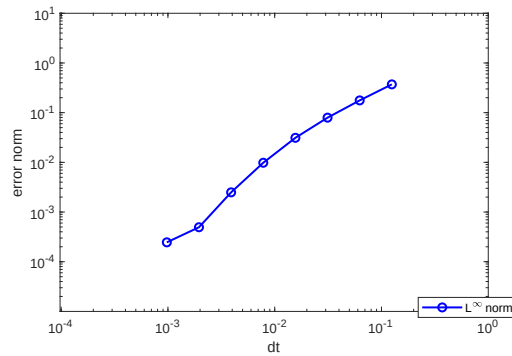


(ب)



(آ)

شکل ۱. جواب‌های تقریبی $u_{sp}(x, t)$ (آ) و تابع خطای مربوطه (ب) در مثال ۱.۴ برای $\tau = \frac{1}{1024}$ و $h = 0.01$



شکل ۲. نرم خطا در مثال ۱.۴ برای $h = 0.01$ و مقادیر مختلف τ

نرم ماکزیمم خطا با استفاده از روش جداسازی عملگر لی در شکل ۲ و به ازای مقادیر مختلف طول گام زمانی نشان داده شده‌اند. در این شکل می‌توان دید که با کاهش طول گام زمانی، نرم خطا نیز کاهش می‌یابد که بیانگر همگرایی روش پیشنهادی می‌باشد. مقایسه نتایج حاصل با موارد مشابه در مراجع [۱۱] و [۱] بیانگر برتری روش فعلی می‌باشد. در این مراجع روش تحلیل هموتوبی و روش کرانک نیکلسون برای حل مسأله (۱.۱)–(۴.۱) بکار برده شده است و کمینه مقدار نرم ماکسیمم خطا 10^{-3} می‌باشد. هم چنین در مراجع ذکر شده نرخ همگرایی در مثال‌های عددی بررسی نشده است. هم چنین با توجه به بکارگیری روش جداسازی عملگر، هر زیر مسأله با روش بهینه متناظر با عملگر موجود حل می‌شود و لذا زمان محاسباتی بکار رفته در روش پیشنهادی کمتر است.

مثال ۲.۴. مسأله (۱.۱)–(۴.۱) را روی دامنه‌ی $\Omega_T = [0, 1] \times [0, 1]$ با داده‌های زیر در نظر می‌گیریم،

$$f(x, t) = ((t - 1) \sin(x) + (1 - 2t) \frac{1}{2} x \sin(x)) e^{-t^3 - t^2 - 1},$$

$$u_0(x) = -\frac{1}{2} \sin(x) e^{-1},$$

$$g_1(t) = 0, \quad g_2(t) = -\frac{1}{2} \sin(1)e^{-t^3-t^2-1},$$

$$x^* = \frac{1}{2}, \quad E(t) = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2}\right)e^{-t^3-t^2-1},$$

و جواب‌های دقیق عبارتند از،

$$u(x, t) = -\frac{1}{2} \sin(x)e^{-t^3-t^2-1}, \quad p(t) = -3t^2 - 1.$$

روش جداسازی لی برای حل این مثال استفاده می‌شود و با استفاده از روش تبدیل فوریه زیرمسائل جداسازی حل می‌شوند. در جدول ۲، مقادیر نرم ماکزیمم خطا برای جواب‌های $u_{sp}(x, t)$ در زمان انتهایی به ازای $h = 0.01$ و مقادیر مختلف τ ارائه شده‌اند که بیان گر کارایی و توانایی روش جداسازی لی برای تولید جواب‌های تقریبی با دقت بالا می‌باشد.

جدول ۲. نرم ماکزیمم خطا و مرتبه محاسباتی در مثال ۲.۴ برای $h = 0.01$ و مقادیر مختلف τ

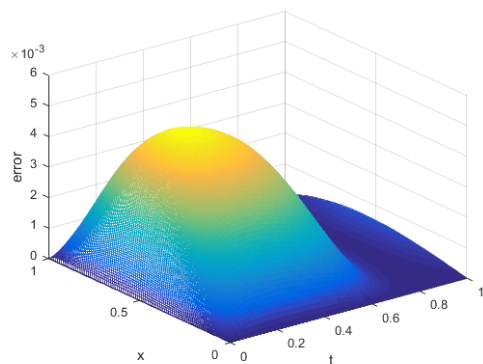
روش تبدیل فوریه		τ
مرتبه محاسباتی	نرم ماکزیمم	
	0.2026	$\frac{1}{8}$
1.0893	0.1005	$\frac{1}{16}$
1.0543	0.0495	$\frac{1}{32}$
1.0430	0.0240	$\frac{1}{64}$
1.0468	0.0113	$\frac{1}{128}$
1.0587	0.0049	$\frac{1}{256}$
1.0784	0.0018	$\frac{1}{512}$
1.1074	0.0005	$\frac{1}{1024}$

شکل ۳ جواب‌های تقریبی و تابع خطای مربوطه در دامنه $\{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ را نشان می‌دهد. خطای پارامتر منبع در زمان انتهایی با مقادیر $h = 0.01$ و $\tau = \frac{1}{1024}$ عبارتست از 0.5×10^{-4} . مقادیر نرم خطا برای جواب‌های $u_{sp}(x, t)$ در زمان انتهایی روی فضای باناخ X در شکل ۴ آورده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش تعداد نقاط شبکه، مقادیر نرم خطا کاهش می‌یابد. مقایسه نتایج حاصل با موارد مشابه در مراجع [۱۱] و [۱] بیانگر برتری روش فعلی می‌باشد. در این مراجع روش تحلیل هموتویی و روش کرانک نیکلسون برای حل مسأله (۱.۱)–(۴.۱) بکار برده شده است و کمینه مقدار نرم ماکسیمم خطا 10^{-3} می‌باشد. همچنین در مراجع ذکر شده نرخ همگرایی در مثال‌های عددی بررسی نشده است.

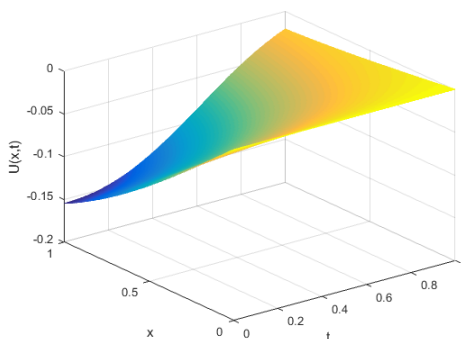
مثال ۳.۴. مسأله (۱.۱)–(۳.۱) و (۵.۱) را روی دامنه $\Omega_T = [0, 1] \times [0, T]$ و با داده‌های زیر در نظر بگیرید،

$$f(x, t) = e^{-t}(-2 \cos(x) - (1 + t^2)(x - 1) \sin(x)),$$

$$u_0(x) = (x - 1) \sin(x),$$

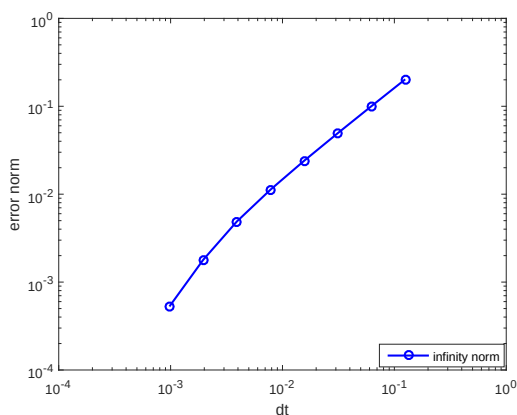


(ب)



(آ)

شکل ۳. جواب‌های تقریبی $u_{sp}(x, t)$ و تابع خطای مربوطه (ب) در مثال ۲.۴ برای $\tau = \frac{1}{1024}$ و $h = 0.01$



شکل ۴. نرم خطا در مثال ۲.۴ برای $h = 0.01$ و مقادیر مختلف τ

$$g_1(t) = g_2(t) = 0,$$

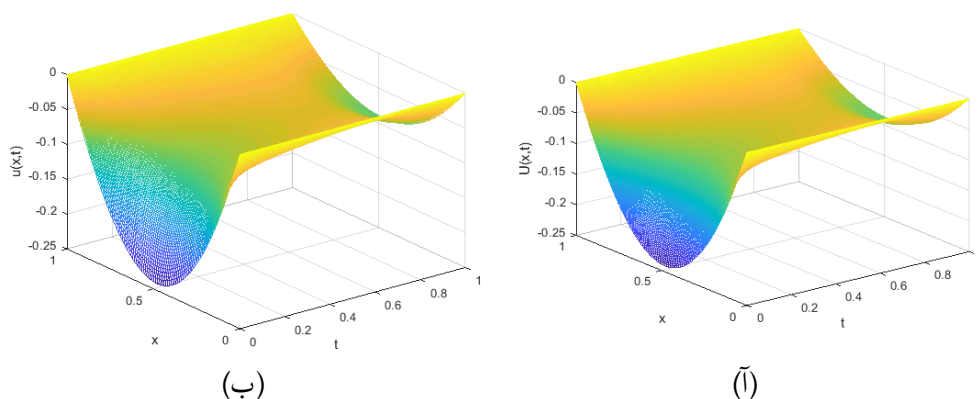
$$K(x) = 1, \quad E(t) = e^{-t}(\sin 1 - 1),$$

جواب‌های دقیق عبارتند از،

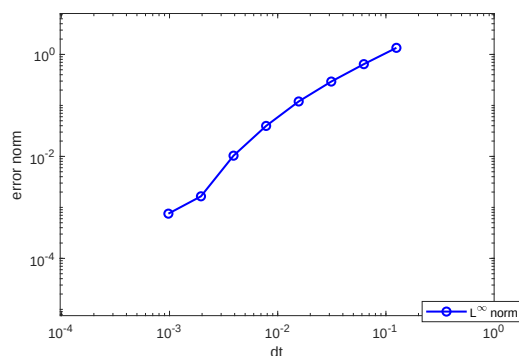
$$u(x, t) = e^{-t}(x - 1) \sin(x), \quad p(t) = 1 + t^2.$$

روش جداسازی لی برای $T = 1$ در این مثال به کار برده می‌شود و نتایج محاسبه می‌شوند. شکل ۵ جواب تقریبی و تابع خطای مربوطه را در زمان انتهایی به ازای $h = 0.01$ و $\tau = \frac{1}{1024}$ نشان می‌دهد. این نتایج صحت بالایی را برای حل این مسأله نشان می‌دهد.

در این مثال، نرم خطا برای پارامتر منبع در زمان انتهایی $T = 1$ عبارتست از 3.09×10^{-4} . به علاوه نرم های مختلف خطا برای جواب‌های $u_{sp}(x, t)$ در زمان انتهایی روی فضای باناخ X در شکل ۶ آورده شده‌اند.



شکل ۵. جواب‌های تقریبی $u_{sp}(x, t)$ و تابع خطای مربوطه (ب) در مثال ۳.۴ برای $T = 1$ در زمان $\tau = \frac{1}{1024}$ و $h = 0.01$



شکل ۶. نرم خطا در مثال ۳.۴ برای $h = 0.01$ و مقادیر مختلف τ

این نتایج برای $h = 0.01$ و مقادیر مختلف τ محاسبه شده‌اند. در این شکل با افزایش تعداد گام‌های زمانی، نرم خطا کاهش می‌یابد که همگرایی روش را نشان می‌دهد.

این مثال در مرجع شماره [۳۷] با استفاده از روش هم‌مکانی سینک حل شده است. در این مرجع با بکارگیری تبدیلات خاص معادله به معادله انتگرال ولترا تبدیل می‌شود و سپس با بکارگیری یک روش صریح و خصوصیات توابع سینک این معادله با یک سیستم از معادلات جبری خطی جایگزین می‌شود. مقدار نرم ماکسیم خطا برای جواب تقریبی در مرجع [۳۷] مقدار 6×10^{-3} می‌باشد. در حالی که با استفاده از روش جداسازی عملگر مقدار متناظر عبارتست از 8×10^{-4} که بیانگر برتری روش پیشنهادی می‌باشد.

۵. نتایج

در این مقاله، روش جداسازی برای حل مسأله معکوس سهموی با شرط اضافی مورد مطالعه قرار گرفته است. برای حل این مسأله، در ابتدا با استفاده از شرط اضافی به تعیین پارامتر منبع پرداخته و سپس با جداسازی مسأله و تبدیل آن به زیرمسائل ساده‌تر، هر زیر مسأله با استفاده از تبدیلات فوریه حل می‌شود. در نتیجه با ترکیب جواب‌های عددی حاصل از زیرمسائل، جواب مسأله مفروض به دست می‌آید. نتایج حاصل

از کاربرد روش جداسازی برای حل مسأله منبع معکوس نشاندهنده کارایی و صحت روش پیشنهادی می‌باشد. هم چنین با کاهش طول گام زمانی خطا کاهش می‌یابد که همگرایی روش را نشان می‌دهد. در کارهای آینده می‌توان از دیگر روش‌های جداسازی مانند روش جداسازی تکراری برای حل مسائل معکوس استفاده کرد. هم چنین با در نظر گرفتن مسأله در ابعاد بالاتر، می‌توان روش‌های جداسازی را برای حل آن بررسی کرد.

مراجع

- [1] A. Babaei, *Solving the inverse problem of determining an unknown control parameter in a semilinear parabolic equation*, Casp. J. Math. Sci. **3** (2014), no. 2, 169–179.
- [2] M. Bjørhus, *Operator splitting for abstract Cauchy problems*, IMA J. Numer. Anal. **18** (1998) 419–443.
- [3] V.T. Borukhov and G.M. Zayats, *Identification of a time-dependent source term in nonlinear hyperbolic or parabolic heat equation*, Int. J. Heat Mass Transfer **91** (2015) 1106–1113.
- [4] J. R. Cannon and Y. Lin, *An inverse problem of finding a parameter in a semi-linear heat equation*, J. Math. Anal. Appl. **145** (1990) 470–484.
- [5] J.R. Cannon, Y. Lin and S. Wang, *Determination of source parameter in parabolic equations*, Meccanica **27** (1992) 85–94.
- [6] J.R. Cannon and H.M. Yin, *On a class of nonlinear parabolic equations with nonlinear trace type functionals*, Inverse Problems **7** (1991), no.1, 149–161.
- [7] J.R. Cannon and H.-M. Lin, *Numerical solutions of some parabolic inverse problems*, Numer. Methods Partial Differential Equations **6** (1990) 177–191.
- [8] J. J. Cheng, and J. Liu, *An inverse source problem for parabolic equations with local measurements*, Appl. Math. Lett. **103** (2020) 106–213.
- [9] D.S. Daoud, *Determination of the source parameter in a heat equation with a non-local boundary condition*, J. Comput. Appl. Math. **221** (2008) 261–272.
- [10] K.L. Deckert, C.G. Maple, *Solution for diffusion with integral type boundary conditions*, Proc. Iowa Acad. Sci. **70** (1963) 354–361.
- [11] M. Dehghan, *Numerical solution of one-dimensional parabolic inverse problem*, Applied Math. Comput. **136** (2003), no. 2-3, 333–344.
- [12] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [13] I. Faragó, *A modified iterated operator splitting method*, Appl. Math. Model. **32** (2008) 1542–1551.
- [14] J. Geiser, *Discretization methods with analytical characteristic methods and applications*, M2AN, EDP Sci. France **43** (2009) 1157–1183.

- [15] D. Glotov, Dmitry, W.E. Hames, A.J. Meir and S. Ngoma, *An integral constrained parabolic problem with applications in thermochronology*, Comput. Math. Appl. **71** (2016), no. 11, 2301–2312.
- [16] A. Hasanov, *An inverse source problem with single Dirichlet type measured output data for a linear parabolic equation*, Appl. Math. Lett. **24** (2011) 1269–1273.
- [17] M. Hrizi, M. Hassine and R. Malek. *A new reconstruction method for a parabolic inverse source problem*, Appl. Anal. **98** (2019), no. 15, 2723–2750.
- [18] N. Hryntsiv, *The inverse problem with free boundary for a weakly degenerate parabolic equation*, J. Math. Sci. **183** (2012) 779–795.
- [19] N.I. Ionkin, *Solution of a boundary value problem in heat conduction with a nonclassical boundary condition*, J. Differential Equations **13** (1977) 204–211.
- [20] A. Jaradat, F. Awawdeh and M.S. Md Noorani. Identification of time-dependent source terms and control parameters in parabolic equations from overspecified boundary data. J. Comput. Appl. Math. **313** (2017) 397–409.
- [21] V.L. Kamynin, *The inverse problem of the simultaneous determination of the right-hand side and the lowest coefficient in a parabolic equation with many space variables*, Mat. Zametki. **97** (2015) 368–381.
- [22] J. Kanney, C. Miller and C. T. Kelley, *Convergence of iterative splitting operator approaches for approximating nonlinear reactive transport problems*, Adv. Water Resources **26** (2003) 247–261.
- [23] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, 2010.
- [24] P.M. Nguyen and L.H. Nguyen, *A numerical method for an inverse source problem for parabolic equations and its application to a coefficient inverse problem*, J. Inverse Ill-Posed Probl. **28** (2020), no. 3, 323–339.
- [25] A.I. Prilepko, V. L. Kamynin and A.B. Kostin. *Inverse source problem for parabolic equation with the condition of integral observation in time*, J. Inverse Ill-posed Probl. **26** (2018) 523–539.
- [26] S. Shekarpaz and H. Azari, *Convergence of the splitting method for inverse problems in parabolic differential equations*, Dynamics of Continuous, Discrete Impulsive Systems, Series B: Application and Algorithms **24** (2017) 283–298.
- [27] S. Shekarpaz and H. Azari, *An inverse problem of identifying two unknown parameters in parabolic differential equations*, Iranian J. Sci. Technol. Trans. A. Sci. **42** (2018) 2045–2052.
- [28] S. Shekarpaz and H. Azari, *Splitting method for an inverse source problem in parabolic differential equations: Error analysis and applications*, Numer. Methods Partial Differential Equations **36** (2020) 654–679.
- [29] A. Shidfar, A. Babaei and A. Molabahrani. *Solving the inverse problem of identifying an unknown source term in a parabolic equation*, Comput. Math. Appl. **60** (2010), no. 5, 1209–1213.

- [30] A. Shidfar, R. Zolfaghari and J. Damirchi, *Application of Sinc-collocation method for solving an inverse problem*, J. Comput. Appl. Math. **233** (2009) 545 – 554.
- [31] G. Strang, *On the construction and comparison of difference schemes*, SIAM J. Numer. Anal. **5** (1968) 506–517.
- [32] H. F. Trotter, *On the product of semi-groups of operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959) 545–551.
- [33] S. Wang and Y. Liu, *A finite-difference solution to an inverse problem for determining a control function in a parabolic partial differential equation*, Inverse Problems **5** (1989) 631–640.
- [34] J.G. Verwer, B. Sportisse and K. Yoshida, *A note on operator splitting analysis in the stiff linear case*, Research Report, INRIA, 1998.
- [35] W. Wang, B. Han and M. Yamamoto. *Inverse heat problem of determining time-dependent source parameter in reproducing kernel space*. Nonlinear Analysis: Real World Applications **14** (2013) 875–887.
- [36] F. Yang and C.-L. Fu, *A mollification regularization method for the inverse spatial-dependent heat source problem*, J. Comput. Appl. Math. **255** (2014) 555–567.
- [37] R. Zolfaghari, *Parameter determination in a parabolic inverse problem in general dimensions*, Comput. Methods Differential Equations **1** (2013) 55–70.



REDUCING SEARCH SPACE IN OPTIMIZATION PROBLEMS WITH DATA MINING TECHNIQUES

MAHTAB HADDADPOUR¹, MOHAMMAD ALINEJADMOFRAD^{1*},
AND MOHAMMAD DEHGHAN NAYYERI¹

¹Department of Basic sciences, University of Bojnord, Bojnord, Iran
m.haddadpour@stu.ub.ac.ir
m.alinejad@ub.ac.ir
m.dehghan@ub.ac.ir

Abstract. Finding the optimal global solution in optimization problems is such an important issue that various related approaches have been proposed so far. An effective attempt before solving such problems is to reduce the search space in such a way that the search is concentrated in a smaller subspace and therefore the probability of finding the optimal global solution increases. In this article, three methods of clustering, classification and association in data mining are used to reduce the search space in a nonlinear optimization problem. After that, using the Genetic Algorithm, the problem is solved on the entire initial feasible space and the reduced spaces resulting from three data mining methods. The results show that by combining data mining methods and Genetic Algorithm, more accurate approximations for the global optimal solution of the problem can be obtained.



کاهش فضای جستجوی مسائل بهینه‌سازی با روش‌های داده‌کاوی

مهتاب حدادپور^۱، محمد علی‌نژادمفرد^{۱*}، و محمد دهقان‌نیری^۱

^۱ گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بجنورد

m.haddadpour@stu.ub.ac.ir

m.alinejad@ub.ac.ir

m.dehghan@ub.ac.ir

چکیده. یافتن جواب بهینه سراسری در مسائل بهینه‌سازی، تا اندازه‌ای اهمیت دارد که تاکنون رویکردهای متنوعی برای آن ارائه شده است. یک اقدام موثر قبل از حل این دست از مسائل، کاهش دادن (کوچک کردن) فضای جستجو است به نحوی که جستجو در یک زیرفضای کوچکتر متمرکز گردد و احتمال یافتن جواب بهینه سراسری افزایش یابد. در این مقاله از سه روش خوشه‌بندی، طبقه‌بندی و انجمنی در داده‌کاوی برای کاهش فضای جستجو در یک مسئله بهینه‌سازی غیرخطی استفاده می‌شود. پس از آن به کمک الگوریتم ژنتیک، مسئله روی کل فضای شدنی اولیه و فضاهای کاهش‌یافته حاصل از سه روش داده‌کاوی حل می‌شود. نتایج نشان می‌دهند که می‌توان با ترکیب روش‌های داده‌کاوی و الگوریتم ژنتیک، تقریب‌های دقیق‌تری برای جواب بهینه سراسری مسئله به دست آورد.

۱. مقدمه

در عصر حاضر مفهوم بهینه‌سازی به عنوان یک اصل اساسی در تجزیه و تحلیل بسیاری از مسائل پیچیده به طور کامل پذیرفته شده است. با به کار گرفتن نظریه بهینه‌سازی، می‌توان مسائلی را بررسی کرد که شامل تعیین مقادیری برای چند متغیر مرتبط به هم و تاثیرگذار روی هدفی یگانه است. این هدف، برای اندازه‌گیری کمی و

2020 Mathematics Subject Classification. 90C26, 90C59.

واژگان کلیدی. جواب بهینه سراسری، داده‌کاوی، فضای جستجوی کاهش‌یافته، الگوریتم ژنتیک.
تاریخ: دریافت ۱۴۰۱/۲/۲۶ ویرایش ۱۴۰۱/۵/۳۰ پذیرش ۱۴۰۱/۶/۱۳ انتشار برخط ۱۴۰۱/۶/۱۸

* نویسنده مسئول

نحوه ارجاع به این مقاله: م. حدادپور، م. علی‌نژادمفرد، م. دهقان‌نیری، کاهش فضای جستجوی مسائل بهینه‌سازی با روش‌های داده‌کاوی، به سوی علوم ریاضی، ۲ (۱۴۰۱)، شماره ۱، ۱۲۱-۱۱۰.

کیفی تصمیم ساخته می‌شود و با توجه به قیودی که ممکن است انتخاب مقادیر متغیرهای تصمیم‌گیری را محدود کنند، کمینه یا بیشینه (برحسب فرمول‌بندی تصمیم) می‌گردد [۴].

بهینه‌سازی سراسری^۱ به دنبال یافتن جواب بهینه سراسری در فضای شدنی است. سه رویکرد اصلی برای حل این مسئله ارائه شده است؛ این رویکردها شامل استفاده از الگوریتم‌های متناهی^۲، روش‌های تکراری همگرا^۳ [۴، ۵] و روش‌های مکاشفه‌ای^۴ است [۹، ۱۲]. روش‌های مکاشفه‌ای در بهینه‌سازی برای حل سریع‌تر مسئله، زمانی که روش‌های کلاسیک مبتنی بر دو رویکرد دیگر خیلی کند هستند، و یا برای محاسبه یک جواب تقریبی (زیربهین)، وقتی که روش‌های کلاسیک قادر به محاسبه جواب دقیق نیستند، به کار می‌روند؛ و در این صورت، به طور معمول با صرف نظر از بهینگی (بهینه سراسری بودن)، کامل بودن (یافتن همه بهینه‌های محلی)، دقت (دقت محاسباتی) و درستی (اعتبار جواب) در برابر سریع‌تر یافتن جواب به هدف خود نائل می‌شوند [۹]. روش‌های مکاشفه‌ای با جستجو در فضای جستجو جواب مسئله را می‌یابند، و هرچه فضای جستجو کوچکتر باشد سرعت یافتن جواب مسئله و در بیشتر موارد، دقت و درستی جواب یافت‌شده نیز بیشتر می‌شود. با کاهش فضای جستجو^۵ در مسئله بهینه‌سازی، جستجو در یک ناحیه کوچکتر متمرکز می‌گردد و در نتیجه، احتمال یافتن جواب بهینه سراسری نیز افزایش می‌یابد. الگوریتم ژنتیک یکی از این دست از الگوریتم‌هاست که از طبیعت و تئوری انتخاب داروین الگو گرفته است و تاکنون برای حل بسیاری از مسائل بهینه‌سازی با موفقیت استفاده شده است. در این الگوریتم ابتدا به صورت تصادفی یک دسته جواب روی کل فضای شدنی تولید شده و سپس با استفاده از عملگرهای الگوریتم ژنتیک مانند تقاطع^۶ و جهش^۷، رفته‌رفته جواب‌های بهتری حاصل می‌شود. داده‌کاوی^۸ با تجزیه و تحلیل یک مجموعه بسیار بزرگ از داده‌ها، قوانین ارزشمند یا الگوهای پنهان در داده را استخراج می‌کند. این استخراج با روش‌هایی همچون طبقه‌بندی^۹، انجمنی^{۱۰} و خوشه‌بندی^{۱۱} انجام می‌شود. طبقه‌بندی شیوه‌ای برای تجزیه و تحلیل داده‌ها است که الگویی برای توصیف طبقات و کلاس‌های مهم موجود در داده‌ها ایجاد می‌کند. این قبیل الگوها برچسب کلاس‌ها را پیش‌بینی می‌کنند. قوانین انجمنی، تجزیه و تحلیل الگوهای تکراری به منظور کشف قوانین در مجموعه داده‌ها است. خوشه‌بندی فرآیندی برای گروه‌بندی مجموعه‌ای از داده‌ها در چند خوشه (گروه) است که اعضای هر خوشه شبیه به هم هستند و با اعضای دیگر خوشه‌ها تفاوت دارند [۱، ۲، ۳].

^۱ global optimization

^۲ finitely terminating algorithms

^۳ convergent iterative methods

^۴ heuristics methods

^۵ reducing search space

^۶ crossover

^۷ mutation

^۸ data mining

^۹ classification

^{۱۰} association

^{۱۱} clustering

در پژوهش [۷]، یک الگوریتم بهینه‌سازی سراسری ترکیبی^{۱۲} توسعه یافته که در آن از روش‌های داده‌کاوی برای کاهش فضای جستجو استفاده شده است. رویکرد اتخاذ شده در [۷] برای کاهش فضای جستجو در روش‌های طبقه‌بندی و انجمنی عموماً به اجتماع زیرفضاهایی از فضای جواب منجر می‌شود که ممکن است در حالت کلی، جواب بهینه سراسری را شامل نشود. در این تحقیق از رویکردی محافظه‌کارانه برای کاهش فضای جستجو استفاده می‌شود تا تنها یک فضای کاهش‌یافته از هر یک از روش‌های داده‌کاوی حاصل شود و به این ترتیب احتمال وجود بهینه سراسری در فضای کاهش‌یافته افزایش یابد. در ادامه نخست در بخش دو، مفاهیم اولیه مورد نیاز در بهینه‌سازی سراسری بیان می‌شود، سپس در بخش سه نحوه آماده‌سازی داده‌های ورودی برای نرم‌افزار وکا^{۱۳} شرح داده می‌شود. در بخش چهار، یک مسئله بهینه‌سازی غیرخطی معرفی و کاهش فضای جستجو با روش‌های متنوع داده‌کاوی روی آن بررسی می‌شود. در بخش پنجم برای حل مسئله، الگوریتم ژنتیک با روش‌های داده‌کاوی ترکیب می‌شود و سرانجام در بخش پایانی نتیجه این اقدام موثر، جمع‌بندی و بیان می‌شود. نتایج نشان می‌دهند که اولاً دو فضای کاهش‌یافته دقیقاً شامل جواب بهینه سراسری مسئله است و دوماً با کوچکتر شدن فضاهای جستجو حاصل از روش‌های داده‌کاوی و استفاده از الگوریتم ژنتیک، تقریب‌های بهتری برای جواب بهینه سراسری مسئله به دست می‌آید.

۲. مفاهیم اولیه

مسئله کلی بهینه‌سازی را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(X) \\ \text{subject to} \quad & g_i(X) \leq 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, p, \\ & h_j(X) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, q, \\ & X \in S, \end{aligned} \quad (۱.۲)$$

که در آن $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ یک بردار n بعدی از متغیرهای مجهول، g_i ، $i = 1, 2, 3, \dots, p$ و h_j ، $j = 1, 2, 3, \dots, q$ توابع حقیقی از متغیرهای $x_1, x_2, \dots, x_n$ هستند. مجموعه S زیرمجموعه‌ای از فضای n بعدی $\mathbb{R}^n$ است. تابع f تابع هدف مسئله است و معادله‌ها، نامعادله‌ها و محدودیت‌های مجموعه‌ای، قیود مسئله هستند [۴]. ناحیه‌ای که به قیود مسئله محدود می‌شود فضای شدنی نام دارد. این ناحیه شامل تمام جواب‌های ممکن برای مسئله است که در همه قیود صدق می‌کنند. برای به دست آوردن جواب بهینه مسئله، کافی است که از فضای شدنی، آن جوابی که تابع هدف را کمینه (یا بیشینه) می‌کند، یافت.

^{۱۲} hybrid global optimization algorithm

^{۱۳} Weka

تعریف ۱.۲. نقطه $X^* \in S$ را کمینه سراسری^{۱۴} تابع f روی S گویند هرگاه برای هر $X \in S$ داشته باشیم $f(X^*) \leq f(X)$ و آن را کمینه محلی^{۱۵} تابع f روی S گویند هرگاه $\epsilon > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $X \in S \cap N_\epsilon(X^*)$ داشته باشیم $f(X^*) \leq f(X)$ که در آن $N_\epsilon(X^*)$ همسایگی‌ای از X^* به شعاع ϵ است.

تعریف ۲.۲. نقطه X^* از فضای شدنی مسئله (۱.۲) را جواب بهینه سراسری^{۱۶} آن مسئله گویند هرگاه کمینه سراسری تابع f روی فضای شدنی مسئله (۱.۲) باشد؛ و آن را جواب بهینه محلی مسئله (۱.۲) گویند هرگاه کمینه محلی تابع f روی فضای شدنی آن مسئله باشد.

هرگاه در مسئله (۱.۲)، تابع هدف و تمامی قیود، توابعی خطی باشند، مسئله را خطی و در غیر این صورت، غیرخطی می‌نامند. برای مسائل خطی، جواب بهینه محلی همان جواب بهینه سراسری است اما برای مسائل غیرخطی چنین نیست و نیز بسیاری از الگوریتم‌ها همواره قادر نیستند که جواب بهینه سراسری را بیابند. در بیشتر مسائل، تشخیص جواب بهینه سراسری سخت و تعیین آن حتی سخت‌تر است [۸].

۳. آماده‌سازی داده‌ها

برای کاهش فضای جستجو با روش‌های داده‌کاوی، نخست جواب‌هایی به صورت تصادفی با توزیع یکنواخت تولید می‌شوند. این جواب‌ها در واقع نقاطی متعلق به تمام فضای شدنی هستند. سپس مقادیر تابع هدف برای هر یک از این نقاط محاسبه می‌شود. آنگاه این مجموعه از نقاط و مقادیر تابع هدف متناظر (به عنوان مجموعه داده‌های ورودی) در نرم‌افزار داده‌کاوی وکا فراخوانی می‌شود تا روش‌های داده‌کاوی روی آن پیاده‌سازی گردد و قوانین یا الگوها به دست آید. نرم‌افزار وکا یکی از معروف‌ترین و پرکاربردترین نرم‌افزارهای حوزه داده‌کاوی است [۱۱]. این نرم‌افزار رایگان است و توسط ویتن^{۱۷} و فرنک^{۱۸} در دانشگاه ویکاتو^{۱۹} از کشور زلاندنو^{۲۰} توسعه داده شده است.

فراخوانی داده‌های ورودی در نرم‌افزار برای روش خوشه‌بندی بدون تغییر شکل آنها است. بنابراین در این روش، مقادیر اصلی تابع هدف مورد استفاده قرار می‌گیرد تا فاصله بین این مقادیر محاسبه شده و خوشه‌ها تشکیل شوند. خروجی خوشه‌بندی، تعدادی خوشه به همراه میانگین هر خوشه و تعداد اعضای متعلق به آن خوشه است. فراخوانی داده‌ها در نرم‌افزار برای روش‌های طبقه‌بندی و انجمنی نیاز به تغییر شکل آنها دارد. می‌توان از خوشه‌های به دست آمده از خروجی خوشه‌بندی برای آماده‌سازی داده‌های ورودی روش‌های طبقه‌بندی و انجمنی استفاده کرد. به این ترتیب که بر اساس مقادیر تابع هدف و خروجی خوشه‌بندی، جواب‌های تصادفی

^{۱۴} global minimum

^{۱۵} local minimum

^{۱۶} global optimal solution

^{۱۷} Witten

^{۱۸} Frank

^{۱۹} Waikato University

^{۲۰} New Zealand

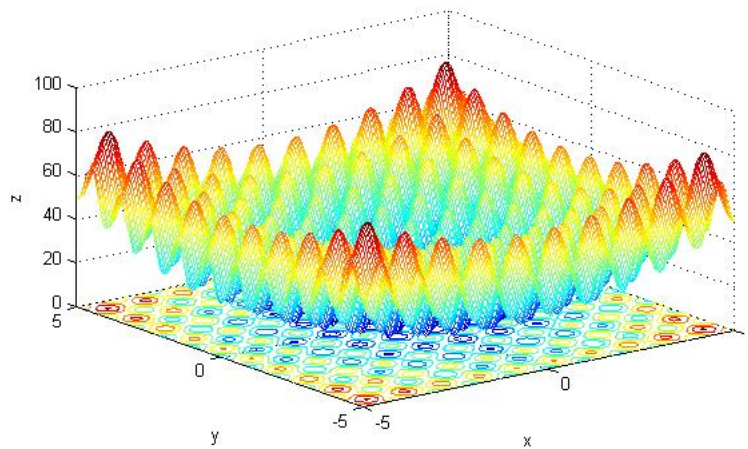
تولید شده به کلاس‌های مختلف (با فواصل یکسان یا نابرابر) تقسیم می‌شوند. بهترین کلاس با نماد A و کلاس‌های دیگر با B ، C ، D و غیره مطابق با ترتیب مقادیر تابع هدف آنها نمایش داده می‌شود. اکنون این نمادها برای جایگزینی مقادیر تابع هدف در فایل ورودی برای این دو روش استفاده می‌شود. در بخش بعد همین فرآیند را برای آماده‌سازی داده‌ها در پیش می‌گیریم.

۴. کاهش فضای جستجو

برای نمایش چگونگی کاهش فضای جستجو با استفاده از روش‌های داده‌کاوی، مسئله بهینه‌سازی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید. مسئله عبارت است از

$$\begin{aligned} \min \quad & f(X) = 20 + x_1^2 + x_2^2 - 10[\cos(2\pi x_1) + \cos(2\pi x_2)] \\ \text{subject to} \quad & -5 \leq x_1 \leq 5, \\ & -5 \leq x_2 \leq 5. \end{aligned} \quad (1.4)$$

تابع هدف، تابع راستریگین^{۲۱} است [۶] و شکل ۱ نمودار آن را نشان می‌دهد. این تابع تنها یک جواب کمینه سراسری در $(0,0) = X^*$ و تعداد زیادی کمینه محلی در فضای شدنی دارد که برخی از آنها بسیار نزدیک به جواب بهینه سراسری هستند. این مسئله، یک مسئله بسیار نویزی است و یافتن جواب بهینه سراسری این مسئله با استفاده از روش‌های کلاسیک یا حتی روش‌های مکاشفه‌ای، دشوار است.

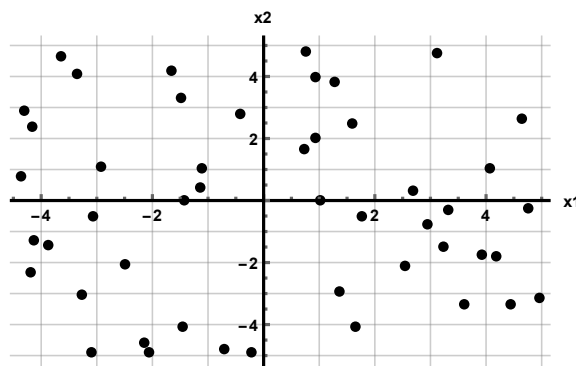


شکل ۱: تابع راستریگین.

برای شروع کار، ابتدا 48 نقطه به صورت تصادفی و با توزیع یکنواخت در کل فضای شدنی تولید می‌شوند. توزیع این نقاط روی صفحه در شکل ۲ نشان داده شده است. حال بر اساس «توزیع» مقادیر تابع هدف این

^{۲۱}Rastrigin function

نقاط، چهار کلاس با نمادهای A ، B ، C و D به این نقاط اختصاص داده می‌شوند. کلاس A شامل چهار عضو با میانگین مقادیر تابع هدف 1.24635 است که بهترین کلاس محسوب می‌شود زیرا میانگین مقادیر تابع هدف متناظر با نقاط آن نسبت به سایر کلاس‌ها، کمترین است. کلاس دوم، B ، شامل 25 عضو با میانگین مقادیر تابع هدف 31.0151 است. کلاس سوم، C ، دارای 15 عضو با میانگین مقادیر تابع هدف 46.6874 است و بالاخره کلاس D متشکل از چهار عضو با میانگین مقادیر تابع هدف 60.9127 است. در اینجا کلاس‌ها را براساس خوشه‌های خروجی روش خوشه‌بندی در نظر گرفته‌ایم؛ اگرچه می‌توان آنها را به هر طریق دیگری نیز در نظر گرفت که در این صورت کلاس‌بندی‌های گوناگون به نتایج متفاوتی در کاهش فضای جستجو منجر خواهد شد.



شکل ۲: نقاط تصادفی تولید شده در $[-5, 5] \times [-5, 5]$.

خروجی روش‌های خوشه‌بندی، طبقه‌بندی و انجمنی حاصل از نرم‌افزار وکا به ترتیب در جداول ۱، ۲ و ۳ نشان داده شده است. مطابق جدول ۱، چهار خوشه یافت شده است و از آنجا که خوشه ۱، دارای کمترین میانگین مقادیر تابع هدف است، چهار عضو خوشه ۱ برای تعیین مرز این خوشه استفاده می‌شود. چون بزرگ‌ترین مقدار x_1 برای این چهار عضو در خوشه ۱ برابر 1.01996 و کوچکترین مقدار x_1 برای این چهار عضو برابر -2.93562 است از این رو کران‌های x_1 را به صورت $-2.93562 \leq x_1 \leq 1.01996$ در نظر می‌گیریم. به طور مشابه برای x_2 داریم: $0.025382 \leq x_2 \leq 2.00188$. معمولاً، تنها یک فضای کاهش‌یافته توسط روش خوشه‌بندی به دست می‌آید. مساحت زیر فضای حاصل از این روش نزدیک به 8 درصد از مساحت کل فضای جستجو را در بر می‌گیرد. در اینجا خوشه‌بندی به روش اولین-دورترین^{۲۲} پیمایش روی گرافی که رئوس آن مقادیر تابع هدف و وزن یال‌ها اختلاف مقادیر رئوس با هم است، انجام شده است [۱۰].

نمایش خروجی طبقه‌بندی معمولاً یک درخت تصمیم شامل تعدادی گره و شاخه است. درخت می‌تواند از ریشه تا یک برگ پیموده شود تا کلاس یک جواب تعیین گردد. در هر گره، برخی از قوانین برای تصمیم‌گیری

جدول ۱: خروجی خوشه‌بندی

خوشه	میانگین مقادیر تابع هدف	تعداد اعضای خوشه (درصد از کل)
0	60.9127	4 (8%)
1	1.24635	4 (8%)
2	31.0151	25 (52%)
3	46.6874	15 (31%)

در مورد ورود به شاخه‌های مختلف فراهم می‌شود. با استفاده از این قوانین، آن جواب می‌تواند به یک کلاس تخصیص داده شود. جدول ۲ درخت تصمیم متناظر را نشان می‌دهد.

در هر برگ، نماد یک کلاس به همراه یک کسر درون پرانتز نمایش داده شده است؛ صورت کسر، تعداد جواب‌هایی است که قوانین منتهی به آن برگ را برآورده می‌کنند و مخرج کسر تعداد جواب‌هایی است که به آن کلاس تعلق ندارند. از آنجا که کلاس A همان بهترین کلاس است، می‌توان درخت را به سادگی از چپ به راست پیمود و با گذر از گره‌ها و شاخه‌ها به برگ‌هایی با برچسب A رسید. قوانین نمایش داده شده در هر گرهی که به کلاس A منتهی می‌شود، فضای جستجوی کاهش‌یافته را به صورت اجتماع سه فضای $-2.04 \leq x_1 < -4.16$ و $0 \leq x_2 < 2.25$ همچنین $-1.13 \leq x_1 < -0.2$ و $0 \leq x_2 < 2.25$ و سرانجام $0.83 \leq x_1 < 1.63$ و $0 \leq x_2 < 2.25$ نشان می‌دهد. با رویکردی محافظه‌کارانه، چون بزرگ‌ترین مقدار x_1 برای این سه زیرفضا حداکثر 1.63 و کوچکترین مقدار x_1 برای این سه زیرفضا برابر -4.16 است از این رو کران‌های x_1 را به صورت $-4.16 \leq x_1 < 1.63$ در نظر می‌گیریم. به طور مشابه برای x_2 داریم: $0 \leq x_2 < 2.25$. حال این فضای به دست آمده تنها حدود 12 درصد از کل فضای جستجو است.

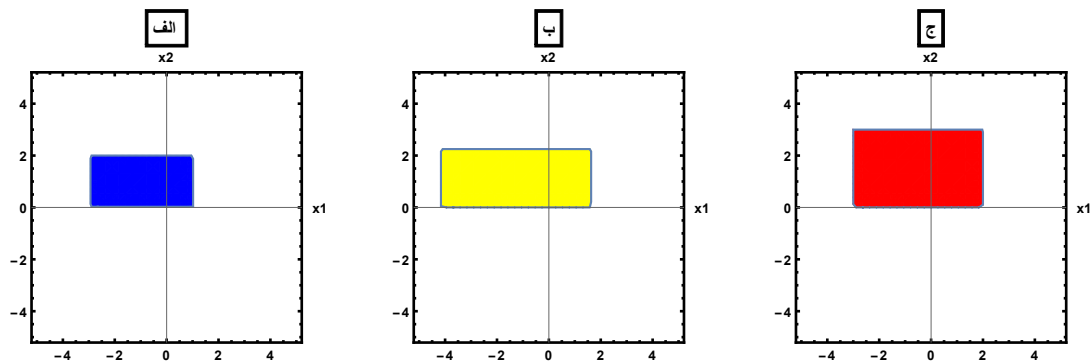
نمایش خروجی انجمنی بر خلاف طبقه‌بندی، شامل تعداد بسیاری از قوانین به جای درخت تصمیم است. استفاده از این قوانین باید براساس تعداد جواب‌های صادق در قانون و دقت آن باشد. جدول ۳ خروجی روش انجمنی در نرم‌افزار وکا را نشان می‌دهد. در هر قانون، مثلاً عبارت $F = A$ به این معنی است که آن قانون به کلاس A منجر می‌شود و عدد بعد از A تعداد جواب‌هایی است که در آن قانون صدق می‌کند. در انتهای هر قانون، عدد داخل پرانتز، کسری از اطمینان را نمایش می‌دهد. صورت این کسر تعداد جواب‌هایی است که متعلق به کلاس A است و مخرج این کسر تعداد جواب‌هایی است که در آن قانون صدق می‌کند؛ بنابراین، 1 نشان‌دهنده اطمینان صددرصدی به آن قانون است. در اینجا برای این مسئله، از قوانین شماره‌ی 16، 32، 36 و 42 می‌توان برای شناسایی جواب‌های متعلق به کلاس A استفاده کرد. یعنی، فضای کاهش‌یافته به ترتیب توسط اجتماع فضاهای $-3 \leq x_1 \leq -2$ و $1 \leq x_2 \leq 2$ و همچنین $1 \leq x_1 \leq 2$ و $0 \leq x_2 \leq 1$ و 0 افزون بر این $0 \leq x_1 \leq 1$ و $2 \leq x_2 \leq 3$ و سرانجام $-2 \leq x_1 \leq -1$ و $1 < x_2 \leq 2$ ، مشخص می‌شود. با رویکردی محافظه‌کارانه، چون بزرگ‌ترین مقدار x_1 برای این چهار زیرفضا برابر 2 و کوچکترین مقدار x_1 برای این چهار زیرفضا برابر -3 است از این رو کران‌های x_1 را به صورت $-3 \leq x_1 \leq 2$ در نظر می‌گیریم.

جدول ۳: خروجی انجمنی

شماره قانون یافت شده	حدود x_1	حدود x_2	کلاس	تعداد جواب‌های صادق در قانون	کسر اطمینان
1	[4, 5]	[-4, -3]	$F = D$	2	conf:(1)
2	[3, 4]	[-2, -1]	$F = B$	2	conf:(1)
3	[-1, 0]	[-5, -4]	$F = C$	2	conf:(1)
4	[-3, -2]	[-5, -4]	$F = C$	2	conf:(1)
5	[-4, -3]	[4, 5]	$F = D$	2	conf:(1)
6	[-5, -4]	[2, 3]	$F = C$	2	conf:(1)
7	[4, 5]	[-2, -1]	$F = B$	1	conf:(1)
8	[4, 5]	[2, 3]	$F = B$	1	conf:(1)
9	[4, 5]	[1, 2]	$F = B$	1	conf:(1)
10	[4, 5]	[-1, 0]	$F = C$	1	conf:(1)
11	[3, 4]	[-4, -3]	$F = B$	1	conf:(1)
12	[3, 4]	[-1, 0]	$F = B$	1	conf:(1)
13	[3, 4]	[4, 5]	$F = C$	1	conf:(1)
14	[-1, 0]	[2, 3]	$F = B$	1	conf:(1)
15	[-3, -2]	[-3, -2]	$F = B$	1	conf:(1)
16	[-3, -2]	[1, 2]	$F = A$	1	conf:(1)
17	[-4, -3]	[-4, -3]	$F = B$	1	conf:(1)
18	[-4, -3]	[-5, -4]	$F = B$	1	conf:(1)
19	[-4, -3]	[-1, 0]	$F = B$	1	conf:(1)
20	[-4, -3]	[-2, -1]	$F = C$	1	conf:(1)
21	[-5, -4]	[-2, -1]	$F = B$	1	conf:(1)
22	[-5, -4]	[0, 1]	$F = C$	1	conf:(1)
23	[-5, -4]	[-3, -2]	$F = C$	1	conf:(1)
24	[2, 3]	[-1, 0]	$F = B$	1	conf:(1)
25	[2, 3]	[0, 1]	$F = B$	1	conf:(1)
26	[2, 3]	[-3, -2]	$F = B$	1	conf:(1)
27	[1, 2]	[-5, -4]	$F = B$	1	conf:(1)
28	[1, 2]	[-1, 0]	$F = B$	1	conf:(1)
29	[1, 2]	[-3, -2]	$F = B$	1	conf:(1)
30	[1, 2]	[3, 4]	$F = B$	1	conf:(1)
31	[1, 2]	[2, 3]	$F = C$	1	conf:(1)
32	[1, 2]	[0, 1]	$F = A$	1	conf:(1)
33	[0, 1]	[1, 2]	$F = B$	1	conf:(1)
34	[0, 1]	[3, 4]	$F = B$	1	conf:(1)
35	[0, 1]	[4, 5]	$F = C$	1	conf:(1)
36	[0, 1]	[2, 3]	$F = A$	1	conf:(1)
37	[-2, -1]	[-5, -4]	$F = B$	1	conf:(1)
38	[-2, -1]	[-1, 0]	$F = B$	1	conf:(1)
39	[-2, -1]	[0, 1]	$F = B$	1	conf:(1)
40	[-2, -1]	[4, 5]	$F = C$	1	conf:(1)
41	[-2, -1]	[3, 4]	$F = C$	1	conf:(1)
42	[-2, -1]	[1, 2]	$F = A$	1	conf:(1)

به‌طور مشابه برای x_2 داریم: $0 \leq x_2 \leq 3$. اکنون با این رویکرد، فضای حاصل فقط حدود 15 درصد از کل فضای جستجو است.

سه فضای جستجوی کاهش‌یافته حاصل از سه روش متفاوت داده‌کاوی در شکل ۳ نمایش داده شده است. فضاهای کاهش‌یافته حاصل از دو روش طبقه‌بندی و انجمنی، دقیقاً شامل جواب بهینه سراسری مسئله است. اکنون به نظر می‌رسد که احتمال یافتن جواب بهینه سراسری در این فضاهای جستجوی کوچکتر بسیار بیشتر از احتمال یافتن آن در کل فضای جستجو باشد.



شکل ۳: مقایسه سه فضای جستجوی کاهش‌یافته حاصل از سه روش (الف) خوشه‌بندی، (ب) طبقه‌بندی و (ج) انجمنی

۵. الگوریتم ژنتیک و روش‌های داده‌کاوی

دوباره مسئله بهینه‌سازی غیرخطی (۱.۴) را در نظر بگیرید. برای بررسی اثر کاهش فضای جستجو روی نتایج حاصل از الگوریتم ژنتیک، این الگوریتم را دوازده مرتبه روی کل فضای شدنی اولیه و همچنین دوازده مرتبه روی فضاهای جستجوی کاهش‌یافته حاصل از سه روش داده‌کاوی اجرا می‌کنیم. میانگین x_1 ، x_2 و مقادیر تابع هدف به دست آمده از دوازده مرتبه اجرای الگوریتم ژنتیک، در جدول ۴ ارائه شده است. آشکار

جدول ۴: مقایسه میانگین نتایج به دست آمده در فضاهای جستجوی مختلف

دقیق	خوشه‌بندی	طبقه‌بندی	انجمنی	فضای شدنی اولیه	
0	-0.004	0.008	0.002	-0.092	x_1
0	0.034	0.030	0.073	0.088	x_2
0	0.261	0.303	0.364	0.482	f

است که میانگین مقادیر بهینه تابع هدف در کل فضای شدنی اولیه بدتر از همین مقادیر در فضاهای کاهش‌یافته

است. همچنین با کوچکتر شدن فضاها، جستجو، نتایج دقیق‌تری نسبت به کل فضای شدنی حاصل می‌شود. این مقایسه مزیت‌های استفاده از داده‌کاوی برای کاهش فضای جستجو را نمایان می‌کند.

۶. نتیجه‌گیری

در این تحقیق، برای دستیابی به هدف کاهش فضای جستجوی یک مسئله بهینه‌سازی غیرخطی و افزایش احتمال یافتن جواب بهینه سراسری، روش‌های خوشه‌بندی، طبقه‌بندی و انجمنی در داده‌کاوی مورد استفاده قرار گرفت. نتایج نشان داد که مساحت فضاها، کاهش یافته حاصل، حداکثر ۱۵ درصد از مساحت کل فضای شدنی مسئله است. سپس با استفاده از الگوریتم ژنتیک، مسئله غیرخطی روی کل فضای شدنی اولیه و فضاها، کاهش یافته حل شد و بررسی نتایج مشخص کرد که الگوریتم ژنتیک روی فضاها، کاهش یافته می‌تواند جواب‌های دقیق‌تری تولید کند. همچنین فضای حاصل از روش خوشه‌بندی کوچکترین فضا است و ترکیب این روش با الگوریتم ژنتیک، بهترین تقریب را برای جواب بهینه سراسری مسئله نسبت به دو فضای کاهش یافته دیگر ارائه می‌دهد.^{۲۳}

مراجع

- [۱] ن. حاجی‌حیدری و ب. خاکباز، *داده‌کاوی*، انتشارات دانشگاه تهران، چاپ دوم، ۱۳۹۲.
- [۲] م. غضنفری، س. علیزاده و ب. تیموریور، *داده‌کاوی و کشف دانش*، انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران، چاپ پنجم، ۱۳۹۵.
- [۳] م. کانتاردزیک و ا. علیخانزاده، *داده‌کاوی*، انتشارات علوم رایانه، چاپ سوم، ۱۳۹۲.
- [۴] ن. مهدوی‌امیری و م. پورکاظمی، *برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی*، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف، چاپ سوم، ۱۳۹۱.
- [5] M.S. Bazaraa and C.M. Shetty, *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons, 2nd. ed. New York, 1979.
- [6] J. Branke and C. Schmidt, *Faster convergence by means of fitness estimation*, Soft. Comput. **9** (2005) 13–20.
- [7] T.Y. Chen and J.H. Huang, *Application of data mining in a global optimization algorithm*, Adv. Eng. Software **66** (2013) 1–10.
- [8] J. Nocedal and S. Wright, *Numerical Optimization*, Springer-Verlag, 2nd. ed. New York, 2006.
- [9] J. Pearl, *Heuristics: Intelligent Search Strategies for Computer Problem Solving*, Addison-Wesley, Boston, MA, 1984.
- [10] F.G. Teofilo, *Clustering to minimize the maximum intercluster distance*, Theor. Comput. Sci. **38** (1985) 293–306.
- [11] I.H. Witten and E. Frank, *Data Mining: Practical Machine Learning Tools and Techniques*, Morgan Kaufmann, San Francisco, CA, 2005.
- [12] Q. Zhang, J. Sun J, E. Tsang and J. Ford, *Hybrid estimation of distribution algorithm for global optimization*, Eng. Comput. **21** (2004), no. 1, 91–107.

^{۲۳} این مقاله از پایان‌نامه کارشناسی ارشد نویسنده اول استخراج شده است.



SOME APPROACHES TO IMPROVE TEACHING MATHEMATICS

FATEMEH GHOMANJANI^{1*} AND MOHAMMAD KAZEM ANVARI²

¹Kashmar Institute of Higher Education, Kashmar, Iran
f.ghomanjani@kashmar.ac.ir; fatemeghomanjani@gmail.com

²Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

Abstract. In this note we investigate some practical and effective methods to improve teaching mathematics, mostly in highschool level. These approaches include giving a brief history of the subject, its relation with other sciences, preparing students for higher level subjects and giving simple proofs.



بعضی از راهکارهای ارتقای آموزش ریاضی

فاطمه قومنجانی^{۱*} و محمد کاظم انوری^۲

^۱ مرکز آموزش عالی کاشمر، کاشمر، ایران

f.ghomanjani@kashmar.ac.ir, fatemeghomanjani@gmail.com

^۲ دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

چکیده. در این نوشتار، پاره‌ای از راهکارهای عملی و موثر برای ارتقای آموزش ریاضی در سطوح دبیرستانی و دانشگاهی ارائه می‌شود. از راهکارهای موثر می‌توان به بیان تاریخ و فلسفه ریاضی، ایجاد ارتباط میان بخش‌های مختلف علوم، ایجاد زمینه برای پذیرش مفاهیم بالاتر، معرفی نمادها و واژه‌های ریاضی، ارائه اثبات‌های ساده در حد توان فراگیران اشاره کرد. در این مقاله، تلاش شده است تا راهکارهای ارائه شده در هر مورد با آوردن مثال‌های مناسب به‌ترو بیشتر تبیین شود.

۱. پیش‌گفتار

برخلاف تصور عام، دانش ریاضی تنها دانش اعداد، ارقام و اشکال هندسی نیست. ریاضیات امروزی برپایه مجموعه‌ها استوار است و بر این اساس فضاهای انتزاعی و مجرد، میدان‌های جبری و فضاهای توپولوژیکی به وجود می‌آیند. در دانش ریاضی می‌توان، تعریف‌ها، گزاره‌ها و ساختارهای ریاضی را ایجاد، اثبات و یا نقض کرد [۲]. دانش ریاضی، بدون شک مهم‌ترین ابزار بشر در شناسایی طبیعت و بهره‌برداری از آن بوده است. مفاهیم ریاضی قدمتی به درازای تاریخ انسان دارند. دیدگاهی که اخیراً توسط روبن هرش (ریاضی‌دان و

2020 Mathematics Subject Classification. 97B20; 97C70; 97D10

کلید واژگان. ارتقای آموزش ریاضی، تاریخ ریاضیات، آموزش روش‌های ساده اثبات.
تاریخ: دریافت ۱۴۰۱/۳/۱۶ ویرایش ۱۴۰۱/۵/۲۹ پذیرش ۱۴۰۱/۶/۱۳ انتشار بر خط ۱۴۰۱/۶/۱۸

* نویسنده مسئول

نحوه ارجاع به این مقاله: ف. قومنجانی، م.ک. انوری، بعضی از راهکارهای ارتقای آموزش ریاضی، به سوی علوم ریاضی، ۲،

(۱۴۰۱)، شماره ۱، ۱۳۴-۱۲۲.

فیلسوف، متولد ۱۹۲۷) در ایالات متحده‌ی آمریکا مطرح شده است، بیان می‌کند که دانش ریاضی، برگرفته از فرهنگ، اجتماع و تاریخ بشر است. این دیدگاه که به دیدگاه انسان‌گرایی در ریاضی موسوم است، با بسیاری از واقعیتهای ملموس در علم ریاضی و علوم دیگر سازگار به نظر می‌رسد. در کنار پیشرفت دانش ریاضی، علوم وابسته به آن مانند فیزیک و علوم مهندسی هم ارتقا می‌یابند. از این رو، گسترش حوزه‌ی نفوذ ریاضی برای همه‌ی این علوم بسیار سودمند واقع می‌شود. آموزش و یادگیری ریاضیات فرایندهایی پیچیده هستند که در آن معلمان و فراگیران با یکدیگر ارتباط مستقیمی دارند. ریشه‌این پیچیدگی‌ها در شخصیت فراگیر می‌باشد که دانش، مهارت‌ها و برداشت‌های خود را باشیوه‌ها و نگرش‌های متفاوت و در سطوح گوناگونی کسب می‌کند، زیرا فرایندهای ذهنی و سطوح آمادگی افراد با یکدیگر متفاوت است (برای مطالعه بیشتر می‌توان به [۱، ۳-۷] رجوع کرد). پیچیدگی عمل تفکر و یادگیری در انسان، دشواری مفاهیم، مهارت‌ها و استدلال‌های ریاضی و نیز ضعف برخی از معلمان و شفاف نبودن هدف‌های برنامه‌ای موجب ناکامی فراگیران در یادگیری دانش ریاضی می‌شود. در واقع ریاضیات عرصه‌ای دشوار برای تدریس و یادگیری می‌باشد [۲]. همچنین یکی دیگر از مشکلات در یادگیری ریاضی، عدم ایجاد ارتباط بین مفاهیم ریاضی است که باعث می‌شود یادگیرنده مجموعه‌ای از مفاهیم مجزا را یاد بگیرد و این مورد زمینه‌سازی برای ایجاد خلاقیت را مخدوش می‌کند. بنابراین پژوهشگران به دنبال پیدا کردن راهکارهایی برای ارتقای آموزش ریاضی هستند.

ما در این مقاله به بیان راهکارهایی برای ارتقای آموزش ریاضی از جمله آموزش روش‌های ساده اثبات و توسعه تفکر ریاضی در استدلال کردن می‌پردازیم که به ویژه در تدریس ریاضیات دبیرستانی و ریاضی عمومی دانشگاهی مفید خواهد بود.

۲. اهمیت بیان تاریخ و فلسفه‌ی ریاضی

یکی از اساسی‌ترین و جذاب‌ترین راهکارها برای تعمیق مفاهیم ریاضی و جذابیت آن‌ها، بیان تاریخ و فلسفه‌ی ریاضی است. در پس هر مفهوم ریاضی هر اندازه که ساده به نظر برسد، مفاهیم عمیقی وجود دارد که اشخاص با دانستن آن‌ها، درک بهتری از آن مفهوم خواهند داشت. معرفی ریاضی‌دانان بزرگ و دانشمندان علم ریاضی می‌تواند در کنار آموزش مفاهیم ریاضی بسیار جذاب باشد. معرفی شخصیت‌های بزرگی مانند نیوتن، لایبنیتز، اوپیتال، گاوس، کوشی، اولر و که هر کدام از برجستگان علم ریاضی به شمار می‌روند و یافته‌های آنان، می‌تواند علاوه بر جذاب‌تر کردن تدریس، زمینه و انگیزه را برای مطالعه‌ی بیشتر افراد فراهم سازد، به گونه‌ای که چه بسا افراد نخبه و مستعد در آینده خود در این ردیف قرار گیرند. به نظر می‌رسد که مطالعه‌ی هر علمی، جدا از مطالعه‌ی دانشمندان مطرح در آن علم و یافته‌های این افراد نیست. به عنوان مثال، انتگرال از مفاهیمی است که همواره برای دانش آموزان و دانشجویان چالش برانگیز است. بد نیست در زمان آموزش آن ذکر شود که مفهوم انتگرال نخستین بار توسط اسحاق نیوتن ریاضی‌دان و فیزیک‌دان نامدار انگلیسی بیان شد و برای آشنایی اهمیت آن خوب است که به بیان تاریخچه کوتاهی از تلاش‌های بسیار در تعمیم آن پردازیم. مثلاً اشاره به این که کارل فردریش گاوس ریاضی‌دان بزرگ آلمانی مفهوم انتگرال روی سطح را مطرح کرد، که

با کمک آن قوانین مهم فیزیکی مانند شارهای حاصل از میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بیان شد. گاوس بیان می‌کند که شار الکتریکی عبوری از هر سطح بسته، متناسب با بار داخل آن است:

$$\oint E dS = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

به طور مشابه، گاوس ثابت می‌کند که شار مغناطیسی عبوری از هر سطح بسته، همیشه برابر صفر است:

$$\oint B dS = 0.$$

درک صحیح این مفاهیم فیزیکی، مستلزم درک عمیق از این نوع انتگرال‌ها است. لویی آگوستین کوشی، ریاضی دان مشهور فرانسوی، مفهوم انتگرال‌های مختلط را ارائه داد. پیش از آن، مفهوم انتگرال روی خم (منحنی الخط) توسط گرین ارائه شده بود. انتگرال ریمان اشتیلیس، انتگرال لبگ، انتگرال لوی و انواع دیگری از انتگرال‌ها به شمار می‌روند. البته مقصود از گفتن این مطالب به هیچ عنوان این نیست که چنین انتگرال‌هایی در دوره‌ی دبیرستان یا سال اول دانشگاه تدریس شود، بلکه بهتر است دست‌کم اشاره‌ای به آن صورت گیرد تا با نام آن‌ها آشنا باشند و زمینه برای آموزش آن‌ها در آینده فراهم شود. بدیهی است که این اشاره در حاشیه‌ی درس اصلی انجام می‌گیرد.

۳. ایجاد ارتباط میان بخش‌های مختلف علوم

یکی از موثرترین ایده‌ها برای جذاب‌تر شدن آموزش ریاضی، بیان ارتباط میان بخش‌های مختلف ریاضی، فیزیک و علوم دیگر است. این کار نه تنها به بهبود یادگیری ریاضی کمک می‌کند، بلکه زمینه را برای ایجاد خلاقیت در اشخاص و خلق ایده‌های جدید فراهم می‌کند. در این جا، برای درک بهتر مطلب، مثالی ارائه می‌دهیم.

بسط دو جمله‌ای نیوتن که از مفیدترین ابزارها در جبر است، در بخش‌های مختلف ریاضی ظاهر می‌شود. توزیع دو جمله‌ای که از مفاهیم مهم در آمار و احتمال است، ارتباط نزدیکی با بسط دو جمله‌ای نیوتن دارد. اگر یک فرایند دو حالت را چند بار تکرار کنیم، توزیع دو جمله‌ای به دست می‌آید. هنگامی که یک سکه را چند بار پرتاب می‌کنیم (یا چند سکه را با هم پرتاب می‌کنیم)، در حقیقت یک بسط دو جمله‌ای را شبیه سازی می‌کنیم. به حالات ممکن برای پرتاب دو سکه توجه کنیم

$$(رو, رو), (پشت, رو), (رو, پشت), (پشت, پشت)$$

حال، به جملات مربوط به اتحاد مربع توجه می‌کنیم

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb$$

می بینیم که دقیقا همان الگو در این جا دیده می شود. با توجه به این مطلب، می توانیم احتمال های مورد نظر را به آسانی بیابیم.

در این جا، مثال دیگری از حسابان مطرح می کنیم که ارتباط میان مفاهیم را بیشتر نشان می دهد. ماتریس ها از زیباترین ابزارهای ریاضی به شمار می روند که در بخش های مختلف ریاضی و علوم دیگر کاربرد دارند. تابع زیر را در نظر می گیریم

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

معادل ماتریسی آن را می توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$f \sim \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

در این صورت، ثابت می شود که عمل ترکیب توابع، معادل با عمل ضرب ماتریس ها است. مثلا با در نظر گرفتن توابع

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad g(x) = \frac{x+2}{x-2},$$

معادل ماتریسی آن ها را به شکل زیر می نویسیم:

$$f \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad g \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

در این صورت

$$f \circ g \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

و در نتیجه

$$f \circ g = \frac{2x+0}{0x+4} = \frac{x}{2}$$

بیان چنین روابطی و تحلیل آن ها این فرصت را به دانش آموز می دهد تا در صورت مستعد بودن، خود کاشف روابط بیشتری از این دست شود. این مطلب به نوبه ی خود زمینه ساز گسترش روز افزون دانش بشری خواهد بود.

۴. ایجاد زمینه برای پذیرش مفاهیم بالا

سری تیلور، یکی از مهم‌ترین ابزارها در آنالیز است. با کمک سری تیلور، می‌توانیم توابع پیچیده را با کمک چند جمله‌ای‌ها که توابع ساده‌ای هستند، تقریب بزنیم. برای ایجاد زمینه‌ی ذهنی لازم برای پذیرش سری تیلور، می‌توانیم در ابتدای امر با یک مثال به این صورت عمل کنیم. می‌دانیم که با افزایش درجه‌ی یک چند جمله‌ای، تعداد ریشه‌های آن افزایش می‌یابد. به عبارت بهتر، تعداد موج‌های آن افزایش می‌یابد. حال تابع سینوس را در نظر می‌گیریم. روشن است که تابع سینوس بی‌نهایت موج دارد. بنابراین طبیعی به نظر می‌رسد که (بعد از به دست آوردن سری تیلور) بگوییم تابع سینوس یک چند جمله‌ای از درجه‌ی بی‌نهایت است، به عبارت بهتر، تابع سینوس یک بی‌نهایت جمله‌ای است.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

البته توجه دادن به این نکته نیز ضروری است که این تعبیر تنها یک توجیه برای درک مقدماتی یک سری تیلور است و مشابهت آن را با چند جمله‌ای‌ها بیان می‌کند، ولی این تمام موضوع نیست و باید به فراگیران تاکید نمود که حتی توابعی که به تعبیر ما فاقد موج هستند (مانند تابع نمایی)، باز هم دارای سری تیلور می‌باشند. در همین جا، مفهوم تابع زوج و فرد هم قابل بیان است. می‌بینیم که در سری تیلور تابع سینوس همگی جملات توان‌های فرد دارند. به این دلیل، می‌گوییم سینوس یک تابع فرد است. کلمه‌ی زوج و فرد از همین جا ناشی می‌شود، و آن‌چه در کتب درسی به عنوان تعریف نموداری آن ارائه می‌شود، در حقیقت نتیجه‌ای از این ویژگی است. به صورت مشابه برای تابع کسینوس داریم

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

می‌بینیم که در سری تیلور تابع کسینوس همگی جملات توان‌های زوج دارند. به همین دلیل، می‌گوییم کسینوس یک تابع زوج است.

هم‌ارزی‌ها، نمونه‌ی دیگری از کاربرد سری‌های تابعی هستند. هنگامی که می‌گوییم یک تابع پیچیده هم‌ارز یک عبارت ساده است، در حقیقت جملات ابتدایی سری تیلور آن را انتخاب کرده‌ایم. برای مثال

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

حال هر اندازه جملات بیشتری از این سری را انتخاب کنیم، تابع سینوس با دقت بیشتری تقریب زده می‌شود.

$$\sin x \sim x,$$

$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!},$$

$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}.$$

به صورت مشابه برای تابع کسینوس داریم

$$\cos x \sim 1,$$

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2!},$$

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},$$

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}.$$

مثال دیگری از ارتباط میان مفاهیم دبیرستانی و دانشگاهی می‌آوریم. مفهوم قدر مطلق، از ساده ترین مفاهیم دبیرستانی است، که در سال‌های اول دبیرستان آموزش داده می‌شود. به دانش آموزان به زبان ساده گفته می‌شود که قدر مطلق، علامت عدد را حذف می‌کند. بنابراین، اعداد مثبت و منفی پس از قرار گرفتن در قدر مطلق، مثبت می‌شوند. حال در دوره‌ی دانشگاهی که قدر مطلق اعداد مختلط آموزش داده می‌شود، این سوال برای اشخاص پیش می‌آید که ارتباط قدر مطلق دبیرستانی با قدر مطلق دانشگاهی چیست. واقعیت این است که همه‌ی قدر مطلق‌ها تعریف یکسانی دارند. به زبان ساده، قدر مطلق یک عدد، فاصله‌ی آن عدد تا صفر است. حال در صفحه‌ی اعداد مختلط و حتی در فضای سه بعدی هم همین تعریف برقرار است. اگر قدر مطلق را به عنوان فاصله تا صفر معرفی کنیم، ابهام آن به صورت کامل برطرف می‌شود،

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

این دقیقاً همان چیزی است که در آنالیز تابعی به عنوان ارتباط متر و نرم در فضاهای نرم‌دار مطرح می‌شود. در حالت کلی داریم

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

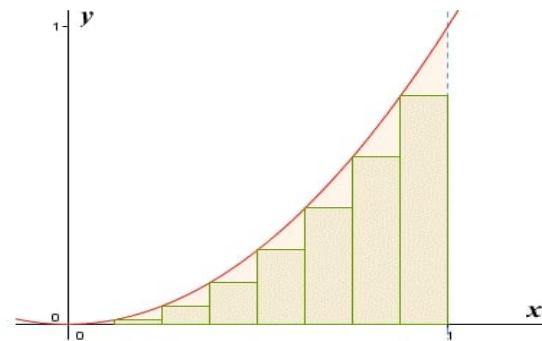
و در حالت خاص داریم

$$\|x\| = d(x, 0).$$

بنابراین، ارائه‌ی صحیح مفهوم قدر مطلق، می‌تواند ابزار توان‌مندی برای ارائه‌ی مفاهیم نرم و متر و ارتباط آن‌ها در رده‌های آموزشی بالاتر باشد. درحقیقت، مفهوم نرم تعمیمی از مفهوم قدر مطلق است.

۵. معرفی نمادها و واژه‌های ریاضی

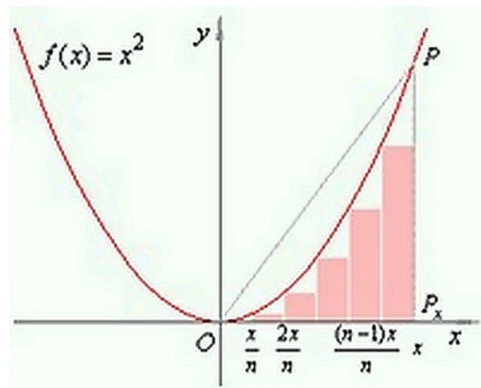
بیان این که هر نماد در ریاضی نشان چه مفهومی است و چه پیشینه‌ای دارد می‌تواند به پذیرش این مفهوم در ذهن دانش‌آموز یا دانشجو کمک کند. به عنوان مثال، نماد انتگرال یا $\int$ حرف S در زبان انگلیسی است، که برگرفته از کلمه‌ی sum به معنای جمع است. نماد Σ (سیگما) هم که برای نشان دادن عمل جمع به کار می‌رود، معادل یونانی حرف S در زبان انگلیسی است. هر کسی که مختصری با مفهوم انتگرال آشنا باشد، می‌داند که انتگرال در حقیقت حالت پیوسته‌ی سیگما است. هنگامی که مجموع ریمان یک تابع را برای افزایش بسیار ظریف از یک مجموعه حساب می‌کنیم، در حقیقت انتگرال آن تابع را تخمین زده‌ایم. واژه‌ی انتگرال در زبان فرانسه، به معنای کل همه است. این واژه، هم خانواده‌ی واژه‌ی $integer$ به معنای عدد صحیح است. نیوتن در کتاب ارزشمند خود، اصول ریاضی فلسفه‌ی طبیعی، این مفهوم را مطرح کرده است. از دیدگاه نیوتن، هنگامی که کل مساحت زیر یک منحنی را محاسبه می‌کنیم، انتگرال آن را حساب کرده‌ایم. از دید او، قسمت‌های کوچک اضافی که در مجموع ریمان ظاهر می‌شوند، مانند بخش اعشاری یک عدد هستند، و اگر بتوانیم همه‌ی قسمت‌ها را با هم حساب کنیم، به گونه‌ای که قسمت اضافی وجود نداشته باشد، انتگرال تابع را به دست آورده‌ایم. این مطلب مشابهت مفهوم انتگرال (شکل ۱) را با عدد صحیح روشن می‌کند. در شکل ۲ نمودار



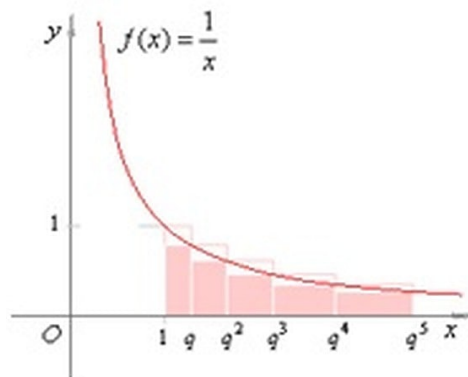
شکل ۱: مفهوم انتگرال

مربوط به انتگرال معین تابع $f(x) = x^2$ را در بازه‌ی $[0, a]$ ، $a > 0$ ، می‌بینیم. در شکل ۳ نمودار مربوط به انتگرال تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه‌ی $[1, a]$ ، $a > 1$ ، می‌بینیم. این شکل نشان می‌دهد که در بررسی انتگرال معین، لزوماً افزایش مساوی نیستند.

واژه‌ی مهم دیگر در ریاضیات دبیرستانی، واژه‌ی دیفرانسیل است که ریشه در کلمه‌ی $difference$ به معنای تفاوت و اختلاف دارد. همه می‌دانند که مشتق یک تابع، نسبت تغییرات تابع به تغییرات متغیر آن برای تغییرات بسیار کوچک است. از این رو دانش‌آموز با آگاهی از این مطلب که دیفرانسیل به معنای تغییرات و نمو یک متغیر است، می‌تواند درک بهتری از فرمول آن داشته باشد و خود در صورت لزوم فرمول را به دست

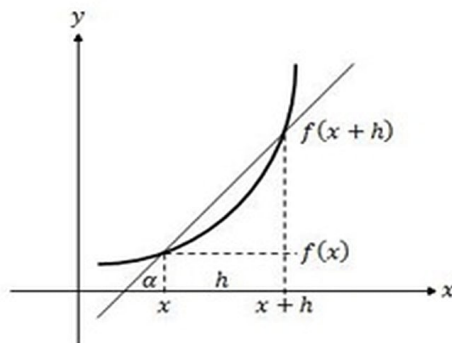


شکل ۲: انتگرال معین $f(x) = x^2$ در بازه $[0, a]$ ، $a > 0$.



شکل ۳: انتگرال $f(x) = \frac{1}{x}$ در بازه $[1, a]$ ، $a > 1$.

آورد. شکل ۴، مفهوم مشتق را به عنوان نسبت تغییرات تابع به تغییرات متغیر آن، تداعی می‌کند. نمادهای



شکل ۴: مفهوم مشتق

دیگری که در حسابان به کار می‌روند نمادهای ' و " برای نشان دادن مشتق اول و دوم یک تابع هستند، که

آن‌ها را به ترتیب پریم و زگوند تلفظ می‌کنیم. بد نیست اگر به دانش‌آموزان گفته شود که پریم و زگوند به ترتیب تلفظ فرانسه واژه *prime* به معنای اول و *second* به معنای دوم است.

۶. ارائه‌ی اثبات‌های ساده در حد توان دانش‌آموزان

یکی از آفات جدی در آموزش ریاضی و علوم پایه دیگر این است که دانش‌آموزان صرفاً مجبورند با حفظ اسامی و فرمول‌های خاص، آن‌ها را در مسائل مختلف به کار برند، بدون این‌که کوچک‌ترین آگاهی از مفاهیم و اثبات‌های آن داشته باشند. این مساله به‌ویژه در آزمون‌های چند گزینه‌ای که در آن‌ها حل‌های سریع و کوتاه به دانش‌آموزان گفته می‌شود، بیشتر به چشم می‌خورد. البته منظور این نیست که راه حل‌های سریع و میان‌بر به‌طور کلی کنار گذاشته شوند، بلکه باید قبل از ارائه‌ی آن‌ها به دانش‌آموز، تلاش شود تا در حد امکان مفاهیم و روش‌های اصلی هم آموزش داده شوند. به عنوان مثال، به دانش‌آموزان گفته می‌شود که هر عدد به توان صفر مساوی یک می‌شود. اغلب دانش‌آموزان این را به عنوان یک اصل حفظ می‌کنند. حال آن‌که با آگاهی مختصری از ویژگی‌های توان، می‌توانند درک بهتری از چرایی آن داشته باشند. برای مثال، به عبارت زیر توجه می‌کنیم

$$\frac{2^3}{2^3}$$

این عبارت را از دو طریق می‌توان محاسبه کرد، از یک سو روشن است که

$$\frac{2^3}{2^3} = \frac{8}{8} = 1.$$

از سوی دیگر، می‌دانیم که اگر پایه‌ها برابر باشند، در تقسیم توان‌ها از هم کم می‌شوند، پس

$$\frac{2^3}{2^3} = 2^{3-3} = 2^0 = 1,$$

بنابراین

$$2^0 = 2^{3-3} = \frac{2^3}{2^3} = \frac{8}{8} = 1.$$

در همین‌جا، دانش‌آموز نکته سنج و باهوش متوجه می‌شود که چرا صفر به توان صفر تعریف نمی‌شود، زیرا از بحث بالا برمی‌آید که

$$0^0 = \frac{0}{0}.$$

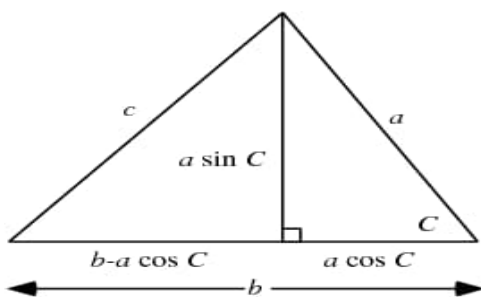
همچنین مبهم بودن $\frac{0}{0}$ را نیز می‌توان به سادگی توضیح داد. فرض کنیم $\frac{0}{0} = a$. در این صورت، $0 = 0 \cdot a$ که در این جا a می‌تواند هر عددی باشد. بنابراین عدد مشخصی برابر کسر $\frac{0}{0}$ نیست و به همین دلیل آن را مبهم گوئیم. همچنین، اثبات مشابهی مانند فوق را می‌توانیم برای درک توان‌های منفی ارائه دهیم.

سری هم‌ساز یکی از آموزنده ترین سری‌های آنالیز ریاضی است. و اگرایی سری هم‌ساز، نشان می‌دهد که حتی کوچک بودن جملات و میل کردن آن‌ها به صفر، شرط کافی برای همگرایی آن سری نیست. اثبات مقایسه‌ای جالبی را در زیر می‌بینیم

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots &> 1 + \frac{1}{2} \\
 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots & \\
 > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots &
 \end{aligned}$$

مشاهده می‌کنیم که در طرف راست، تعداد نامتناهی جمله‌ی $\frac{1}{2}$ داریم. دانش آموز در همین جا می‌تواند مفهوم بی‌نهایت را درک کند. اگر یک مقدار مشخص را به صورت بی‌پایان با خودش جمع کنیم، حاصل بیشتر و بیشتر می‌شود و از هر عددی بزرگ تر می‌شود.

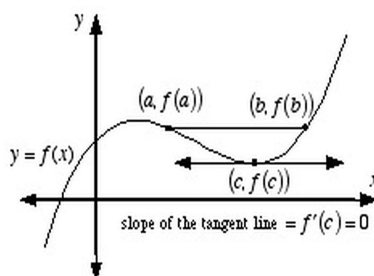
مثالی از هندسه می‌آوریم. قضیه‌ی کسینوس‌ها در حقیقت حالت کلی قضیه فیثاغورس است، اما جالب است که حالت کلی با استفاده از حالت خاص خود ثابت می‌شود. در شکل ۵، اگر قضیه‌ی فیثاغورس را برای مثلث کوچک‌تر که c وتر آن است بنویسیم، قضیه‌ی کسینوس‌ها به دست می‌آید.



شکل ۵: معادل بودن قضیه فیثاغورس با قضیه‌ی کسینوس‌ها

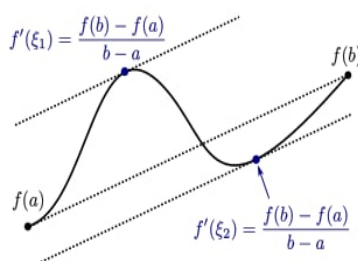
از سوی دیگر، اگر در قضیه‌ی کسینوس‌ها، زاویه را برابر نود درجه در نظر بگیریم، قضیه‌ی فیثاغورس به دست می‌آید. این مطلب نشان می‌دهد که بر خلاف تصور عمومی، قضیه‌ی فیثاغورس حالت خاصی از قضیه‌ی کسینوس‌ها نیست، بلکه با آن معادل است. مثال مشابه دیگری از آنالیز ریاضی می‌آوریم. قضیه‌ی مقدار میانگین در حقیقت حالت کلی قضیه‌ی رول است، اما جالب است که حالت کلی با استفاده از حالت خاص خود ثابت می‌شود. بر خلاف تصور عمومی، قضیه‌ی رول حالت خاصی از قضیه‌ی مقدار میانگین نیست، بلکه با

آن معادل است. شکل ۶، نمایی از قضیه‌ی رول را نمایش می‌دهد. همان‌گونه که در شکل ۷ مشاهده می‌کنیم،



شکل ۶: نمایی از قضیه‌ی مقدار میانگین

قضیه‌ی مقدار میانگین از لحاظ هندسی با چرخاندن شکل از قضیه‌ی رول نتیجه می‌شود. پس این دو با هم معادل هستند.



شکل ۷: معادل بودن قضیه‌ی رول با قضیه‌ی مقدار میانگین

۷. نتیجه‌گیری

ریاضیات عرصه‌ای دشوار برای تدریس و یادگیری می‌باشد. از مشکلات در آموزش ریاضی و دیگر علوم پایه این است که دانش آموزان صرفاً مجبورند با حفظ اسامی و فرمول‌های خاص، بدون آگاهی از مفاهیم و اثبات‌های آن، آن‌ها را در مسائل مختلف به‌کار ببرند. در این جا پیشنهاد می‌شود که قبل از ارائه‌ی آن‌ها به فراگیر، تلاش شود تا در حد امکان مفاهیم و روش‌های اصلی هم آموزش داده شوند. ما در این مقاله، به بیان چند راهکار برای ارتقای آموزش ریاضی پرداختیم که عبارت بودند از بیان تاریخچه مترتب بر مفاهیم ریاضی، ایجاد ارتباط میان بخش‌های مختلف علوم، ایجاد زمینه برای پذیرش مفاهیم بالاتر، معرفی نمادها و واژه‌های ریاضی و ارائه‌ی اثبات‌های ساده در حد توان فراگیران.

سپاس‌گزاری

در پایان قصد داریم که از تمامی زحمات سردبیر مجله و داوران محترم به دلیل پیشنهادات خوبی که برای بهبود این مقاله داشتند، تشکر و قدردانی نماییم.

مراجع

- [۱] ت. سیگفرید، ریاضیات زیبا، ترجمه مهدی صادقی، نشر نی، ۱۳۹۶.
- [۲] ح. علم‌الهدی، اصول آموزش ریاضی، نشر نما، ۱۳۹۹.
- [۳] م. ر. کرامتی، آموزش ریاضی در هزاره‌ی سوم، نشر صدای معاصر، ۱۳۹۰.
- [۴] ر. کورانت، ر. رابینز، ریاضیات چیست؟، ترجمه‌ی حسن صفاری، انتشارات خوارزمی، ۱۳۴۹.
- [۵] ز. گویا، آموزش ریاضی چه نیست؟ دو فصل نامه‌ی نظریه و عمل در برنامه‌ی درسی، ۲ (۱۳۹۳)، شماره ۳، ۲۴-۵.
- [۶] ز. گویا، ا.ح. آشنا، از آموزش و ریاضی، تا آموزش ریاضی، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۸۵ (۱۳۹۵)، ۱۵-۹.
- [۷] م. هندرسون، نظریه‌های تاثیرگذار در علم ریاضیات، ترجمه‌ی سحر عرب زاده، نشر سبز، ۱۳۹۶.



Towards Mathematical Sciences

Volume 2, Issue 1, Spring and Summer 2022



Publisher

Ferdowsi University of Mashhad

Director-in-Charge

Mohammad Sal Moslehian

Editor-in-Chief

Shirin Hejazian

Executive Manager

Mohammad Janfada

Editorial Board

Masoud Ariannejad, *University of Zanjan, Zanjan*

Mohammad Janfada, *Ferdowsi University of Mashhad*

Arezou Habibirad, *Ferdowsi University of Mashhad*

Davod Khojasteh Salkuyeh, *University of Guilan*

Amir Daneshgar, *Sharif University of Technology*

Mahdi Doostparast, *Ferdowsi University of Mashhad*

Ali Dolati, *Yazd University*

Farzad Radmehr, *Ferdowsi University of Mashhad*

Habib Rajabi Mashhadi, *Ferdowsi University of Mashhad*

Bakhtiyar Shabani, *Ferdowsi University of Mashhad*

Ahmad Safapour, *Vali-E-Asr University of Refsanjan*

Massoumeh Fashandi, *Ferdowsi University of Mashhad*

Gholam Reza Mohtashami Borzadaran, *Ferdowsi University of Mashhad*

Ehsan Momtahan, *Yasouj University*

Ali Asghar Molavi, *Hakim Sabzevari University*

Madjid Mirzavaziri, *Ferdowsi University of Mashhad*

Advisory Board

Faezeh Toutounian Mashhad, *Ferdowsi University of Mashhad*

Rahim Zare Nahandi, *University of Tehran*

Omid Ali Shehni Karamzadeh, *Shahid Chamran University of Ahvaz*

Mohammad Ghasem Vahidi Asl, *Shahid Beheshti University*

Hassan Sadeghi, *Ferdowsi University of Mashhad*

Bahman Honary, *Ferdowsi University of Mashhad*

All rights are reserved for Ferdowsi University of Mashhad.

Mailing Address: TMSJ Office, Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad, P.O. Box 1159, Mashhad 91775, Iran.

Website Address: <https://tmsj.um.ac.ir>

Email: tmsj@um.ac.ir

Phone: +98-51-38806222 **fax:** +98-51-38807358



به سوی علوم ریاضی



فهرست مطالب

- ۱.....مباحثی روی دوگان بهینه قاب‌ها در فضاها ی هیلبرت.....
ف. عربانی نیشابوری، ع. ا. عارفی جمال
- ۱۷.....کنترل پروژه، مدیریت پروژه و برنامه‌ریزی شبکه‌ای.....
ا. منصوری
- ۳۱.....نقد و بررسی مفاهیم آنالیزی کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه.....
م. کیان
- ۸۱.....جبر خطی و فن آوری.....
ف. روحی
- ۹۱.....یک روش کارا برای حل مسائل معکوس سهموی با شرط اضافی.....
س. شکرپز، ح. آذری
- ۱۱۰.....کاهش فضای جستجوی مسائل بهینه‌سازی با روش‌های داده‌کاوی.....
م. حدادپور، م. علی‌نژادمفرد، م. دهقان نیری
- ۱۲۲.....بعضی از راه‌کارهای ارتقای آموزش ریاضی.....
ف. قومنجانی، م. ک. انوری