دوره ۳، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۲

دانشگاه فردوسی مشهد

به سوی علوم ریاضی

شاپا الکترونیک ۲۷۸۳-۵۱۶۲

tmsj.um.ac.ir

بسم الله الرحمن الرحیم

به سوی علوم ریاضی

دارای پروانه انتشار شماره ۸۶۳۹۶ به تاریخ ۱۳۹۹/۲/۱۵ از وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی، شاپا الکترونیک ۲۷۸۳-۵۱۶۲

دوره۳، شماره۱، بهار و تابستان ۱۴۰۲

این نشریه به صورت دوفصلنامه (دو شماره در سال) منتشر می شود.

نشانی:
مجله‌ی به سوی علوم ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، ص.پ. ۱۱۵۹، مشهد ۹۱۷۷۵
آدرس وبسایت: https://tmsj.um.ac.ir **ایمیل:** tmsj@um.ac.ir
تلفن: ۳۸۸۰۶۲۲۲-۰۵۱ فاکس: ۳۸۸۰۷۳۵۸-۰۵۱

مجله به سوی علوم ریاضی با هدف عمومی سازی ریاضیات، کمک به آشنایی جامعه به طور عام و جامعه دانشگاهی به طور خاص با جنبه‌های مختلف و کاربردهای ریاضی، آمار، و کامپیوتر و ارتباط آنها با سایر علوم در قالب چاپ مقالات علمی-ترویجی مرتبط می‌باشد.

این مجله مقالات در زمینه‌های ریاضی محض، ریاضی کاربردی، آمار و احتمال، علوم کامپیوتر، آموزش ریاضی، تاریخ و فلسفه ریاضی، کاربردهای ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر در سایر علوم، و نقدهای علمی را برای بررسی می‌پذیرد. همچنین ترجمه مقالاتی در موضوعات گفته شده نیز با شرایط خاص مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مقالات باید به گونه‌ای نوشته شوند که قابل فهم برای افرادی با اطلاعات پایه‌ای ریاضی در سطح کارشناسی یا دانشجویان تحصیلات تکمیلی باشند.

ارسال مقاله به این مجله به این معنی است که کلیه نویسندگان مقاله از این ارسال آگاه بوده، اصالت محتوای علمی آن را تأیید و با ارسال آن به مجله‌ی به سوی علوم ریاضی موافق بوده‌اند و به علاوه متعهد هستند که مقاله ارسالی به این مجله به‌طور همزمان در مراحل بررسی و یا چاپ در هیچ نشریه دیگری نیست. با ارسال مقاله به این مجله، همه نویسندگان متعهد می شوند که حقوق مالکیت فکری و اخلاق پژوهشی را رعایت نموده‌اند و کلیه حقوق استفاده از محتوا، جداول، تصاویر و ... را به ناشر واگذار کرده‌اند.

ارسال مقاله تنها از طریق لینک https://tmsj.um.ac.ir و به صورت الکترونیک امکان‌پذیر است. همچنین راهنمای نویسندگان و فایل فشرده فرمت مجله در این لینک قابل مشاهده است.

فهرست مطالب

Towards Mathematical Sciences

Vol. 3, No. 1, Spring and Summer 2023, pp. 1–8

DOI.10.22067/tmsj.2023.43621

Expository Article

به سوی علوم ریاضی

https://tmsj.um.ac.ir

INTEGRATION BY PARTS AND INFINITE SERIES

MOHAMMAD MOMENI KOHESTANI[1*] AND ALIREZA KHALILI ASBOEI[2]

[1]Bachelor of Mathematics Education, Farhangian University, Tehran, Iran

[2]Department of Mathematics, Farhangian University, Tehran, Iran

Abstract. In this paper, by using a student's calculation error in applying the integration formula using the subtraction method and reaching the correct answer, we reached the following formula $\int fg = \Sigma_{k=0}^{\infty}(-1)^k f^{(k)} g^{-(k+1)}$ where $g^{-(k)}$ is the k th successive antiderivative of g and $f^{(k)}$ is the k th derivative of f . We find by using the above series and Maclaurin series, interesting results about the convergence of some series. Also, due to the introductory nature of the integration formula using the subtraction and the infinite series, this series can be new topics for the next research is to provide researchers with a new method for deriving series and discovering new series.

2020 Mathematics Subject Classification. 42C15, 42C40

Keywords. Frames, dual frames, optimal duals, reconstruction formulas

Date: Rceived 15-7-2021 Revised 9-11-2021 Accepted 21-11-2021 Available Online 7-12-2021

*Corresponding author

دوره ۳، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۲، صص. ۱–۸
DOI. 10.22067/tmsj.2023.43621
مقاله علمی–ترویجی، ترجمه

https://tmsj.um.ac.ir

انتگرال‌گیری جزء به جزء و سری‌های نامتناهی

امیرمحمد مومنی کوهستانی[1*] و علی رضا خلیلی اسبوئی[2]

[1]دانشگاه مازندران، مازندران، ایران
amirmomeni526@gmail.com
[2] گروه ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران
khaliliasbo@yahoo.com

چکیده. مقاله حاضر ترجمه‌ای است از

S.J. Kilmer, *Integration by Parts and Infinite Series*, Mathematics Magazine, 81 (2008), no. 1, 51–55.

در این مقاله با استفاده از اشتباه محاسباتی یک دانش‌آموز در به‌کارگیری فرمول انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء و رسیدن به جواب صحیح، فرمول $\int fg = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k f^{(k)} g^{-(k+1)}$ به‌دست می‌آید که در آن $g^{-(k)}$، k–امین پادمشتق متوالی g و $f^{(k)}$، k–امین مشتق متوالی f است. با استفاده از سری فوق و سری مک‌لوران به نتایج جالبی در مورد همگرایی بعضی از سری‌ها دست می‌یابیم.

۱. انتگرال‌گیری جزء به جزء و سری

همه ما دانش‌آموزانی داشته‌ایم که پس از انجام یک اشتباه مفتضحانه در ابتدای محاسبات، به تقلاکردن ادامه داده‌اند؛ غافل از این‌که نتیجه‌شان چقدر غیرمنطقی و بغرنج باشد. به‌ندرت چنین تلاش‌هایی مانند آن‌چه یک

2020 Mathematics Subject Classification. 47A55, 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. انتگرال‌گیری جزء به جزء، سری‌های نامتناهی، بسط مک‌لوران.
تاریخ: دریافت ۱۴۰۱/۶/۳ بازنگری ۱۴۰۱/۲۶/۷ پذیرش ۱۴۰۱/۱۲/۱۵ انتشار برخط ۱۴۰۱/۱۲/۱۹

*نویسنده مسئول

نحوه ارجاع به این مقاله: ا.م. مومنی کوهستانی، ع.ر. خلیلی اسبوئی، انتگرال گیری جزء به جزء و سری‌های نامتناهی، به سوی علوم ریاضی، ۳ (۱۴۰۲)، شماره ۱، ۸–۱.

دانشجوی ترم دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال انجام داده و راه حل زیر را در امتحان نهایی خود ارائه کرده بود، جواب می‌دهد:

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= (\frac{x^2}{2}e^x - \frac{x^3}{3!}e^x + \frac{x^4}{4!}e^x - \frac{x^5}{5!}e^x + \dots) + C\\ &= -e^x + xe^x + e^x(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots) + C\\ &= xe^x - e^x + e^x e^{-x} + C\\ &= xe^x - e^x + C.\end{aligned}$$

در ابتدا استادی که امتحان را تصحیح می‌کند چنین فکر کرد که می‌تواند نمره کمی برای این کار قائل شود، زیرا دانش‌آموز به صورت وارونه f و g را در فرمول معمول انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء یعنی

$$\int fg = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f^{(k)} g^{-(k+1)},$$

انتخاب کرده بود. در این‌جا g^{-k} نشان‌دهنده k–امین پادمشتق متوالی g، $f^{(k)}$ نمایش k–امین مشتق f و $f^{(n)}$ ثابت است. با این‌حال، چون پاسخ صحیح بود تصمیم گرفت به کار او توجه بیشتری کند. از آنجایی که $f^{(k)}$ هرگز ثابت نبود، واضح بود که او به طور ضمنی شکل سری زیر را برای حل فرض کرده بود:

$$\int fg = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f^{(k)} g^{-(k+1)}. \tag{۱.۱}$$

در این محاسبات سری (۱.۱) راه حل صحیح را ارائه کرد، اما آیا این روش تیری در تاریکی بود یا می‌توان از این روش برای یافتن نمایش‌های معتبر دیگری به صورت سری استفاده کرد؟

در ادامه مقاله سری (۱.۱) را سری حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌نامیم. بیایید ابتدا سری حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء را برای توابع سینوس و کسینوس مشخص سازیم و سپس آن‌ها را با بسط مک لوران‌شان مقایسه کنیم. در پایان مقاله به همگرایی (۱.۱) خواهیم پرداخت.

$$\begin{aligned}\sin x &= \int_0^x \cos t dt\\ &= x\cos x + \frac{x^2}{2}\sin x - \frac{x^3}{3!}\cos x - \frac{x^4}{4!}\sin x + \frac{x^5}{5!}\cos x + \frac{x^6}{6!}\sin x \dots\\ &= \cos x(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}...) + \sin x(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!}\dots)\\ &= \cos x(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}...) - \sin x(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}\dots) + \sin x\end{aligned}$$

از این رو اگر فرض کنیم

$$\sigma_s=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!},\ \sigma_c=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},$$

خواهیم داشت

$$\sigma_s\cos x-\sigma_c\sin x=0. \tag{۲.۱}$$

به عبارت دیگر

$$\begin{aligned}1-\cos x=&\int_0^x \sin t dt\\ =&x\sin x-\frac{x^2}{2}\cos x-\frac{x^3}{3!}\sin x+\frac{x^4}{4!}\cos x+\frac{x^5}{5!}\sin x-\frac{x^6}{6!}\cos x\dots\\ =&\sin x(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\dots)+\cos x(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}\dots)\\ =&\sin x(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\dots)+\cos x(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}\dots)\\ &-\cos x.\end{aligned}$$

بنابراین با در نظر گرفتن σ_s و σ_c به‌صورت بالا خواهیم داشت:

$$\sigma_c\cos x+\sigma_s\sin x=1. \tag{۳.۱}$$

با حل هم‌زمان رابطه‌های (۲.۱) و (۳.۱) داریم

$$\sigma_s=\sin x,\sigma_c=\cos x$$

و این نشان می‌دهد که این روش در واقع نمایش‌های درست سری برای $\sin x$ و $\cos x$ را حاصل می‌کند، در حقیقت سری مک‌لوران آن‌ها به‌دست می‌آید.

عدد π را در نظر میگیریم. راه‌های مختلفی برای یافتن سری حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء مناسبی برای محاسبه عدد π وجود دارد. اولین روشی که ارائه می دهیم، با استفاده از این واقعیت است که π مساحت دایره واحد است. قرار می‌دهیم

$$(2k-1)!!=(2k-1)(2k-3)...5.3.1.$$

در این‌صورت،

$$
\begin{aligned}
\pi &= 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \\
&= 4\int_0^1 \sqrt{1+x}\sqrt{1-x}dx \\
&= 4[-\frac{2}{3}\sqrt{1+x}(\sqrt{1-x})^3 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{(-1)^{k+1}(2k-3)!!}{2^k(\sqrt{1+x})^{2k-1}}.\frac{(-1)^{k+1}2^{k+1}(\sqrt{1-x})^{2k+3}}{(2k+3)!!}]\Big|_0^1 \\
&= 4[-\frac{2}{3}\sqrt{1+x}(\sqrt{1-x})^3 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\sqrt{1-x})^{2k+3}}{(2k+3)(2k+1)(2k-1)(\sqrt{1+x})^{2k-1}}]\Big|_0^1 \\
&= \frac{8}{3} + 8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)(2k+1)(2k-1)} \\
&= 8\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)(2k+1)(2k-1)}.
\end{aligned}
$$

روش تجزیه به کسرهای جزئی نیز می‌تواند برای یافتن این سری به‌کار آید. لس رید[۱] همکاری از دانشگاه ایالتی میسوری، مثال زیبای زیر را برای یک سری حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء با استفاده از تابع $\arctan$ برای محاسبه π به‌دست آورد. با در نظر گرفتن $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$ و استفاده از تجزیه کسرها داریم

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}).$$

با استفاده از روش سری‌های حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء رابطه زیر بدست می‌آید

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x+a} &= \frac{x}{x+a} + \frac{1}{2}(\frac{x}{x+1})^2 + \frac{1}{3}(\frac{x}{x+a})^3 + \frac{1}{4}(\frac{x}{x+a})^4 + \cdots + C \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(\frac{x}{x+a})^k.
\end{aligned}
$$

[۱] Les Reid

بنابراین

$$\begin{aligned}\pi &= 4\arctan 1\\ &= 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\\ &= \frac{2}{i}\int_0^1 (\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i})dx\\ &= \frac{2}{i}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}[(\frac{1}{1-i})^k-(\frac{1}{1+i})^k]_0^1\\ &= \frac{2}{i}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+i)^k-(1-i)^k}{2^k k}\\ &= 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}^k(e^{\frac{\pi k i}{4}}-e^{\frac{-\pi k i}{4}})}{2^k k.2i}\\ &= 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi k}{4}}{2^{\frac{k}{2}}k}.\end{aligned}$$

در برخی شرایط، روش سری‌های حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌تواند برای یافتن مجموع یک سری مورد استفاده قرار گیرد. در این‌جا می‌خواهیم مجموع زیر را برای $n \geq 1$ محاسبه کنیم:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)...(k+n)}.$$

این مقدار به صورت یک ثابت در معادله زیر ظاهر می‌شود:

$$\begin{aligned}\int x^{n-1}\ln x dx &= \frac{x^n}{n}\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{n+k}(n-1)!}{(n+k)!}.\frac{(-1)^{(k+1)}(k-1)!}{x^k}+C\\ &= \frac{x^n}{n}\ln x - x^n(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)!}{(n+k)!}+C\\ &= \frac{x^n}{n}\ln x - x^n(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+n)}+C\end{aligned}$$

مشتق‌گیری از هر دو طرف، ثابت انتگرال را حذف می‌کند.

$$x^{n-1}\ln x = x^{n-1}\ln x+\frac{x^{n-1}}{n}-nx^{n-1}(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+n)}$$

با ساده‌کردن این معادله خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+n)}=\frac{1}{n!n}.$$

نتیجه به‌دست آمده از طریق قاعده تلسکوپی نیز قابل محاسبه است.

حال به همگرایی سری‌های حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌پردازیم. به طور کلی شرایط همگرای این سری‌ها به‌راحتی قابل بررسی است. با چند بار استفاده از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء خواهیم داشت:

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{-(k+1)}(t)g^{(k)}(t)\Big|_a^b + (-1)^{n-1}\int_a^b f^{-(n)}g^{(n)}(t)dt, \quad (۴.۱)$$

از این رو به منظور تعیین همگرایی سری‌های حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء کافی است نشان دهیم که انتگرال سمت راست (۴.۱) به صفر میل می‌کند. اما

$$\Big|\int_a^b f^{-(n)}g^{(n)}(t)dt\Big| \le \int_a^b {}^{-(n)}g^{(n)}(t)\Big|dt$$
$$\le (b-a)\sup|f^{-(n)(t)g^{(n)}(t)}| : a < t < b.$$

بنابراین یک سری حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء مربوط به انتگرال متناظرش، درصورتی همگراست که

$$\sup\{|f^{-(n)(t)g^{(n)}(t)}| : a < t < b\} \to 0. \quad (۵.۱)$$

به عنوان مثال همگرایی دومین سری حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء را برای π که در بالا ارائه شده است بررسی می کنیم. از آن‌جا که

$$\pi = 4\arctan 1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{2}{i}\int_0^1 (\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i})dx,$$

کافی است نشان دهیم سری حاصل از انتگرال گیری جزء به جزء برای $\int_0^1 (x+a)^{-1}dx$ که در آن $a = \pm i$ همگراست. به این منظور، فرض کنید

$$f(x) = 1,\ g(x) = (x+a)^{-1}.$$

فرض کنید n یک عدد نامنفی باشد، در این صورت توابع $\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}$ و x^n روی بازه $[0,1)$ صعودی اند و در نتیجه ترکیب آن‌ها نیز صعودی است و داریم:

$$\sup\{|f^{-(n)}(x)g^{(n)}(x)| : 0 < x < 1\}$$
$$= \sup\{|\frac{x^n}{n!}\frac{n!}{(x+a)^{n+1}}| : 0 < x < 1\}$$
$$= \sup\{(\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}})^n . \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} : 0 < x < 1\} \quad \le (\frac{1}{\sqrt{2}})^n .1 \to 0.$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۵.۱) نتیجه می شود این سری حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء به π همگرا است.

از آن‌جایی که معیارهای همگرایی یک سری حاصل از انتگرال‌گیری به راحتی قابل بررسی هستند و به دلیل تنوع در فرم، سری‌های حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌توانند کاربرد گسترده‌ای داشته باشند. همچنین، به دلیل ماهیت مقدماتی انتگرال جزء به جزء و سری‌های نامتناهی، موضوعات جدیدی برای کلاس درس و پروژه‌های دانشجویان سطح بالاتر فراهم می‌شوند و این روش به ریاضیدانان راه‌هایی برای به دست آوردن سری‌ها و قابلیت کشف سری‌های جدید را ارائه می‌کند.

در پایان ذکر این مطلب ضروری است که این مقاله، ترجمه مقاله [۱] بوده است.

۲. تقدیر و تشکر

مترجمین از داوران محترم در خواندن نسخه اولیه، راهنمایی‌های ارزنده‌شان و کمک به بهبود ترجمه کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

[1] S.J. Kilmer, *Integration by parts and infinite series*, Mathematics Magazine, 81 (2008), no. 1, 51–55. http://www.jstor.org/stable/27643080

Towards Mathematical Sciences

Vol. 3, No. 1, Spring and Summer 2023, pp. 9–21

DOI.10.22067/tmsj.2023.43692

Expository Article

به سوی علوم ریاضی

INVESTIGATING THE IMPACT, BARRIERS AND NECESSITY OF USING NEW EDUCATIONAL TECHNOLOGIES IN TEACHING SCHOOL MATHEMATICS IN THE POST-CORONA PERIOD

MOSTAFA ABEDIYEH[1]

[1]Iran University of Science and Technology
abdyhm@gmail.com

Abstract. After the wide spread of the corona virus in the world, a new era has begun in the field of social life, which has affected human life, education and mission. In order to continue the educational process of students, this disease has forced education to use new educational technologies, and these technologies have also caused transformations and changes in the competence required and appropriate for the modern world in students and teachers. New educational technologies have a significant impact on learning, which has changed the role of learners and teachers. Today's students cannot be taught mathematical concepts in the classroom with the old methods of teaching, experience and research have proven that learning in this method is not effective and reliable. Education and taking help from new educational materials and ICT made the mathematics lesson, which has always been associated with anxiety in all grades and levels of education due to its abstract nature, concrete so that understanding and learning it becomes enjoyable for students. This article examines new educational methods using technology (with ICT approach) in mathematics to facilitate the learning of mathematics by students in schools in the post-corona era.

2020 Mathematics Subject Classification. 97U50, 97U10

Keywords. Mathematics education, new educational technologies, information and communication technology, post-corona era

Date: Rceived 7-10-2022 Revised 11-2-2023 Accepted 10-3-2023 Available Online 3-4-2023

دوره ۳، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۲ ، صص. ۹–۲۱

DOI. 10.22067/tmsj.2023.43692

مقاله علمی–ترویجی

به سوی علوم ریاضی

بررسی تاثیر، موانع و لزوم استفاده از فن‌آوری‌های نوین آموزشی در آموزش ریاضیات مدرسه‌ای در دوران پساکرونا

سید مصطفی عابدیه[۱]

[۱]دانشگاه علم و صنعت ایران

abdyhm@gmail.com

چکیده. پس از شیوع گسترده ویروس کرونا در سطح جهان دوران نوینی در عرصه حیات اجتماعی آغاز شده است که زندگی بشر، آموزش و پرورش و رسالتش را تحت تأثیر قرار داده است. این بیماری برای ادامه روند آموزشی دانش‌آموزان ، آموزش و پرورش را ملزم به استفاده از فن‌آوری‌های نوین آموزشی کرده است، همچنین این فن‌آوری‌ها باعث تحولات و تغییراتی در شایستگی مورد نیاز و متناسب با دنیای مدرن امروز در دانش‌آموزان و معلمان گشته است. فن‌آوری‌های نوین آموزشی تاثیر قابل توجهی در امر یادگیری دارند که باعث تغییر نقش فراگیران و معلمان شده است. دانش‌آموزان امروزی را نمی‌توان با شیوه‌های قدیمی‌تدریس در کلاس درس نشاند و مفاهیم ریاضی را به آنها آموزش داد، تجربه و تحقیقات ثابت کرده است که یادگیری در این روش مؤثر نبوده و قابل اعتماد نیست. امروزه می‌توان با استفاده از فن‌آوری‌های نوین آموزشی و کمک گرفتن از مواد جدید آموزشی و ICT درس ریاضی را که به علت انتزاعی بودن در تمام پایه‌ها و مدارج تحصیلی همواره با اضطراب همراه بوده است، به‌صورت ملموس در آورد تا فهم و یادگیری آن برای دانش‌آموزان لذت‌بخش گردد. این مقاله به بررسی روش‌های نوین آموزشی با استفاده از تکنولوژی (با رویکرد ICT) در ریاضیات پرداخته است تا با استفاده از آنها در دوران پساکرونا امر یادگیری ریاضیات توسط دانش‌آموزان در مدارس تسهیل گردد.

2020 Mathematics Subject Classification. 97U50, 97U10

واژگان کلیدی. آموزش ریاضی، فن‌آوری‌های نوین آموزشی، فن‌آوری اطلاعات و ارتباطات، دوران پساکرونا.

تاریخ: دریافت ۱۴۰۱/۷/۱۵ بازنگری ۱۴۰۱/۱۱/۲۲ پذیرش ۱۴۰۱/۱۲/۱۹ انتشار برخط ۱۴۰۲/۱/۱۴

نحوه ارجاع به این مقاله: س.م. عابدینه، بررسی تاثیر، موانع و لزوم استفاده از فن‌آوری‌های نوین آموزشی در آموزش ریاضیات مدرسه‌ای در دوران پساکرونا، به سوی علوم ریاضی، ۳ (۱۴۰۲)، شماره ۱، ۲۱–۹.

۱. مقدمه

خلق یک نظام آموزشی که قابلیت تربیت افراد بـرای زیسـتن در جهـانی متغیـر را داشـته باشـد از اولویت های جامعه مدرن است. شیوع گسترده ویروس کرونا از جمله یکی از عامل های مهم برای ایجاد تغییر در جهان شد، بنابراین جای تعجب نیست که بسیاری از نظام های آموزشی قصد دارند فن‌آوری های نوین آموزشی را در فرآیند تـدریس و یـادگیری بـه کارگیرنـد تـا یـک نظـام آموزشی پیشرفته و به تبع آن ملتی پیشرفته تربیت نمایند. بر اساس یافته‌های روان شناسی یادگیری، دانش‌آموزان از طریق دیدن و به کارگیری وسایل مختلف، مطالب درسی را بهتر و راحت‌تر می‌آموزند زیرا تکنولوژی و وسایل کمک آموزشی به سبب فعال کردن حواس مختلف دانش‌آموزان، امر آموزش را واقعی‌تر، عملی‌تر و دلپذیرتر می‌سازد [۴]. امروزه با توجه به تنگناهای موجود در امر تأمین نیروی انسانی مورد نیاز آموزش و پرورش استفاده از وسایل آموزشی جدید به عنوان یک روش دستیابی به آرمان تامین فرصت‌های برابر آموزشی مورد توجه قرار گرفته است و دلایل استفاده از وسایل آموزشی یا تکنولوژی‌های آموزشی را تحت عناوینی مانند: معضلات و مشکلات آموزشی، نقش حواس در یادگیری، نقش مواد و وسایل در تدریس و یادگیری، ذکر کرده‌اند. با مطالعه سابقه توسعه کشورهای درحال توسعه، خصوصا کشورهای شرق آسیا ملاحظه می‌شود کـه آنهـا در مسـیر توسعه خود، برای تسریع در حل مشکلات بخش صنعت و آموزش، بنیان تکنولوژی کشور خود را از طریق انتقـال آن از سـایر کشـورهای توسعه یافته تقویت کردند و سپس با ایجاد زیربنای اقتصادی مناسب درصدد تقویت مراکز دانشگاهی و پژوهش خود برآمدند. نتایج تحقیقات نشان می‌دهد کشورهایی که از تکنولوژی جدید آموزشی به‌طور معقول و مطلوب بهره گرفته‌اند بسیاری از مشکلات آموزشی خود را از بین برده و یا کاهش داده‌اند [۶]. برنامه‌های فن‌آوری اطلاعات و ارتباطات در آموزش و پرورش باید کیفت‌بخش نظام آموزشی باشد و استفاده از قابلیت‌های نوین اطلاع رسانی می‌تواند گام موثرتری در راستای برنامه اصلاحات آموزش و پرورش به‌شمار آید. علی‌رغم ورود فن‌آوری اطلاعات و ارتباطات و وسایل کمک آموزشی به نظام آموزشی و برگزاری کارگاه‌های آموزشی و دوره‌های ضمن خدمت برای کارکنان و معلمان آموزش و پرورش، این پرسش مطرح می‌شود که چرا استفاده از فن‌آوری‌های نوین آموزشی در فرایند تدریس و یادگیری به کندی پیش می‌رود و یا دارای وضع مناسبی نیست؟ شواهد نشان می‌دهد که ناکامی‌در برگزاری این دوره‌ها و کارگاه‌های آموزشی ضمن خدمت معلمان نسبت به توفیق در آنها بیشتر بوده و با توجه به وضعیت علمی‌دانش‌آموزان، در سطح سازمانی و ملی، کارآیی و اثر بخشی محسوسی مشاهده نمی‌شود. بررسی‌ها نشان می‌دهد که عوامل زیادی در عدم کاربرد تکنولوژی و وسایل کمک آموزشی توسط دبیران دخیل هستند. از جمله‌این عوامل عبارت است از : عدم اطلاع معلمان از مفهوم تکنولوژی، تراکم دانش‌آموزان در کلاس، عدم امکانات فیزیکی و تجهیزات کافی در مدارس، عدم تطبیق محتوا و حجم کتاب ها با ساعات کلاس درسی در هفته، نداشتن شناخت کافی از انواع رسانه‌ها، استفاده از روش سنتی به علت عادت و آسان بودن توسط معلمان، عدم آموزش‌های عملی کافی در دانشگاه‌ها و مراکز تربیت معلم و آموزش ضمن خدمت و به تبع آن نداشتن مهارت به کارگیری رسانه‌ها در حین تدریس توسط معلمان، مسائل و

مشکلات مالی، حجم زیاد کتاب درسی، فقدان آزمایشگاه و کارگاه، عدم تناسب وسایل با تعداد دانش‌آموزان و فقدان یک سیستم ارزش یابی از نحوه استفاده معلمان از فن‌آوری‌های نوین آموزشی. نتایج تحقیقات مختلف حاکی از آن است که عوامل ذکر شده جزء عوامل بازدارنده استفاده از فن‌آوری‌های نوین آموزشی و وسایل کمک آموزشی در فرایند تدریس و یادگیری هستند. همچنین نتایج تحقیق دیگری حاکی از آن است که بین کاربرد رسانه‌های آموزشی در تدریس و علاقه دانش‌آموزان و همچنین کاربرد رسانه‌های آموزشی در تدریس، با یادگیری عمیق و ماندگار، رابطه وجود دارد [۲]. نتایج تحقیق ایگباریا و همکاران حاکی از آن است که تجربه کار با رایانه، پشتیبانی فنی، ادراک از آسانی، استفاده و مفید بودن، پاداش‌های درونی و حمایت مدیران ارشد سازمان از جمله عواملی است که بر موفقیت فن‌آوری اطلاعات در سازمان‌های کوچک تأثیر دارد [۱۳]. تیامیو در کشور نیجریه تحقیقی را درباره مسائل مرتبط با فن‌آوری اطلاعات انجام داده است. وی در تحقیق خود به این نتیجه رسیده که عواملی چون هزینه‌ها و خرابی مداوم تجهیزات و امکانات به عنوان موانع کلیدی کاربرد این فن‌آوری به‌شمار می‌روند [۲۲]. همچنین در تحقیق دیگری کمبود منابع انسانی ماهر، برنامه ریزی ضعیف، ارتباط ضعیف با نیازهای سازمان، محدودیت‌های اقتصادی و کاربرد نادرست فن‌آوری اطلاعات به عنوان موانع اساسی کاربرد فن‌آوری اطلاعات در سازمان‌ها ذکر شده است [۱۴]. پینسوپاپ و والکر در تحقیق خود که درباره عوامل مؤثر بر پذیرش و کاربرد فن‌آوری اطلاعات و ارتباطات در سازمان های کشور استرالیا انجام داده‌اند، به‌این نتیجه رسیدند که دو عامل در میان کاربران از موانع عمده کاربرد فن‌آوری اطلاعات هستند که عبارت است از: احساس منفی کارکنان به کاربرد فن‌آوری اطلاعات در سازمان و احساس عجز و ناکامی در کاربرد این فن‌آوری‌ها [۱۷].

۲. عوامل موثر در حرکت به سوی برنامه درسی تلفیق شده با ICT[۱]

تغییرات بسیاری در اثر ورود ICT در سطح جوامع رخ داده است. برخی از عوامل حرکت آموزش و پرورش به سوی برنامه درسی تلفیق شده با ICT عبارتند از:

(۱) پیشرفت سریع علوم و فن‌آوری،
(۲) افزایش گرایش‌های تخصصی در هر رشته (مانند جبر، آنالیز، هندسه و ... در رشته ریاضی)،
(۳) فاصله بیش از حد نیاز های جامعه و آنچه را که نظام آموزشی کنونی ارائه می‌دهد،
(۴) ناتوانی نظام آموزشی فعلی در پاسخگویی به تنوع مورد نیاز جامعه
(۵) افزایش سطح مهارت و دانش مورد نیاز برای انجام فعالیت‌ها در یک زمینه تخصصی،
(۶) استفاده از امکانات این فن‌آوری در جهت آموزش اکتشافی و بازتابی،
(۷) تاثیر ریاضی در پیشرفت علم کامپیوتر،
(۸) تاثیر کامپیوتر در پیشرفت علم ریاضی، نقش فن‌آوری در آموزش ریاضی.

[۱] Information and Communications Technology

امروزه هیچکس با محاسبات کاغذ و مدادی، امرار معاش نمی‌کند. ماشین حساب‌ها و کامپیوترها، جایگزین محاسبه‌های خرید و فروش در کار و صنعت شده‌اند. به‌علاوه این ابزارهای الکترونیکی قادر به انجام محاسبه در حجم زیاد و سریع و نمایش اطلاعات به راه‌های مختلف و غیره هستند. آنها مهارت‌های مورد تاکید در درس ریاضی را تغییر داده‌اند. کامپیوتر وسیله سریعی است که می‌تواند محاسبات طاقت فرسا را به راحتی انجام دهد و اثر بی نظیر آن بر ریاضیات، مشابه اثر ماشین چاپ بر خواندن و نوشتن است. ماشین چاپ مهارت‌های خاصی را منسوخ کرد (مثل خطاطی)، همچنین کتاب‌ها را در دسترس همگان قرار داد و نیاز افراد را به‌طور وسیعی به خواندن و نوشتن افزایش داد. شورای ملی معلمان ریاضی در استانداردهای برنامه درسی نیز بر این مهم تاکید دارند که: بعضی از مباحث ریاضی مهم تر می‌شوند زیرا تکنولوژی به آنها نیاز دارد – بعضی از مباحث ریاضی کم اهمیت‌تر می‌شوند چون تکنولوژی جایگزین آن می‌شود – بعضی از مباحث ریاضی ممکن می‌شوند چون تکنولوژی آنها را میسر می‌سازد. همانطور که اشاره شد، استفاده مناسب از ICT می‌تواند آموزش و یادگیری ریاضی را تقویت کند. علاوه بر این، وسایل کمک آموزشی اعم از ساده و پیچیده، به عنوان ابزاری برای تسهیل امر تدریس و یادگیری در نظام آموزشی به کار می‌روند این وسایل از حیث اینکه، تئوری و عمل را باهم ترکیب کرده و باعث ماندگاری یادگیری و تنوع بخشی در کلاس درس می‌شوند، حائز اهمیت اند. باتوجه به پیشرفت‌های علمی و تکنولوژیکی در عصر حاضر، وسایل کمک آموزشی به عنوان یک رابط توانسته‌اند نقش خود را به خوبی ایفا کنند. بدیهی است که اگر معلمان مهارت‌های لازم را برای کاربرد این وسایل داشته باشند، اثر بخشی آنها بیشتر خواهد بود پس می‌توان گفت از لوازم پیشرفت در عصر فن‌آوری، تربیت نیروی انسانی است که بر عهده نظام آموزش و پرورش یک کشور می باشد. ایران اسلامی نیز به عنوان یک کشور در حال توسعه باید ابتدا یک ذخیره قدرتمند نیروی انسانی داشته باشد تا بتواند این سیر صعودی را طی کرده و به کشوری پیشرفته مبدل گردد. این امر ممکن نخواهد شد مگر در پرتو نظام آموزشی پیشرفته که گام به گام خود را با دانش نوین مجهز کند. در عصر کنونی دیگر نمی‌توان مدرسه و کلاس را به شکل سنتی که در زمان گذشته رایج بود هدایت نمود. امروزه دانش‌آموزان، معلمان، امکانات، فضا های آموزشی و سایر تجهیزات آموزشی تغییر نموده‌اند و به موازات آنها نوع آموزش‌ها نیز باید تغییر یابد و به فن‌آوری روز مجهز شود. دیگر معلم در کلاس نقش انتقال دهنده اطلاعات را ندارد، بلکه باید به سویی پیش برود که معلم فقط هدایتگر و راهنمای مسیر آموزش محسوب شود. از این رو می‌توان گفت تعلیم و تربیت سنتی بر حافظه تاکید دارد، در حالی که تعلیم و تربیت در عصر فن‌آوری اطلاعات و ارتباطات، از دانش‌آموزان انتظار دارد چه باید بدانند و در کجا دنبال آن باشند و چگونه اطلاعات را ذخیره نمایند. در کل اگرچه ابعاد مختلف تاثیر تکنولوژی بطور مکرر مورد تاکید قرار گرفته است، ولی معلم باید نقش هادی و حامی در استفاده مناسب از تکنولوژی توسط دانش‌آموزان را داشته باشد. به‌کارگیری تکنولوژی در کلاس ریاضی برای انجام ریاضیات نباید منجر به سردرگم شدن و محدود شدن به ویژگی‌های فنی شود. دانش‌آموز باید ابزار را به عنوان تسهیل کننده خلق اشیای ریاضی، امکان دهنده فعالیت‌های ریاضی روی آن اشیاء و فراهم کننده نمود واضحی از پیامد آن اعمال مورد

استفاده قرار دهد [۷]. می‌دانیم یکی از مهم‌ترین وسایل و ابزار در آموزش نوین ریاضی کامپیوتر است. از مهم ترین مزایای مطرح شده در استفاده از کامپیوتر در آموزش ریاضی، بازنمایی چندگانه و باز خورد ارائه شده توسط کامپیوتر می‌باشد.

۳. بازنمایی‌های چند گانه و تجسم با استفاده از کامپیوتر

نقش تکنولوژی در آموزش ریاضی و بازنمایی‌های چندگانه و تجسم ایجاد شده به کمک کامپیوتر مورد توجه محققان مختلفی قرار گرفته است [۲۳]. موضوعات ریاضیاتی تعاملی، به صورت ابزارهای شناختی، می‌تواند تکالیف را از طریق بر عهده گرفتن برخی از عناصر کم اهمیت‌تر تکلیف کاهش دهد و در نتیجه تفکر مرتبه بالاتر و امتحان فرضیه‌ها را تقویت نماید و همچنین درجه بالایی از دقت شناختی و ریاضیاتی را که هنگام ایجاد بازنمایی‌ها توسط تکنولوژی ایجاد می‌شود، به‌وجود آورد. بازنمایی‌ها و ارائه‌های چندگانه موضوعات ریاضی، می‌تواند پیوند و اتصالات میان مفاهیم مختلف ریاضی را محکم‌تر نموده و یادگیری عمیق‌تری در دانش‌آموزان ایجاد نماید.

سرپیل و همکاران تجسم را به صورت عملی که در آن فرد اتصال و پیوند دو سویه میان یک ساختار درونی و برخی عوامل بیرونی برقرار می سازد، تعریف می‌کنند. یک عمل تجسم شامل هر ساخت ذهنی از شئ یا فرایندهایی است که فرد با شئ یا وقایع درک شده به‌وسیله یک منبع بیرونی، مرتبط می‌سازد. بر همین سیاق، تجسم می‌تواند شامل ساخت بر پایه برخی واسطه‌های بیرونی، از قبیل نوشته‌ای از اشیاء یا وقایع، باشد. همین‌طور عمل تجسم، ترجمه و انتقال از بیرون به ذهن است. تجسم، روش چاره ساز و منبع نیرومندی برای دانش‌آموزان در انجام ریاضیات است. رویکرد استفاده از تجسم دانش‌آموزان را آماده می‌کند تا مباحث ریاضیات را که مجموعه‌ای از ساختارها و مفاهیم مجرد از دیدگاه‌های مختلف می‌باشد، مورد بررسی قرار دهند [۲۰].

تجسم، فرایند نمایش نموداری یا تصویری حقایق، دستورالعمل ها، فرایندها، داده‌ها، ساختارهای سازمانی، مکان‌ها، تسلسل‌ها، تعمیم‌ها، نظریه‌ها، احساسات و نگرش‌ها است. دامنه روش‌های تجسم از فراهم نمودن تاکید نموداری در متن از طریق پررنگ کردن تا ایجاد نمودار کامل و نمایش‌های غیر گفتاری، در نوسان است [۱۱].

به عنوان مثال، می‌توان گفت تجسم‌های علمی‌در کلاس‌های درس، ارائه اطلاعات به روشی جدید برای تسریع ادراک دانش‌آموزان می‌باشد. این تجسم‌ها ممکن است شامل شبیه سازی یک قانون علمی، گروه بندی جدیدی از اطلاعات که عناصر تبیین علمی را روشن‌تر می‌سازد یا روش بدیعی از سازماندهی داده‌ها (به عنوان مثال استفاده از رنگ‌ها به عنوان شاخص حرارت) باشد. تجسم، باعث می‌شود حتی با نگاهی کوتاه به وقایع مختلف، برداشتی از آنها داشته باشیم[۲۱].

مفهوم یک تجسم ممکن است از مشاهده مربوطه متفاوت باشد. به عنوان مثال هنگامی که معلم دایره‌ای را با ترسیم ناکامل آن روی تابلو نشان می‌دهد، تصویر روی تابلو دایره نیست چراکه دایره بطور کامل ترسیم نشده

است. البته برای فردی که می‌داند دایره مجموعه‌ای از نقاط در صفحه است که از نقطه مرکزی به یک فاصله هستند، تصویر روی تابلو برای درک اینکه معلم درباره ی ''دایره ی ریاضیاتی'' صحبت می‌کند، کافی است. با این وجود برای دانش آموزی که هرگز قبلا از مفهوم دایره اطلاعی نداشته است، شکل روی تابلو ممکن است معناهای دیگری داشته باشد. بنابراین، تصورات دیداری به‌طور حتم می‌تواند برای قانع کردن خود فرد از درستی یک عبارت در ریاضیات کافی باشد، مشروط به آنکه فرد دانش کافی از آنچه به او نشان می‌دهند را داشته باشد [۸]. مزایایی که برای استفاده از تجسم و بازنمای چندگانه در آموزش ریاضی مطرح شده است به کمک کامپیوتر بهتر تحقق خواهد یافت. در برخی موارد و موضوعات ریاضی حتی می‌توان گفت که بدون استفاده از کامپیوتر و نرم افزارهای آموزشی، تجسم شهود غیر ممکن است [۱۸]. آن‌چه ذکر شد، اهمیت تجسم و تصور ذهنی ایجاد شده به کمک کامپیوتر را مورد تاکید قرار می‌دهد.

۴. بازخورد ارائه شده توسط کامپیوتر

بازخورد ایجاد شده توسط کامپیوتر و تعامل و دست‌ورزی دانش‌آموزان با موضوعات ریاضی در کامپیوتر، تاثیر زیادی در یادگیری دانش‌آموزان دارد. بازخورد، عکس العملی به رفتار یادگیری دانش آموز است و شامل عکس‌العمل شفاهی و غیر شفاهی، از قبیل تذکر دادن، جلب توجه کردن و پیشنهاد دادن مراحل بعدی است. کامپیوتر برای گسترش توانایی ذهن انسان مورد استفاده قرار می‌گیرد. کامپیوترها انعطاف‌پذیر بوده و متناسب با سرعت و توان یادگیرنده به او بازخورد می‌دهند، همچنین قادر به اجرای روش‌های تدریس ماهرانه‌ای هستند که توسط ذهن انسانی ارائه شده است. به عنوان مثال، از طریق بازخورد به خطاهای یادگیرنده موجب یادگیری او می‌شوند. نرم افزار کامپیوتری ایده‌های آموزشگران مختلف را برای یادگیرندگان گوناگون ارائه می‌کند. کامپیوترها می‌توانند سایر ابزار کمک آموزشی را نیز گسترش دهند [۱۲].

می‌توان گفت بازخورد ارائه شده به دانش آموز به منظور آگاهی از خطاهای وی در حل مسئله، موجب می‌شود دانش نادرستی که دانش آموز در ذهن خود دارد تصحیح شود. دانش‌آموزان اطلاعات درست و یا نادرستی را که برای حل مسئله به کار می برند به صورت دانش در ذهن خود ذخیره دارند [۱۹]. به‌نظر می‌رسد پالایش ذهن دانش آموز از دانش‌ها و باورهای نادرست از طریق بازخوردهای به موقع و صحیح، روش مناسبی برای دانش‌آموزان موفق و خلاق در آموزش ریاضی است. نوع بازخورد و تعامل دانش‌آموزان نیز اهمیت دارد. اگرچه دریافت بازخورد از سوی همسالان و یا معلم نیز می‌تواند موثر باشد، ولی ویژگی تعامل محیط های یادگیری براساس کامپیوتر، خود آگاهی دانش‌آموزان درباره بدفهمی‌ها، و خلأ در دانش میان یادگیرندگان همسال و نیز تصحیح دانش قبلی آنها را تسهیل می‌نماید [۹].

حال می‌خواهیم سه جنبه از آموزش و یادگیری ریاضی که می‌تواند با استفاده از ICT توسعه یابد را معرفی کنیم. (لازم به ذکر است که کامپیوتر یکی از وسایل پر کاربرد در ICT است) و بعد به شرح مختصری از هر کدام می‌پردازیم:

(۱) پداگوژی،

(۲) ریاضیات،
(۳) سازماندهی.

۱.۴. **پداگوژی.** تصمیم گیری درباره اینکه چه وقت و چگونه باید از ICT برای کمك به تدریس مطالب ریاضی، مهارت‌ها یا مفاهیم استفاده شود یا نشود، باید بر پایه اثر بخشی هدف‌های درس باشد. استفاده از ICT باید به معلمان و دانش‌آموزان اجازه دهد تا بعضی از کارها را، که بدون به‌کار بردن آن مشکل هستند، را انجام دهند و یا به آنها اجازه دهد تا برخی چیزها را به‌طور مؤثر و کارآمد بیاموزند. در سال ۱۹۹۵ شورای ملی برای تکنولوژی آموزشی، اثرِ ریاضیات و IT را منتشر کرد که در آن شش راه اصلی که ICT می‌تواند فرصت‌هایی را برای یادگیری ریاضی دانش‌آموزان ایجاد کند، آورده است. این شش موقعیت اصلی عبارتند از: یادگیری از طریق بازخورد، مشاهده الگوها، دیدن روابط، کار با تصاویر پویا، توصیف داده‌ها و تدریس به کامپیوتر.

۲.۴. **ریاضیات.** دانش‌آموزان می‌توانند از ICT به عنوان وسیله‌ای برای انجام دادنِ محاسباتشان، ترسیم نمودارهایشان و کمك به حل مسئله هایشان استفاده کنند. بدیهی ترین مثالِ کاربرد ICT به‌این صورت است که دانش‌آموزان از ماشین حساب برای انجام محاسبات عددی پیچیده استفاده می‌کنند. با این وجود ممکن است که دانش‌آموزان از نرم افزار صفحه گسترده[۲]، سیستم جبری کامپیوتری یا ماشین حساب گرافیکی برای حل مسئله به‌وسیله آزمایش و تصحیح یا تکرار، استفاده کنند. احتمال دارد آنها برای حل یك معادله گرافیکی، یك ماشین حساب گرافیکی یا رسام گرافیکی را بیشتر از ماشین حساب جبری به‌کاربرند. دانش‌آموزان می‌توانند از حالت‌های آماری ماشین حساب‌های گرافیکی برای انجامِ تحلیل‌های آماری داده‌هایی که جمع‌آوری کرده‌اند، استفاده نمایند. ساختن یك شکل با استفاده از یك بسته هندسی می‌تواند به دانش‌آموزان در فهمیدن، حل‌کردن و سپس اثبات مسائل هندسی کمك کند. زمانی که دانش‌آموزان از ICT به عنوان وسیله‌ای برای یافتن چیزها، حل مسائل یا کمك به درك آنچه که اتفاق افتاده، استفاده می‌کنند، مهارتشان در به‌کارگیری ریاضی توسعه می‌یابد. به‌وضوح ICT می‌تواند به عنوان وسیله‌ای کارآمد و نیرومند باشد، اما اگر دانش‌آموزان بخواهند از امکانات به نحو سازنده و کارآمدتری استفاده کنند، نیاز به آموزشِ مهارت‌های فنی دارند. به‌طور مثال، برای استفاده بهینه از ماشین حساب، دانش‌آموزان باید مواردی را یاد بگیرند که عبارتند از: چگونگی انتخاب شکل‌های مناسب برای محاسبات زمینه، چگونگی واردکردن اعداد و تفسیر نمایش ارائه شده وقتی که اعداد نشان دهنده پول، اندازه‌های متری، واحد زمان یا کسرها هستند، ترتیبِ انجام عملیات محاسباتی در زمانی که چند عملگر داریم و چگونگی استفاده از امکاناتی مانند حافظه، براکت، کلید جذر و مکعب، کلید تغییر علامت، کلید کسر و غیره. به همین ترتیب اگر دانش‌آموزان برای حل مسائل ریاضی از نرم‌افزار صفحه گسترده، بسته رسم شکل، سیستم جبری کامپیوتری، بسته هندسی پویا یا ماشین حساب گرافیکی به طور مؤثری کمك می‌گیرند؛ لازم است که دانش‌آموزان با امکانات و تسهیلاتِ این نرم‌افزارها آشنا شوند.

---
[۲] Spreadsheet

بنابراین علم پایه‌ای ریاضی می‌توانند به دانش‌آموزان کمك کند تا مهارت های ICT آنها با ایجاد زمینه‌های جدید در به‌کارگیری این مهارت‌ها، توسعه یابد. دانش‌آموزان نیاز دارند تا یاد بگیرند ابزار ICT مناسب را برای کمك به خودشان در حل مسائل ریاضی انتخاب کنند. همچنین لازم است آنها بیاموزند، چه وقت استفاده از ICT مناسب نیست. برای مثال، این مهم است که آنها یادبگیرند از ICT برای انجام کارهای روتین که به روش ذهنی و یا با کاغذ و قلم، با کارآیی بیشتری انجام می‌شود، استفاده نکنند. مثال‌هایی از این قبیل که بهتر است از ICT در آموزش آنها استفاده نشود، عبارتند از: استفاده از ماشین حساب یا صفحه گسترده برای محاسبات سرراست، استفاده از ماشین حساب یا صفحه گسترده برای یك سری از محاسبات، که مهارت‌های ذهنی و نوشتاری مربوط به آنها در جای دیگری رشد نیافته باشند و استفاده از ماشین حساب گرافیکی برای رسم یك شکل، زمانی که طرح ساده‌ای دارد.

۳.۴. سازماندهی. ICT وسیله‌ای را فراهم می‌کند که دانش‌آموزان می‌توانند به وسیله آن چگونگی سازمان‌دهی و ارائه کارهایشان را انتخاب کنند. دانش‌آموزان ممکن است یك برنامه واژه پرداز را که از آن برای تهیه یك خبرنامه تحقیقی ریاضی استفاده کرده‌اند انتخاب نمایند. آنها ممکن است تصمیم بگیرند از صفحه گسترده برای سازمان‌دهی نتایج تحقیقات آماری استفاده کنند، و ممکن است نمایش گرافیکی داده‌ها، که مناسب‌ترین است را انتخاب کنند. در واقع، این جنبه از ICT به دانش‌آموزان این فرصت را می‌دهد که برای نمایش مسائل و راه حل‌های ریاضی آنها، از روش‌های مختلف (بازنمایی یك مسله در صفحه گسترده به‌صورت داده‌ها، بازنمایی تصویری در رسم شکل، بازنمایی جبری و...) استفاده کنند.

به‌طور مثال، امکان دارد برخی از دانش‌آموزان برای حل معادله درجه دوم از جدول مقادیرِ صفحه گسترده یا ماشین حساب گرافیکی استفاده کنند. دانش‌آموزان دیگر ممکن است راه‌حل‌های گرافیکی را از طریق رسامِ شکل انتخاب نمایند و عده‌ای دیگر از دانش‌آموزان احتمالاً راه حل‌های جبری را انتخاب می‌کنند. ICT می‌تواند از طریق مقایسه و بحث پیرامون روشهای مختلفی که دانش‌آموزان برای حل مسئله به کار برده‌اند، بحث در ریاضی را تقویت کند. این موضوع به توسعهٔ مهارت‌های ارتباطی- نوشتاری آنها کمك خواهد کرد. پس واضح است که ICT می‌تواند به صورت مفیدی در بیشتر مباحث ریاضی استفاده شود. اما در مواردی، ریاضی به‌طور ویژه‌ای از فرصت‌هایی که ICT فراهم می‌آورد، استفاده می‌کند که عبارتند از: ریاضیات کاربردی و حل مسئله – ارزش مکانی، مرتب‌سازی و رند کردن – معادله‌ها، فرمول‌ها و تساوی‌ها – دنباله‌ها، توابع و نمودارها ، استدلال هندسی: خط، زاویه و اشکال – تبدیل‌ها – مختصات – ساختار و مکان‌های هندسی – جمع‌آوری و ثبت داده‌ها، حال سوال در اینجاست که از کدام ICT باید استفاده کرد؟

۵. بررسی فن‌آوری‌های نوین آموزشی با تکیه بر رایانه و تکنولوژی

امروزه نیاز به روش‌های نوین تدریس با توجه به پیشرفت روز افزون علم و فن‌آوری حس می‌شود و باید به دنبال روش‌های تدریسی بود که بتوان دانش‌آموزان را از حفظ طوطی وار به سوی یادگیری سوق داد. استفاده از

روش‌های تدریس فعال از کارهایی است که کمک شایانی به دانش‌آموزان و معلمان می‌کند. روش‌های تدریس فعال دارای تعریف شناخته شده‌ای است که در آن از روش‌های تدریس دانش‌آموز محور استفاده می‌شود است و مسئولیت یادگیری بر عهده خود دانش‌آموزان قرار داده میگیرد. در روش تدریس فعال، معلم در نقش یک تسهیل‌گر و هدایت‌کننده ظاهر می‌شود که مسیر آموزش و یادگیری را برای دانش‌آموزان هموار می‌کند. در این حالت، به جای ارائه یک طرفهٔ اطلاعات، از راه‌هایی استفاده می‌شود که دانش‌آموزان را به مشارکت و همکاریِ بیشتر در فرآیند یادگیری ترغیب می‌کند. در این روش علاوه بر فراهم کردن شرایط گوناگون، باید یادگیری را از طریق ایجاد انگیزه و تحریک دانش‌آموزان در آن‌ها ایجاد نمود و تمام پیام‌های تربیتی و آموزشی را متناسب با کانون رغبت وعلاقه کودکان منتقل نمود، چرا که اصولا هیچ تغییری در رفتار یادگیرنده رخ نمی‌دهد مگر اینکه از میل درونی و رغبت طبیعی آنان سرچشمه گرفته باشد[۵] .

از سوی دیگر امروزه توصیه صاحبنظران مسائل تربیتی و آموزشی آن است که رهیافت‌ها و راهبردهای طراحی برنامه‌های درسی طوری صورت گیرد که بتواند دانش آموز و دانشجو را تولید کننده و سازنده علم بار آورد و نه دریافت کننده صرف آن. در هین راستا در آغاز قرن حاضر شعار "کمتر بیشتر است" مطرح شده، به‌این معنا که " دانش‌ها را کمتر منتقل کن و بیشتر روش مفهوم سازی و تولید دانش را افزایش بده". چرا که به منظور تبدیل دانایی به توانایی، لازم است دانش آموز نقش فعالی را در فرایند یادگیری ایفا نماید. بدین معنی که فرا گیرنده نبایستی برای دریافت اطلاعات به کتاب درسی و سخنرانی معلم اکتفا نماید چرا که از این طریق کمتر می‌تواند آموخته‌های خود را در موقعیت‌های جدید و واقعی به کار گیرد. عاملی که انقلاب بزرگی در تدریس و یادگیری به پا کرده است، استفاده از رایانه در امر تدریس و یادگیری می‌باشد. تاریخچه کاربرد رایانه در آموزش به ۴۰ سال قبل بر می گردد و معمولا به آن آموزش کمک رایانه و یا آموزش رایانه محور اطلاق می‌شود [۱].

در این زمینه باید به تلاش‌های برخی کشورها اشاره نمود که در زمینه پیشرفت در به‌کارگیری رایانه در آموزش چه در مدرسه و چه در خانه تلاش‌های وافری نمودند. آن ها ابتدا منابع و وسایل هرچه بیشتر در اختیار دانش‌آموزان در مدرسه قرار داده و در درجه دوم، مدارس کمک کردند تا این وسایل بطور مساوی در اختیار دانش‌آموزان ضعیف هم قرار بگیرد. برای تعدادی از دانش‌آموزان مدارس دولتی، کامپیوترها بطور مشخصی افزایش یافت و مدارس پیشرفت شایانی در تدارک دسترسی به اینترنت پیدا کردند. در سال ۱۹۹۴ در آمریکا ۳٪ کلاس های آموزشی یک ارتباط برخط داشتند و این ارتباط در سال ۲۰۰۳ به ۹۳٪ افزایش یافت. در واقع با استفاده از رایانه، معلم می‌تواند مطالب خود را در قالب نرم افزارهای چند رسانه‌ای که حاوی صوت، تصویر و گرافیک هستند، برای آموزش به دانش‌آموزان به نمایش بگذارند و با استفاده از رایانه و نرم‌افزارهای چندرسانه‌ای حس بینایی و شنوایی را در یادگیری درگیر کنند. یافته‌های تجربی در حوضه روان شناسی حکایت از آن دارد که حدود ۷۵٪ یادگیری انسان از طریق کاربرد حس بینایی و ۱۳٪ از طریق حس شنوایی صورت

می‌پذیرد. لذا می‌توان، استفاده از رایانه و تکنولوژی‌ها را یکی از بهترین روش‌ها برای تدریس و یادگیری دانش‌آموزان دانست [۱۶].

در تحقیقی که در سال ۱۹۸۷ پیرامون نقطه نظرات حرفه‌ای‌های آموزش و پرورش استثنایی در مورد استفاده از تکنولوژی در برنامه‌های آموزشی دانش‌آموزان استثنایی در کالیفرنیا آمریکا انجام شد، معلمان و مدیران به‌طور مسلم در مورد اثرات مثبت رایانه و سایر تکنولوژی‌ها با هم توافق داشتند و فواید تکنولوژی که بوسیله ی حداقل ۴۰٪ معلمان و مدیران شناسایی شده بودند، در این موارد ذکر شده است: ایجاد بازخورد فوری و بدون واسطه، امکان پیشرفت گام به گام دانش‌آموزان، امکان فردی شدن آموزش برای هر دانش آموز توسط رایانه، بهبود خودپنداره‌ی دانش‌آموزان افزایش اشتیاق نسبت به مدرسه، افزایش زمان یادگیری دانش آموز برای انجام تکلیف، بهبود عملکرد تحصیلی، افزایش سرعت یادگیری دانش‌آموزان و فراهم شدن امکان یادگیری مطالبی که دانش‌آموز در جای دیگر هرگز با آن مواجه نشده بود. سه مورد اول، رایانه را به‌عنوان یک وسیله آموزشی مورد توجه قرار داده بودند. دوتای بعدی بهبود خودپنداره و افزایش اشتیاق نسبت به مدرسه را جزو فواید مؤثر محسوب کرده بودند و چهار مورد آخر مربوط به اثرات تکنولوژی روی عملکرد مدرسه بودند [۱۵].

با توجه به تحقیقات متعددی که در مورد استفاده از رایانه‌ها و نرم افزارهای چند رسانه‌ای در امر تدریس انجام یافته است می‌توان گفت نرم‌افزارهای آموزشی وقتی در کنار روش سنتی تدریس و در کلاس درس مورد استفاده قرار می گیرند نتایج یادگیری را بهبود می بخشند. به‌علاوه در زمینه حل مشکل یادگیری و حل مسائل و تفاوت‌های فردی، به دلیل ارائه ی مثال های متعدد، تنظیم سرعت آموزش و یادگیری و تکرار مطالب، بازدهی بسیار خوبی خواهند داشت. یکی دیگر از مزایای این نرم‌افزارها، افزایش تعامل بین دانش‌آموزان و همچنین بین مربی و یادگیرنده است. این همان هدفی است که سال‌های اخیر به‌شدت مورد توجه دست‌اندرکاران آموزش و پرورش با عناوینی چون روش‌های فعال یادگیری بوده است [۳].

تلاش‌های عصر کنونی در جهت به‌کارگیری روش‌های نوین و فعال تدریس در امر آموزش این مسئله را بازگو می‌کند که امروزه بخش مهمی از هر کلاس به چند رسانه‌ای‌ها تخصیص یافته است. استفاده از چند رسانه‌ای‌ها باعث به چالش کشیده شدن درس ها و موفقیت در کلاس می‌شود. اهمیت این ابزار و روش‌ها تا آنجا است که امروزه توافق عمومی در مورد اینکه همه دانش‌آموزان باید در کار با کامپیوتر مهارت داشته باشند وجود دارد [۱۰].

۶. سخن پایانی

در عصر کنونی و خصوصا پس از شیوع بیماری کرونا و محدودیت‌های ایجاد شده استفاده از فن‌آوری اطلاعات و ارتباطات باید جای خود را در نظام تعلیم و تربیت پیدا نماید و به عنوان یک اصل مهم، در برنامه ریزی آموزشی و برنامه ریزی درسی مدارس گنجاده شود. شیوه تعلیم و تربیت، در مدرسه‌ای که مبتنی بر فن‌آوری اطلاعات است، تغییر می یابد و معلم به عنوان آموش دهنده و دانش‌آموزان به عنوان یادگیرنده‌های صرف نخواهند بود؛ بلکه محتوای آموزشی به‌گونه‌ای طراحی و تدوین می‌شود که هر فرد با توجه به توانمندی‌هایی

که دارد، بتواند از محتوای آموزشی بهره‌مند شود. استفاده از فن‌آوری اطلاعات و ارتباطات (ICT) در آموزش ریاضی باعث می‌شود که یادگیری ریاضیات برای دانش‌آموزان لذت‌بخش‌تر گردد. سرعت متناسب با یادگیری هر دانش آموز و نیز یادگیری سریع نسبت به عدم استفاده از کامپیوتر و پویایی اشکال ریاضی که تجسم راحت تر و بازنمایی‌های چندگانه‌ای از موضوعات ریاضی را امکان پذیر می‌سازد، از مزایای تدریس با استفاده از تکنولوژی از قبیل بازخورد و تعامل دانش‌آموزان با کامپیوتر است. بایستی مزایا و مشکلات استفاده از تکنولوژی را مورد توجه قرار داده و سعی در به حداقل رساندن مشکلات، تاکید و استفاده بیشتر از مزایا و تاثیرات مثبت داشته باشیم. در کل می‌توان چنین برداشت نمود که با پیشرفت علم و اصول آموزش، استفاده از فن‌آوری‌های نوین آموزشی تاثیرات مطلوب‌تری را نسبت به سیستم‌های سنتی در آموزش و پرورش نشان داده و درصد موفقیت بیشتری را به خود اختصاص داده است. ارزش این فن‌آوری‌ها به دلیل عرضه دانش به چندین شیوه است، دانش‌آموزان می‌توانند اصول انتزاعی را با نوشتار یاد بگیرند و کاربرد همان اصول را به‌وسیله پویانمایی یا ویدیو مشاهده کنند. این تنوع فرصتی را برای درک عمیق تر فراهم می‌کند، پس باید تدابیری را اندیشید و به کار برد تا بتوان سطح یادگیری را در مدارس به بالاترین حد خود رساند و این کار عملی نمی‌شود مگر با همکاری تمام ارگان‌ها، سازمان‌های مربوطه و مسئولین، تا امر تدریس و یادگیری در کشور عزیزمان ایران به سوی رشد و پیشرفت هدایت شود.

مراجع

[۱] م. احدیان، *مقدمات تکنولوژی آموزشی*، نشر و تبلیغ بشری، تهران، ۱۳۸۲.

[۲] ع. جعفرنژاد، *بررسی علل عمده به کارگیری وسایل آموزشی و تاثیر آن در جریان یاددهی و یادگیری دانش‌آموزان مقطع متوسطه استان مازندران*، گزارش طرح تحقیقی، سازمان مدیریت و برنامه ریزی، ۱۳۸۲.

[۳] ا.م. خزاعی، *دیدگاهی در نرم‌افزارهای آموزشی*، نشریه وب، **۱۵** (۱۳۸۲)، شماره ۲، ۱ص.

[۴] س. شیخی، س. غلامی هره دشتی، *نقش فن‌آوری اطلاعات و ارتباطات در آموزش*، دو فصلنامه مطالعات آموزشی نما آجا، **۴** (۱۳۹۳) ۵۴–۴۸.

[۵] ع. کریمی، *آموزش مانع خلاقیت*، فصلنامه مدیریت در آموزش و پرورش، **۲** (۱۳۸۳)، شماره ۳، ۶۱–۵۷.

[۶] ق. یوسف پور، *انتقال تکنولوژی در جهان سوم و ایران*، نشر تندیس، ۱۳۷۶.

[7] B. Bos, *Virtual math. objects with pedagogical, mathematical, and cognitive fidelity,* Computers in Human behavior, **25** (2009), 521–528.

[8] K. Brating, *Studies in the Conceptual Development of Mathematical Analysis*, Doctoral Dissertation, Department of Mathematics, Uppsala University, 2009.

[9] N. Ding, *Visualizing the sequential process of knowledge elaboration in computer-supported collaborative problem solving*, Computers Education, **52** (2009) 509-519.

[10] M.B. Eisenberg and D. Johnson, *Learning and teaching information: technology computer skills in context*, ERIC Digest, **2002** (2002), 3–7.

[11] Goliath Group, *Global Feedback in Active Math,* Adaptive Learning Environment for Mathematics and Science Teaching, Accessed 02/05/2009, 2009.

[12] E. Gyöngyösi, *Continuing education for mathematics teachers of secondary education to use computers more effectively and to improve education,* presented at University of Debrecen, Hungary. 2008, 20 pp.

[13] M. Igbaria, N. Zinatelli and A.L.M. Cavaye, *Analysis of information technology success in small firms in New Zealand*, Int. J. Inf. Manag. **18** (1998), no. 2, 103–119.

[14] D. Kunda and L. Brooks *Assessing important factors that support component-based development in developing countries*, Inf. Tech. Dev. **9** (2000), no. 3-4, 123–139.

[15] R.B. Lewise, P.J. Harrison, E.W. Lynch and F. Saba, *Applications of technology in special education: A statewide study,* Learn. Disabil. **5** (1994), no. 2, 69–79.

[16] B. Parsad, J. Jones and B. Greene, *Internet access in U.S. public schools and classrooms: 1994-2003*, Washington DC: Department of Education, National Center for Education Statistics, 2005.

[17] V. Peansupap and D. Walker, *Exploratory factors influencing information and communication technology and adoption within Australian construction organizations: A micro analysis*, Construction Innov. **5** (2005) 135–157.

[18] J.E. Quinlan, *Profiles of Software Utilization by University Mathematics Faculty*, Doctoral dissertation, The Ohio State University, 2007.

[19] A.H. Schoenfeld, *Mathematical problem solving*, School of Education, Department of Mathematics, University of California, Berkeley, California, Academic Press, INC. 1985.

[20] K. Serpil, K.A. Cihan, A. Sabri and I. Ahmet, *The role of visualization approach on student's conceptual learning*, Education Faculty, Atatürk University, Erzurum, Turkey, 2008, 6 pp.

[21] C.A. Soto and V.L. Osorio, *Prototypes and learning of geometry, a reflection on its pertinence and its causes*, Center for Research and Advanced Studies of the IPN, 2008, 5 pp.

[22] M.A. Tiamiyu, *Information technology in Nigerian federal agencies: problems, impacts and strategies,* J. Inf. Sci. **26** (2000), no. 4, 227–237.

[23] F. Valinejad, E. Aminifar and S. Bakhshalizadeh, *The impact of the NEWGRAPH educational software on the conceptual perception of graph theory*, Proceedings of the International Conference on Science and Mathematics Education (CoSMEd), pp. 280–287, 2009.

Towards Mathematical Sciences

Vol. 3, No. 1, Spring and Summer 2023, pp. 22–43

DOI.10.22067/tmsj.2023.43620

Expository Article

به سوی علوم ریاضی

https://tmsj.um.ac.ir

HISTORY OF MATHEMATICS IN THE ISLAMIC ERA: THE INSTRUMENTAL ROLE OF "POETRY" IN THE TEACHING OF INDIAN ARITHMETIC

FATEMEH SAADATMAND[1]

[1]Research Institute of History of Science, University of Tehran, IRAN
saadatmand88@ut.ac.ir

Abstract. In the history of mathematics during the Islamic period, poetry was used as an educational tool and has been applied for the purpose of arithmetic teaching. The special features of rhyming couplets in easier learning and faster recall of arithmetic rules were the main reason for the success of this educational method, as it was used in textbooks and pedagogical materials for centuries, and it was effective until recent centuries. This paper aims to remind the importance of one of the common methods of teaching mathematics and science in the past, which is to use the capacity of poetry and literature for introducing Indian arithmetic, by introducing two manuscripts on rhythmic arithmetic. Furthermore, it will explain the general principles of Indian arithmetic and examine a method of multiplication and division which is known as "Lattice" belonging to the seventh century AH.

2020 Mathematics Subject Classification. 97A30, 01A30, 00A06

Keywords. history of mathematics, poetry, Indian arithmetic, pedagogy, practical arithmetic

Date: Rceived 12-9-2022 Revised 5-2-2023 Accepted 6-3-2023 Available Online 10-3-2023

دوره ۳، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۲، صص. ۲۲–۴۳
DOI. 10.22067/tmsj.2023.43620

مقاله علمی-ترویجی

https://tmsj.um.ac.ir

تاریخ ریاضیات دورهٔ اسلامی: نقش ابزاری «شعر» در آموزش حساب هندی

فاطمه سادات سعادتمند[1]

[1]پژوهشکدهٔ تاریخ علم، دانشگاه تهران

saadatmand88@ut.ac.ir

چکیده. در تاریخ ریاضیات دورهٔ اسلامی، شعر به‌عنوان ابزاری کمک‌آموزشی و به‌منظور آموزش حساب به‌کار می‌رفت. ویژگی‌های خاص کلام موزون در یادگیری آسان‌تر و یادآوری سریع‌تر قواعد حسابی سبب اقبال این شیوهٔ آموزشی بود به‌گونه‌ای که سده‌ها از آن در منابع و رسایل درسی استفاده می‌شد و تا قرون اخیر نیز کارایی داشت. این گفتار بر آن است تا با معرفی دو نسخهٔ خطی در باب حسابِ منظوم، اهمیت یکی از روش‌های متداول آموزش ریاضیات و علوم درگذشته یعنی بهره‌گیری از ظرفیت شعر و ذوق ادبی را در آموزش حساب هندی یادآور شود و افزون بر آن، اعمال محاسباتی اصلی و همچنین «میزان» در حساب هندی را شرح دهد و به بررسی روشی در ضرب و قسمت بپردازد که با نام «شبکه» مشهور گشته است و به سدهٔ هفتم هجری قمری تعلق دارد.

۰. مقدمه

شیوهٔ حساب هندی بر اساس ۹ نشانهٔ هندی یعنی ارقام ۱ تا ۹ و یک دایرهٔ توخالی (صفر) است که برای محفوظ نگه داشتن مراتب خالی به‌کار می‌رفت. مسلمانان تا پیش از آشنایی با حساب هندی، نوعی حساب عملی را به‌کار می‌بردند و از جنبهٔ توصیفی و حروفی اعداد استفاده می‌کردند و غالباً از حروف ابجد برای نشان

2020 Mathematics Subject Classification 97A30, 01A30, 00A06.

کلید واژگان. تاریخ ریاضی، شعر، حساب هندی، آموزش، حساب هوایی.
تاریخ: دریافت ۱۴۰۱/۶/۲۱ بازنگری ۱۴۰۱/۱۱/۱۶ پذیرش ۱۴۰۱/۱۲/۱۵ انتشار برخط ۱۴۰۱/۱۲/۱۹

نحوه ارجاع به این مقاله: ف.س. سعادتمند، تاریخ ریاضیات دورهٔ اسلامی: نقش ابزاری «شعر» در آموزش حساب هندی، به سوی علوم ریاضی، ۳ (۱۴۰۲)، شماره ۱، ۴۳–۲۲.

دادن مقادیر اعداد سود می‌جستند. ابداع دستگاه اعداد دهگانی به قرون اولیهٔ میلادی باز می‌گردد، اما نخستین سند کتبی که در این‌باره از هند باز مانده، مربوط به ۵۹۵م. است ([۱۲، ص. ۴۵۵]). در سال ۱۵۴ ق. هیئتی اعزامی از هند به بغداد وارد شد. این هیئت مجموعه‌ای از جداول نجومی (زیج) را به همراه داشت که پس از آن به‌انضمام جداول دیگری که برهماگوپتا[۱] تهیه کرده بود، نخستین بار با ترجمهٔ کتاب نجومی سیدهانتا (تألیف ۶۲۸ م.)[۲]، از سنسکریت به عربی، توسط ابواسحاق ابراهیم بن‌حبیب فزاری (د. ۱۸۸ ق.) به سرزمین‌های اسلامی راه یافت و سپس از طریق تألیفات خوارزمی (د. ۲۳۳ ق.) به‌کار گرفته و رایج شد. پس از ورود هیأت هندی به دربار منصور عباسی، چون خلیفه از کتاب معروف سیدهانتا به زبان سنسکریت و جدولهای موجود در آن دربارهٔ حرکات سیارات خبر یافت، به ترجمهٔ آن فرمان داد و مقرر داشت به همان شیوه کتابی به زبان عربی تدوین شود و این کار را به عهدهٔ فزاری گذارد ([۵، صص. ۱۱۷، ۳۲۰]؛ [۹، صص. ۵۰–۴۹]). زیجی که فزاری بدین ترتیب فراهم آورد به سند هند کبیر شهرت یافت و تا دوران مأمون مورد استفادهٔ منجمان اسلامی بود و سپس به‌دست محمّد بن موسی خوارزمی تلخیص و تصحیح شد و به زیج سند هند معروف گشت[۳]. خوارزمی دو رسالهٔ *الحساب الهندی* و *الجمع و التفریق* را در سال ۲۰۹ ق. تألیف کرد هرچند متن هیچ‌یک از این دو رساله باقی نمانده است، احتمالاً موضوع آنها روش استفاده از ارقام هندی بوده است. قدیمی‌ترین اثر به جامانده به عربی دربارهٔ حساب هندی، کتاب *الفصول فی الحساب الهندی* نوشتهٔ اقلیدسی است که در سال ۳۴۱ ق. در دمشق نوشته شده و فقط در نسخهٔ منحصر به فردی که دو قرن پس از آن و در ۵۸۱ ق. استنساخ شده، باقی مانده است. همچنین در بسیاری از آثار نجومی هندی، نخستین بخش به حساب اختصاص دارد، از جمله بخش اول کتابی از بهاسکره[۴] که لیلاوتی[۵] نام دارد ([۴، ص. ۸۵]).

در دورهٔ اسلامی، حساب هندی و خصوصاً آسانی به‌کارگیری آن در مراتب ارزش مکانی که از سده‌های پیشین و از دوران بابلیان شناخته شده بود، رواج یافت و با ابزارهایی چون تخت و تراب[۶] عرضه گشت و برای انجام محاسبات و نیز آموزش اعمال اصلی به کار گرفته شد. از سدهٔ ۴ ق. به بعد کم‌کم تخت و تراب جای خود را به کاغذ داد و روش‌های نوینی برای محاسبات مقدماتی چون جمع و تفریق، تضعیف و تنصیف و همچنین ضرب و قسمت ابداع شد.

---

[۱] Brahmagupta

[۲] Sidhanta

[۳] از اصل این زیج، نسخهٔ خطی به‌جا نمانده و فقط از طریق ترجمهٔ لاتینی آدلارد باثی (۱۰۸۰–۱۱۵۲م) از تحریر مسلمة بن احمد مجریطی (ح ۳۹۰ق، قرطبه) از آن آگاهی داریم.

[۴] Bhaskara II

[۵] Lilavati

[۶] خاکی نرم که به آن «تراب» یا «غبار» گفته می‌شد روی تخته‌ای مخصوص می‌پاشیدند و با وسیله‌ای قلم‌مانند که به میل نیز معروف بود، ارقام هندی را روی تخته ثبت می‌کردند و با شیوه‌های مخصوص و مشخص عملیات حسابی را انجام می‌دادند.

۲. نقش شعر در آموزش حساب

در کتب حساب قدیم، بیان جدول ضرب با استفاده از ادبیات منظوم و خصوصاً شعر در قالب ساده (مثنوی) پیشینه دارد. این روش آموزشی گرچه امروزه متداول نیست، اما درگذشته برای جذاب ساختن ریاضیات، تنوع بخشیدن به مباحث درسی و همچنین تصویرسازی در ذهن دانش‌آموز با کمک وزن آهنگین صورت می‌گرفت. «حساب هوایی» نوعی «حساب عملی» است که در آن مسائل و محاسبات به صورت ذهنی و بدون استفاده از وسیله‌ای چون تخت، کاغذ یا ابزار محاسباتی دیگر انجام می‌شود. مباحث حساب هوایی مخصوص بازرگانان در سفر، فروشندگان بازار و عوام مردم بود خصوصاً آن دسته که از سواد خواندن و نوشتن بی‌بهره بودند یا آن دسته که به لوازم کتابت دسترسی نداشتند یا قادر به تهیهٔ آن نبودند. آثار حساب هوایی معمولاً روش‌هایی از ضرب، قسمت و نسبت را به شیوهٔ ذهنی به‌کار می‌گیرد و بعضاً به مهارت‌هایی چون شعر می‌پردازد که عملاً بر حافظه مبتنی باشد [۸]. این شاخه از حساب که معمولاً با روش‌هایی ذهنی برای ضرب و قسمت و حل مسائل سر و کار دارد، از ابزار شعر در این بستر سود جسته و قواعد حساب را برای یادگیری سریعتر و آسان‌تر با شعر می‌آمیخت تا نوآموز به راحتی آن قاعده و ضابطه را به خاطر سپارد، تکرار نماید و ملکهٔ ذهن سازد. در برخی آثار حساب در ذکر قاعدهٔ روش‌های ضرب ذهنی، ابیات متواتر و فراوان و البته پراکنده‌ای وجود دارد. یکی از آن ابیات که به علی (ع) منسوب گشته (به طور مثال شکل ۸ در پیوست‌ها)، مربوط به ضرب آحاد در بازهٔ شش تا ده و به زبان عربی است که در آن اعداد به حروف ابجد بیان می‌شوند:

وَو لَوٍ، وَز مَبٍ، وَح مَحٍ، وَط نَدٍ زَز مَطٍ، زَح نوٍ، زَط سَجٍ، حَح سَدٍ
حَط عَبٍ، طط فاءٍ، ضرب ما دون عشرٍ ها الیهاً تهتدی

مثلاً در این‌جا با توجّه به اینکه «و» ابجد معادل عدد ۶ و «ل» ابجد معادل ۳۰ است، «وو لوٍ» یعنی «شش‌شش، سی و شش» و به همین ترتیب حاصل‌ضرب تمامی اعداد تک‌رقمی کوچکتر از ده بیان می‌شود. این قطعه به‌کرات در نسخ خطی تکرار شده است و آن را در برگ آغازین نسخه یا در هامش بسیار نسخ با موضوع نجوم و ریاضیات نیز نگاشته‌اند و بعضاً آن را به نصیرالدین طوسی منسوب ساخته‌اند (به طور مثال شکل ۹ در پیوست‌ها) چنان‌که دو بیتی زیر در آثار حساب عملی که بسیار متواتر است، نیز بدو منسوب گشته و با این حال در رسالهٔ حساب هوایی وی نیامده است [۸]:

آحاد بر آحاد فراز آر مدام ده بفکن و هر زایده را ده کن نام
از هر طرفی نگر که تا ده چند است در یکدگرش ضرب کنی گشت تمام

این دوبیتی، نیز روشی برای یافتن حاصل‌ضرب دو عدد مفرد در بازهٔ شش تا ده پیشنهاد می‌کند که به بیان ساده چنین است:

(۱) مجموع دو عدد را به دست آورده و ده تا از آن کم می‌کنیم.

(۲) حاصل‌ضرب تفاضل هر دو عدد از ده را حساب می‌کنیم.
(۳) ده برابر حاصل مرحلهٔ نخست را با مقدار به‌دست‌آمده در مرحلهٔ بعد جمع می‌کنیم، نتیجه حاصل می‌شود.

مثلاً حاصل‌ضرب ۷ در ۸:

(۱) مرحلهٔ اوّل: ۵ = ۱۰−(۷+۸)
(۲) مرحلهٔ دوم: ۶ = (۷−۱۰)×(۸−۱۰)
(۳) حاصل‌ضرب: ۵۶ = ۶+۵×۱۰

رسایل معدودی نیز با استفاده از فنون شعری به آموزش اصول پایه و مقدماتی حساب هندی پرداخته‌اند از جمله ابیاتی چند از شاعر یا شعرایی گمنام در شرح ضوابط و اعمال اصلی حساب از جمله روش تضعیف، تنصیف، جمع و تفریق، محاسبات میزان و میزان‌گیری و همچنین قواعدی که در ضرب و قسمت شبکه سروده شده است.

دو نسخهٔ خطی از این آثار منظوم در کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی با شمارهٔ ۵۳۷۹ (گ۵۹پ–۶۱پ) و شمارهٔ ۶۵۴۵ (گ۱۲پ–۱۳پ) دستیاب است[۷] که ابیات آغازین آن از این قرارند ([۳، گ۱پ]):

به نام کردگار «فرد» بی«زوج»	که دایم بحر لطفش می‌زند موج
خداوندی که در بر در «حساب» او	به «میزان» علتی بخشد ثواب او
در «اعمال» ار بود از «کسر» «نقصان»	کنند «جبر» و «کسور» آن به‌غفران
درود بی«عدد» بر خان چون پاک	که او بر فرق دارد تاج لولاک[۸]
رسولی کو به «ضرب» تیغ توفیق	طریق حق ز باطل کرد «تفریق»
دگر بر روح پاک جمله اصحاب	همان بر زمرهٔ اتباع و احباب
پس از حمد و درود رب عالم	ز بعد نعت احمد فخر آدم

همان‌طور که مشخص است شاعر آشنا به قواعد ریاضیات، با استفاده از اصطلاحات حساب و پیوند آن با ادبیات به حمد و ستایش خدا و رسول وی (ص) پرداخته و با بهره‌گیری از آرایه‌های ادبی و استعاره و ایهام، مقدمه‌ای بر این اثر حسابی ساخته است. این نحوهٔ آغازه‌بندی و مقدمه‌نویسی بر آثار علمی و ادبی عادتی رایج میان نویسندگان و اندیشوران پیشین بود. پس از آن ابیات را بدین صورت ادامه می‌دهد:

بدان کز گفتهٔ ارباب حکمت	حساب آید کلید باب حکمت
ریاضی را بود صحت بدو سخت	همش صحبت قوی حاجت بدو سخت

[۷] نسخ خطی مطالعه‌شده در این پژوهش از طریق وب‌سایت کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی در دسترس است.
[۸] اشاره‌ای است به حدیثی قدسی، خداوند خطاب به حضرت محمّد (ص) فرمود: «لولاکَ لما خلقتُ الأفلاک»: اگر تو نبودی دست به آفرینش هستی نمی‌زدم.

نجوم شرع پس ناگزیر[۹] است امور مُلک را خوش دستگیر است
چو من با وی سر مألوف دارم برو اوقات خود مصروف دارم
قوانینش به نظم آورده خوانم روان در نظم [آن] پرورده خواهم
به شرط آنکه فیض حق شود یار امان یابم ز جور چرخ دوّار

از فحوای ابیات بالا چنین بر می‌آید که شاعر به نقش حساب در محاسبات نجومی و تعیین مواقیت شرعی و همچنین نقش نجوم در تعیین احوال ملک و مملکت و اوضاع شاهان چنان‌که در احکام نجوم به کار گرفته می‌شد، آگاهی داشته است. پس از مقدمه، ارقام هندی به صورت زیر معرفی می‌شود و ابیاتی در توصیف اعمال حسابی در پی آن می‌آید:

حکیمان کاندرین علم[اند] اُستاد عدد بر نُه ورق کردند اِستاد
ز یک تا نُه رقم بنیاد کردند ز تحریر این‌چنین اسناد کردند

۹ ۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱

۱.۲ شعر در طریق تضعیف

عددی را که می‌کنی تضعیف صورت آن بعینها بنگار
بعد از آن یک‌به‌یک مضاعف ساز در یمین گیر اوّل این کار
بعد تضعیف اگر به ده برسند در همان مرتبه بنه به‌قرار
لیک در هر کجا که باشد صفر تو مر او را به حال خود بگذار
همچنین تا عدد تمام شود این قواعد تمام آر به کار

۲.۲ شعر در طریق تنصیف

عددی را که می‌کنی تنصیف اوّلاً صورتش می‌کن تعیین
پس از آن از یسار کن بنیاد یک‌به‌یک نیمه ساز و باز ببین
آنچه زوج است نیست کسر درو نیمه در زیر او بنه به زمین
ور بود طاق به هر نیمهٔ او پنج را نیز نما به نصف یمین
تا رسی تو به رتبهٔ آحاد این عمل بایدت نمود چنین
ور در آحاد نیست صورت طاق رقم نصف بایدت کرد این
بود نصف صحیح اگر باشد بدو یکی و دو بنه به‌یقین
ور نباشد صحیح هیچ درو صفر و مدّ و یکی و دوست همین

[۹] ضبط نسخه: ناگذیر

۳.۲ شعر در طریق جمع

جمع اعداد چون بخواهی کرد جملگی را نویس بر یک‌جا
که برابر بود مراتب کل پس از آن آحاد ابتدا بنما
وانگهی جمع کن همهٔ آحاد بنگر از کجا رسید به کجا
هر چه از ده زیاده شد آن را بنه آنجا و به هر ده یک را
می‌فزا بر یسار نشان یکان هست عشرات و عمل تمام نما
همچنین تا عمل تمام شود جمع می‌کن تمامی این‌ها
هرجا کاندرو بود صفری صفر بر حال خود نمای رها

۴.۲ شعر در طریق تفریق

عدد را از عدد چون کم نمایی رقم کن هر دو را اول به جایی
بنه منقوص اوّل را پس آنگاه بده منقوص را در تحت او راه
رقم‌ها آنچنان نه ای برادر که باشد با نظیر خود برابر
پس آنگاه از یسارش ابتدا کن مر او را در نظیر او جدا کن
اگر چیزی بماند از نظیرش بنه آن چیز باقی را به زیرش
وگر زان خود نظیر اوست کمتر کمی را از یسار او بیاور
یکی زان ده بود نسبت بدین‌جا از آن ده کم نما آنگاه این را
بیفزا با نظیر، آن باقیِ ده بگیر این را خوش و می‌رو برین ره
دگر زانکه یساری نیست آن را بیاور از میآت آن یکی را
بنه نُه را از آن صد بر یسارش یکی کان ده بود اینجا بیارش
بدان دستور کم کن آن از آن ده مده از دست خود مطلق تو این ره
همین اعمال باید با یمین کرد عمل‌ها را همه با او چنین کرد
بدین دستور می‌رو تا به آحاد برین اعمال بنه زین پس تو بنیاد

۵.۲ شعر در طریق ضرب شبکه

ابیات زیر به منظور شرح ضرب به روش شبکه آمده است ([۲، گ ۵۹پ–۶۰پ] ؛ [۳، گ۱۲پ–۱۳ر]):

چو خواهی کرد در هم ضرب اعداد در اوّل، جدول آن کن تو بنیاد
پس آن مضروب، فوق جدول آرش بنه مضروبٌ فیها بر یسارش
ببین چند است هر یک از مراتب بدان مقدار قسمت کن مناسب

ز بُعد او مربّع‌های اصغر / بود با ضرب مفردها برابر
به فوق هر مربّع یک عدد آر / وزان جانب دگر می‌کن همین کار
نظر کن تا مربّع‌های جدول / خصوصاً آخرین از سطر اوّل
چنان کن کآخرِ هر دو مراتب / بر آن واقع شود از هر دو جانب
مثلث ساز آنگه جملگی را / در اتمام عمل تقصیر منما
ز فوقانی بکن بنیاد اوّل / ز فردی کوست در پایان جدول
ببین تا خود از این‌ها چیست حاصل / ده است یا کم ز ده یا هست فاضل
بزن هر صورتش را ای هنرور / به هر یک‌یک ز مفردهای آخر
کم از ده در مثلث‌های سفلی / رقم کن در موازی‌های آن‌ها
ولیک از بهر هر یک ده، یکی را / بنه اندر مثلث‌های علیا
بدین دستور می‌رو تا به آغاز / که تا با فرد اوّل ای سرافراز
بدو هم این عمل‌ها را وفا کن / پس آنگه زان مثلث ابتدا کن
که باشد زان مربّع ای برادر / که هست از اوّلینِ سطر آخر
بود بی‌شبهه آن آحاد حاصل / بنه چیزی که در وی هست داخل
وگر در وی نباشد هیچ چیزی / بنه صفری کزین نبود گریزی
به دستوری که معهود است در جمع / به صورت جمع کن ای جمع را شمع
بنه آحاد در پهلویش آنگه / یکی بفزا برای هر یکی ده
به مابین مورّب کوست تالی / بده این قاعده از دست خالی
برد تا آن مربّع کو ز جدول / بود در آخرینِ سطر اوّل
به علیای مثلث چون رسیدی / عمل آخر شد و تو هم رهیدی
به هر جایی که باشد صفر آنجا / به حال خویشتن بگذار آن را
عمل‌هایی که گشت این‌جا مقرّر / شود معلوم زین شکل مصوّر[۱۰]

۶.۲ شعر در قاعدهٔ قسمت شبکه

ابیات زیر نیز به منظور شرح قسمت به روش شبکه آمده است ([۲، گ۶۰پ–۶۱پ]؛ [۳، گ۱۳پ]):

گر تو خواهی تا کنی قسمت عدد را بر عدد / از خدا درخواه کن توفیق و یاری و مدد
مفردی اعظم طلب کن اوّلد از مفردات / خواه از آحاد باشد یا که باشد از میات
چون به مقسومٌ علیها ضرب سازی آن زمان / حاصلش مقسوم باشد یا بود کمتر از آن

[۱۰] جداول این اعمال حسابی در دست‌نویس‌ها موجود نیست و از آن‌ها افتاده است اما در ادامه با استفاده از دیگر متون کهن حساب که این نوع ضرب در آن‌ها شرح و بحث شده به توضیح هر روش با رسم جدول مربوط می‌پردازیم.

گرچه مقصود است حاصل، آن عدد کافی بود — خارج القسمة آن مفرد همین وافی بود
ور که چیزی از مقسوم می‌بینیم کان — یا ز مقسومٌ علیها زاید است یا کم از آن
زاید ار شد مفردی را کمتر از اولین — زن به مقسومٌ علیه و حاصل او را ببین
حاصل او گر برابر گشت با باقی تمام — هر دو مفرد خارج القسمة است باقی والسلام
ور ز باقی هرچه باقی مانده ای صاحب‌هنر — آن ز مقسومٌ علیها کم بود یا بیشتر
بیش اگر باشد طلب کن مفردی ثالث از آن — حاصل آن بین و مقسومٌ علیها بعد از آن
گرچه باقی بقایا باشد و آنگه چون — رفتی آن حاصل بقایا کم بود ای رهنمون
گر برابر گشت حاصل با بقایای کمان — خارج القسمة است جمله مفردات ای کامران
ور ز مقسومٌ علیها کم بود زان مابقی — نسبت او بین به مقسومٌ علیها ای تقی
بعد از آن این مفردات و کسر آن — خارج القسمة است گفتم جملگی را والسلام
هر محاسب کین نماید حل بسی ماهر بود — در حساب ضرب و قسمت به زمن قادر بود

۳. اعمال محاسباتی

در حساب هندی، اعمال حسابی را می‌توان به دو صورت متداول کلی انجام داد. نخست همانند حسابی که در اکثر رسایل اوایل شرح آن رفته است با پاشیدن خاکی نرم بر روی تخت و به‌وسیلهٔ ابزاری که برای کشیدن و «ثبت» اشکال نُه‌گانه روی تخت استفاده می‌شد و بدان «تخت و تراب» می‌گفتند و روش دوم استفاده از کاغذ و قلم است.

این رسایل منظوم چهار روش تضعیف، تنصیف، جمع و تفریق را در ابتدا با روش تخت و تراب شرح می‌دهند و سپس روشی در ضرب و قسمت که مخصوص کاغذ است، را با ابیاتی مشترک توضیح می‌دهند.

۱.۳ تضعیف و تنصیف، جمع و تفریق

تضعیف یعنی دو برابر کردن و تنصیف یعنی بخش کردن عدد بر دو یا نیمه کردن آن. هر دو شیوه در ریاضیات کهن مصری از اسباب عمل ضرب بود. مصریان از دو برابر ساختن مکرّر و متوالی یک عدد برای یافتن حاصل‌ضرب استفاده می‌کردند (شکل۱).

این روش در صورتی برای ضرب دو عدد کارایی دارد که قاعدهٔ زیر رعایت گردد و برای هر عدد m بتوان نوشت:

$$m = \sum_{n=0}^{N} k2^n \quad k \in \{0,1\},$$

و به نظر می‌رسد مصری‌ها به این قانون کلی که «می‌توان هر عدد را به صورت مجموعی از توان‌های دو نوشت» اشراف کامل داشته‌اند چون توانسته‌اند انواع ضرب را با روش تضعیف و تنصیف و بدون استفاده از جدول ضرب اعداد انجام دهند ([۱۱، ص. ۸۷]) چنان‌که شیوهٔ ضرب ایشان بعدها کامل‌تر شد و به صورت روش «تضعیف و تنصیف» هم‌زمان درآمد ([۱۶، صص. ۶۱–۶۰]). اساس این روش، نوشتن یکی از دو عامل

⟶	۱	۱۷
	۲	۳۴
⟶	۳	۶۸
⟶	۴	۱۳۶

۱+۴+۸=۱۳   ۱۷+۶۸+۱۳۶=۲۲۱

شکل ۱: مراحل انجام ضرب به روش تضعیف: حاصل‌ضرب ۱۷ در ۱۳

ضرب به صورت یک سری توان دو است که با توجّه به حاصل‌تضعیف متناظر اعضای آن در هر مرحله و افزودن آن‌ها به یکدیگر می‌توان به حاصل‌ضرب دو عدد دست یافت. (شکل۲).

یونانی‌ها نیز این روش ضرب را با برخی اصلاحات به‌کار برده‌اند و تا سده‌های میانی نیز همچنان رایج بود ([۱۱، ص. ۸۷]) هرچند در بیشتر منابع اسلامی همچون رسالهٔ حاضر در عمل ضرب و قسمت به عمل تضعیف و تنصیف بدون به‌کارگیری آن در جهت ضرب و قسمت اشاره شده اشت. در بسیاری از کتب حساب پیش از شرح اعمال جمع و تفریق به دو عمل تضعیف و تنصیف پرداخته می‌شود. تضعیف و تنصیف، خود نوعی حالت خاص از عمل ضرب و قسمت به شمار می‌رود و به نظر می‌رسد در نظر گرفتن آن به‌عنوان اعمالی جداگانه سنتی باشد که از حساب مصری نشأت گرفته است ([۱۰، صص. ۴۴–۴۳]).

⟶	۲۲۵	۱۷
	۱۱۲	۳۴
	۵۶	۶۸
	۲۸	۱۳۶
	۱۴	۲۷۲
⟶	۷	۵۵۴
⟶	۳	۱۰۸۸
⟶	۱	۲۱۷۶

۱۷+۵۴۴+۱۰۸۸+۲۱۷۶

=۳۸۲۵

شکل ۲: مراحل انجام ضرب به شیوهٔ تضعیف و تنصیف: حاصل‌ضرب ۲۲۵ در ۱۷

در حساب مصری، روش تقسیم نیز مشابه روش ضرب انجام می‌شد و مقسوم‌علیه را چند بار به طور متوالی تضعیف می‌کردند تا بتوان مقسوم را به صورت مجموعی از حاصل‌تضعیف‌ها نوشت و سپس به روش عکس ضرب و با افزودن اعضای سری توانی دو متناظر با آن حاصل‌تضعیف‌ها، خارج قسمت را می‌یافتند (شکل ۳).

۱		۲۹
۲		۵۸
۴		۱۱۶
۸	$\longrightarrow$	۲۳۲
۱۶	$\longrightarrow$	۴۶۴

۸+۱۶=۲۴ ۲۳۲+۴۶۴=۶۹۶

شکل ۳: مراحل انجام قسمت به شیوهٔ تضعیف:خارج قسمت ۶۹۶ بر ۲۹

در رسایل دورهٔ اسلامی، عمل «جمع» با معادل‌هایی چون «زیادت کردن»، «افزودن» و «ضم کردن» نیز به‌کار می‌رود. همچنین به «تفریق»، «نقصان کردن»، «کاستن» یا «طرح کردن» نیز گفته می‌شود.

۲.۳ میزان و میزان‌گیری میزان‌گیری در اصل آزمونی برای سنجش درستی اعمال حساب (تضعیف، تنصیف، جمع، تفریق، ضرب، قسمت و جذر) است. میزان‌های مرسوم، مقدار باقی‌ماندهٔ عدد بر عدد نُه یا یازده بود. برخی از رسایل حسابی برابر شدن حاصل میزان و میزان حاصل عمل را دلیلی بر درستی عمل حسابی دانستند و برخی تنها ناراستی این دو مقدار را دلیل اشتباه بودن عمل ذکر کرده‌اند. میزان چنان‌که نصیرالدین طوسی در کتاب خود *جوامع الحساب* آورده است بدین صورت تعریف می‌شود:

> «اگر محاسبه درست باشد، میزان درست است و اگر میزان درست نباشد، پس محاسبه درست نیست، و چنین نیست که اگر میزان درست شد محاسبه درست باشد یا اگر محاسبه درست نباشد، پس میزان درست نیاید.»

بر خلاف او بسیاری ریاضی‌دانان از جمله خوارزمی (سدهٔ ۳–۲ ق)، کرجی (د. حدود ۴۲۰ ق.)، عبدالقاهر بغدادی (سدهٔ ‐۴–۵ ق.)، نسوی (د. حدود ۴۷۳ ق.) میزان را چنین فرض گرفته‌اند که اگر میزان‌ها (در نتیجه و اجزا) مطابق به‌دست نمی‌آمد، محاسبات اشتباه بود و اگر مطابق می‌شد، محاسبات را درست فرض می‌کردند و در نتیجه «مطابق بودن» میزان‌ها را برابر با «درست بودن» محاسبات می‌گرفتند که در بسیاری از

کُتب حساب نیز به همین صورت شرح داده‌اند. توجّه به این نکته ضروری است که از دید منطق، مطابق بودن میزان‌ها نمی‌تواند لزوماً به‌معنای درست بودن محاسبات باشد، چه بسا ممکن است محاسبه اشتباه باشد، اما میزان‌ها براتّفاق برابر گردد؛ پس تطابق میزان‌ها برای نشان دادن درستی یک محاسبات ریاضی فقط شرط لازم است، ولی شرط کافی نیست. به‌جز نصیرالدین طوسی، تقی‌الدین بن عزالدین حنبلی (حدود سدهٔ ۸ ق.) نیز در تعریف میزان به شرط لازم و کافی دقت کرده است. ([۱۵، صص. ۳۶–۳۴])

در عمدهٔ رسایل حساب میزان‌گیری بر مبنای میزان نُه به‌کار رفته و در برخی دیگر از میزان یازده نیز یاد شده است. میزان نُه چنان است که مجموع ارقام عدد بر نُه را به دست آورده و سپس باقی‌ماندهٔ آن را بر نُه محاسبه می‌شود معمولاً با اصطلاحاتی چون «نُه نُه طرح کردن» یا «نُه نُه انداختن» بیان می‌شود و تا آنجا ادامه می‌یابد که باقی‌مانده عدد در قسمت بر نُه، کمتر از نُه شود و به این ترتیب در واقع هم‌نهشت عدد مذکور به پیمانهٔ نُه مشخص می‌گردد. این باقی‌مانده را میزان می‌نامند. اگر باقی‌مانده صفر بود و عدد بر نُه بخش‌پذیر بود، میزان آن را معادل با نُه در نظر می‌گیرند. میزان‌گیری برای تک‌تک اجزای عملیات حسابی انجام می‌گردد. به عنوان مثال اگر دو عدد را با هم جمع کنیم و بخواهیم درستی این عمل را امتحان کنیم، میزان هر یک را به دست آورده جمع می‌کنیم و با میزان حاصل جمع مقایسه می‌کنیم؛ به بیان دیگر میزان حاصل جمع را با حاصل جمع میزان‌ها می‌سنجیم. واضح است که نابرابری دو میزان گواه نادرستی عمل است ولی برابری آن درستی عملیات حسابی را ضمانت نمی‌کند. برای نمونه، حاصل جمع دو عدد ۱۷۶ و ۴۶۷ و بررسی میزان‌ها در روش میزان‌گیری۹ (یافتن هم‌نهشت عدد به پیمانهٔ ۹):

میزان (۱۷۶): ۵	میزان (۴۶۷): ۸
میزان (مجموع میزان‌ها (۱۳)): ۴	میزان مجموع (۶۴۳): ۴

همان‌طور که مشخص است میزان مجموع و مجموع میزان‌ها برابر شده‌اند، بنابراین محاسبه درست است؛ حال اگر حاصل مجموع به جای ۶۴۳، به اشتباه ۶۳۴ ثبت شود بازهم میزان‌ها مطابق می‌شود گرچه محاسبه نادرست است. این مثال نشان می‌دهد شرط تطابق میزان‌ها با اینکه شرط لازم برای درستی محاسبه است، اما شرط کافی برای برآورده ساختن آن نیست و درستی نتیجهٔ محاسبه را تضمین نمی‌کند.

میزان دیگری که در برخی از رسایل حسابی بدان اشاره شده میزان احدی عشر یا میزان یازده است. در این میزان باقی‌مانده یا هم‌نهشت عدد به پیمانهٔ یازده به دست می‌آید و طبق آن چه برای میزان نُه گفته شد، میزان حاصل را با حاصل میزان مقابله و مقایسه می‌کنند.

۳.۳ قاعدهٔ شبکهٔ مجموع: روشی برای آموزش ضرب و قسمت شیوهٔ ضرب و قسمت شبکه یکی از انواع محاسبات مخصوص کاغذ است که نخستین‌بار در آثار عربی و فارسی سدهٔ ۷ ق. معرفی شده است و به‌سبب جدولی و شبکه‌ای بودن ویژگی‌های قابل توجهی دارد. این شیوه برخلاف روش‌های مدرنی که امروزه در مدارس ارائه می‌شود، الگویی برای درک بهتر دانش‌آموزان از نظام دهگانی ارزش مکانی در حین انجام عمل ضرب و تمایز و انتقال بین مراتب یکان، دهگان، صدگان و بالاتر است. یکی از مزایای شیوهٔ ضرب شبکه در

ضرب اعداد بزرگ و چند رقمی (مثلاً چهار رقمی در پنج رقم و بیشتر) بوده که از دشواری ضرب مراتب بالا و امکان بروز خطا در آن کاسته و عمل ضرب را برای کودکان بسیار آسان و جذاب می‌سازد. ضرب شبکه با استفاده از الگوهای ذهنی، نظم منطقی و تصویرسازی مبتنی بر حافظهٔ دیداری، مفهومی ساده چون ضرب را با دید عمیق‌تری در ذهن نوآموز شکل می‌دهد (نک : [۱۷]).

معمولاً منشأ و پیشینهٔ ضرب و قسمت شبکه را از ژاپن یا چین می‌دانند گرچه شاهدی در متون کهن برای آن در دست نیست و به نظر می‌رسد این روش ضرب و قسمت بر خلاف دیگر روش‌هایی که در دورهٔ اسلامی از هند یا یونان وام گرفته شده، ابتکار دانشمندان مسلمان آن روزگار باشد. روشی که طبق شواهد به‌دست‌آمده نخستین بار در رساله‌های فارسی و عربی سدهٔ هفتم قمری از جمله *المرشد في الحساب* و *الشمسیة في الحساب* برای انجام ضرب روی کاغذ مطرح شد و از آن پس از طریق رسایلی که در غرب جهان اسلام و در سرزمین اندلس کتابت شد، به ایتالیا و سپس سرتاسر اروپا و دیگر نقاط دنیا راه یافت و به‌عنوان یکی از روش‌های اصلی ضرب در تمامی رسایل حساب قرون ۱۳ و ۱۴ میلادی به کار رفت و مورد اقبال بسیاری از ریاضیدانان آن روزگار قرار گرفت.[۱۱]

۱.۳.۳ *روش ضرب شبکه.* در این روش، جدولی با ستون‌هایی به تعداد مراتب عدد مضروب و با ردیف‌هایی به تعداد مراتب مضروب‌فیه رسم می‌کنند و آن را به تعداد مراتب اعداد مضروب و مضروب‌فیه به مربع‌های کوچکتر قسمت می‌کنند و اقطار این مربّع‌ها را نیز ترسیم می‌کنند. پس از آن مضروب را در بالا و مضروب‌فیه را در یکی از وجهین[۱۲] آن می‌نگارند. هر کدام از این ستون‌ها نمایشگر ارزش مکانی ارقامی است که در آن قرار می‌گیرد. عمل ضرب را از سمت چپ آغاز کرده حاصل‌ضرب را در مرّبعی که از تلاقی ستون و ردیف مضروبین به دست می‌آید می‌نویسند به طوری که دهگان آن در بالای قطر مربّع و یکان آن در زیر باشد. این عمل ضرب را با انجام ضرب تمامی ارقام مضروب در مضروب‌فیه برای دیگر مراتب نیز انجام می‌دهند تا تمام خانه‌های جدول از ارقام یکان و دهگان نتایج حاصل پر شود. پس از آن از پایین‌ترین سطر جدول گوشهٔ سمت راست (یکان حاصل‌ضرب) آغاز نموده و ارقام ثبت‌شده در راستای اقطار را به صورت موّرب جمع می‌کنند تا به شرط پایانی عمل ضرب دست یابند. اگر حاصل جمع بیشتر از ده شد یکان را یادداشت کرده و یکی به خانهٔ سمت چپ اضافه می‌گردد. حاصل‌ضرب، عددی است که از قرارگیری اعداد حاصل‌شده به ترتیب ارزش مکانی در کنار یکدیگر به دست آمده باشد:

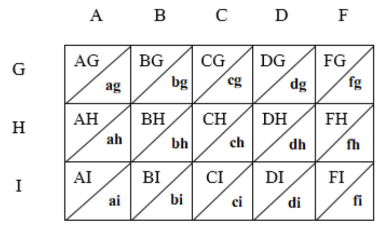
یکان حاصل‌ضرب دو رقم: ag

دهگان حاصل‌ضرب دو رقم: AG

---

[۱۱] برای آگاهی از پیشینهٔ مبسوط این ضرب در منابع فارسی کهن سدهٔ هفتم قمری به [۷] نگاه کنید.

[۱۲] اگر مضروب‌فیه را در سمت چپ جدول بگذارند اقطار را مانند شکل ۱ از راست بالا به چپ پایین می‌کشند و اگر در سمت راست بنویسند، جدول متقارن شده و اقطار را از راست پایین به چپ بالا رسم می‌کنند. شیوهٔ دوم بیشتر در سنت غربی رسایل حساب مرسوم است.



شکل ۴: مراحل انجام ضرب شبکه

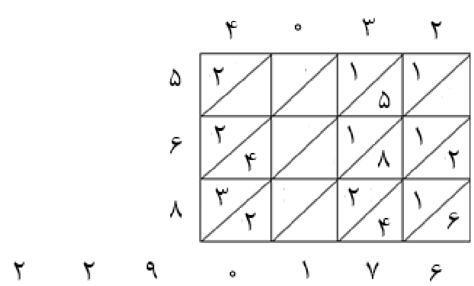
در نهایت حاصل ضرب با رعایت ارزش مکانی ارقام به‌دست‌آمده و انتقال مراتب آن به این صورت خواهد بود:
جای‌گذاری ارقام به ترتیب از ارزش مکانی کمتر به بیشتر ←

AG	AH+ag+BG	AI+ah+BH+bg+CG	ai+BI+bh+CH+cg	bi+CI+ch+DH+dg	ci+DI+dh+FH+fg	di+FI+fh	Fi

شکل ۵: طریقهٔ خواندن حاصل‌ضرب شبکه

این روش همانطور که در *الشمسیة في الحساب* آمده برای تحلیل ضرب مرکبات به ضرب مفردات است. اگر یکی از مضروبین، غیر مفرد (یا غیر مجرد) باشد از «ضرب شبکه» برای آن استفاده می‌شود. شکل ۶ مثالی از ضرب شبکه در *الشمسیة في الحساب* نظام‌الدین الاعرج نیشابوری (د. پس از ۷۲۸ ق.) است (نک [۱۳، گ۱۳ر]؛ [۱۴، گ۱۱ر]).
مترجم ناشناس *الشمسیة في الحساب* نیز در توصیف آن چنین آورده:

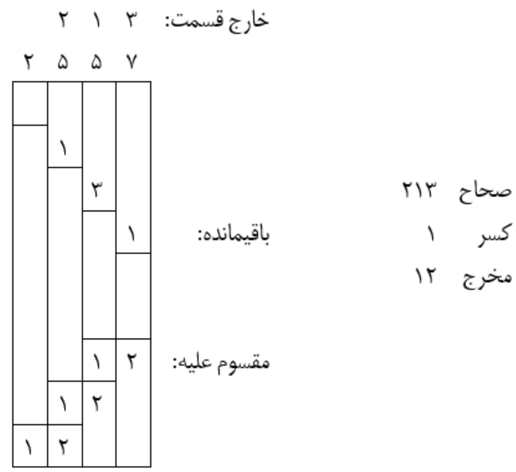
> «و این طریقه بغایت نیکوست و غریب، چنان‌که بعضی از افاضل عصر به دانستن این مباهات می‌کنند و در تعلیم صفت می‌نمایند وهو اعلمُ بالسرایر» ([۱، گ۱۲پ])



شکل ۶: ضرب شبکه: حاصل‌ضرب ۴۰۳۲ در ۵۶۸

۲.۳.۳ ***روش قسمت شبکه.*** در این روش، جدولی با ستون‌هایی به تعداد مراتب عدد مقسوم رسم می‌کنند و عدد مقسوم را در بالای آن می‌نگارند. هر کدام از این ستون‌ها نمایشگر ارزش مکانی ارقامی است که در آن قرار می‌گیرد. عدد مقسوم‌علیه در انتهای جدول در پایین‌ترین ردیف ممکن طوری قرار می‌دهند که رقم بزرگترین ارزش مکانی آن در ستون درست جدول (اوّلین ستون از سمت چپ) جای بگیرد. عمل قسمت را از سمت چپ آغاز کرده بزرگترین عددی را می‌یابند که اگر آن را در مقسوم‌علیه ضرب کنند برابر یا کمتر از عدد مقسوم شود. اوّلین عددی که پیدا شود را به عنوان اوّلین رقم خارج قسمت در بالای عدد مقسوم و در یک مرتبهٔ پایین‌تر ارزش مکانی قرار می‌دهند. این عمل را هر بار با جابه‌جایی عدد مقسوم‌علیه به سمت راست و برای دیگر مراتب انجام داده تا به شرط پایانی عمل قسمت دست یابند. برای مشخص ساختن پایان هر مرحله خطی زیر عدد مقسوم و بالای عدد مقسوم‌علیه می‌کشند. برای روشن‌تر شدن موضوع به انجام یک نمونه قسمت می‌پردازیم و عدد ۲۵۵۷ را بر ۱۲ قسمت می‌کنیم:

جدول را رسم کرده مقسوم و مقسوم‌علیه را در جای خود قرار می‌دهیم. از سمت چپ آغاز می‌کنیم و ۲ را بر ۱ قسمت کرده حاصل را که ۲ است در بالای عدد مقسوم و در یک مرتبه پایین‌تر ارزش مکانی قرار می‌دهیم. خارج قسمت را در مقسوم‌علیه ضرب کرده از مقسوم کم می‌کنیم. حاصل تفاضل را زیر عدد مقسوم می‌نویسیم. با پایان یافتن مرحلهٔ اول خطی زیر عدد تفاضل و بر بالای مقسوم‌علیه کشیده آن را یک مرتبه به سمت راست جابه‌جا کرده و عمل قسمت را مانند مرحله قبل تکرار می‌کنیم. این بار خارج قسمتی که حاصل‌ضرب آن در ۱ برابر با ۱ شود را ۱ یافته در بالای جدول به عنوان دومین رقم خارج قسمت قرار می‌دهیم. خارج قسمت را در مقسوم‌علیه ضرب کرده از مقسوم که در این مرحله ۱۵ است کم می‌کنیم. حاصل را که ۳ می‌شود در ستون مربوط نگاشته زیر آن خطی می‌کشیم و به مرحلهٔ بعد می‌رویم. با انتقال مقسوم‌علیه به سمت راست، عدد ۳ را به عنوان آخرین مرتبهٔ خارج قسمت می‌یابیم که اگر در ۱ ضرب شود حاصل برابر با ۳ شود. با جایگذاری عدد خارج قسمت در آخرین مرتبه و به دست آمدن باقیماندهٔ کمتر از مقسوم‌علیه عمل قسمت پایان می‌گیرد. همان‌طور که مشاهده می‌شود سعی بر آن بوده که در روش قسمت به طریق شبکه با استفاده از کاغذ نیز جایگاه خارج قسمت به عنوان صحاح، باقیمانده به عنوان کسر و مقسوم‌علیه به عنوان مخرج حفظ شود. گرچه در این نوع تقسیم مجبوریم تمامی مراحل را روی کاغذ دنبال کنیم و فاصلهٔ این سه عدد از یکدیگر زیاد خواهد شد و به نظر نمی‌رسد مواضع کسری در نمایش یونانی آن را به ذهن نزدیک کند ولی با این حال ترتیب نوشتار اعداد خارج قسمت (صحیح) و باقی‌مانده (کسر) در آن، منطبق بر ترتیب نوشتاری کسر مخلوط است.



شکل ۷: قسمت شبکه: خارج قسمت ۲۵۵۷ بر ۱۲

۴. واژگان حساب

آشنایی با اصطلاحات تخصصی متون کهن به‌منظور درک بهتر محتوا و مضامین علمی آن‌ها از ملزومات اولیه است. برخی اصطلاحات حساب که در رسالهٔ *ضرب و قسمت منظوم* به کار رفته و همچنین تعاریف آن در جدول (۱) آمده است[۱۳].

جدول ۱: واژگان حساب در اثر *ضرب و قسمت*

واژگان	تعریف
آحاد	یکان؛ نخستین ارزش مکانی؛ ارقامی که در اوّلین مرتبه قرار می‌گیرند و کم‌ترین ارزش مکانی را دارند.
طاق	فرد؛ عددی که باقیماندهٔ آن بر دو یک باشد.
جفت	زوج؛ عددی که باقیماندهٔ آن بر دو صفر باشد.
کسر	(۱) باقیماندهٔ عمل قسمت، (۲) صورت [کسر]
تنصیف	بخش کردن عدد بر دو؛ نیمه کردن
الوف	هزارگان؛ دور دوم دربرگیرندهٔ مرتبهٔ ارزش مکانی چهارم تا ششم عدد
مفرد	(عددی که) تنها یک رقم غیر صفر در یک مرتبهٔ ارزشی داشته باشد؛ مانند ۵، ۶۰، ۷۰۰، ۸۰۰۰۰
مرکب	(عددی که) بیش از یک رقم غیر صفر داشته باشد مانند ۴۵، ۳۰۲، ۶۸۰
صحاح	(عددی که) در جایگاه اوّل از مواضع سه‌گانهٔ کسر مخلوط قرار می‌گیرد؛ (بخش) غیر کسری یک عدد مخلوط
تضعیف	دو برابر کردن
عشرات	دهگان؛ مرتبهٔ دوم عدد
زاید	اندازهٔ بیشی یک مقدار از مقدار دیگر
فاضل	فاصلهٔ میان دو عدد؛ میزان اختلاف دو عدد
صورت	رقم؛ نشانه‌ای برای عددنویسی
میات/مئات/مآت	صدگان؛ مرتبهٔ سوم عدد

[۱۳](برای آگاهی از تفکیک‌های معنایی و شواهد متنی بیشتر، نک : [۶] ذیل «آحاد»، «الوف»، «تضعیف»، «تنصیف»، «جفت»، «زاید»، «صحاح»، «صورت»، «طاق»، «عشرات»، «فاضل»، «کسر»، «مرکب»، «مفرد» و «میات».)

۵. نتیجه‌گیری

پیوند ادبیات با ریاضیات و بهره‌مندی از شعر به‌عنوان وسیله‌ای کمک‌آموزشی در منابع حساب، پیشینهٔ دیرین دارد. آثاری که در حساب عملی و خصوصاً حساب هوایی نوشته می‌شد به‌سبب آن‌که روشی مبتنی بر حافظه به‌کار می‌گرفت، آکنده از دوبیتی‌ها و اشعار کوتاه و بلندی است که برای آسان‌تر به خاطر سپاردن و یادآوری سریع‌تر سروده شده است. افزون بر حساب عملی، در حساب هندی نیز سابقهٔ به‌کارگیری ابیات فارسی در آموزش حساب در دو دست‌نویس منظوم ۵۳۷۹ و ۶۵۴۵ محفوظ در کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی به یادگار مانده است (شکل‌های ۱۰، ۱۱ و ۱۲ را در پیوست‌ها ببینید). در این دو اثر، قواعد ریاضیات را با بهره‌گیری از فنون ادبی و در قالب شعر و به طریقی متفاوت از شیوهٔ رایج به نوآموزان آموزانده‌اند. شعر، ابزار مناسبی برای آموختن حساب بود، به‌خصوص برای آن دسته از مردم که ریاضیات پیشهٔ اصلی ایشان نبود یا با روش‌های حسابی بیگانه بودند و یادگیری و از بر کردن مراحل اعمال حسابی برایشان مشکل می‌نمود، اما در حرفهٔ خود به حساب نیاز داشتند.

روش شبکه نیز یک شیوه در انجام عمل ضرب و قسمت است که ابیات مربوط بدان در این دو رساله به‌طور مشترک و همانند بیان شده و جایگزین روش‌های ضرب و قسمت مخصوص تخت و تراب است و در ضرب‌های طولانی و چندرقمی کارآمد و راهگشاست. این شیوه مطابق با منابع مکتوب موجود به سدهٔ هفتم هجری قمری تعلق دارد.

مراجع

[۱] *ترجمة الشمسية في الحساب*، نسخهٔ خطی ۵۱۵س کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی.

[۲] *رساله‌ای در ضرب و قسمت*، نسخهٔ خطی ۵۳۷۹ کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی، گ۵۷ر–۶۲ر.

[۳] *منظومه در حساب*، نسخهٔ خطی ۶۵۴۵ کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی، گ۱پ–۱۵پ.

[۴] چ. برنت، *ورود ارقام هندی در زبان‌های عربی، یونانی و لاتینی*، ترجمهٔ فاطمه سادات سعادتمند، میراث علمی اسلام و ایران، ۶ (۱۳۹۶)، ۹۶–۸۴.

[۵] ابوریحان بیرونی، *تحقیق ماللهند من مقوله مقبوله في العقل او مرذوله*، بیروت: ۱۴۰۳ ق./۱۹۸۳ م.

[۶] ف. س. سعادتمند، *واژگان علم حساب در آثار فارسی تا قرن سیزدهم هجری قمری*، پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد تاریخ علم، پژوهشکدهٔ تاریخ علم دانشگاه تهران، ۱۳۹۶.

[۷] ف. س. سعادتمند، *دو ترجمهٔ کهن فارسی از جوامع الحساب بالتخت والتراب: «لباب الحساب في علم التراب» و «جامع الحساب نظامی»*، تاریخ علم، ۱۹ (۱۴۰۰)، شمارهٔ ۲، ۵۰۶–۴۶۵.

[۸] ف. س. سعادتمند، *آثار خواجه نصیرالدین طوسی در حساب هندی و حساب هوایی*، پنجاه و سومین کنفرانس ریاضی ایران، شهریور ۱۴۰۱.

[۹] قاضی صاعد اندلسی، *التعريف بطبقات الأمم*، به‌کوشش لویس شیخو، بیروت: ۱۹۱۲.

[۱۰] الف، قربانی، *نسوی‌نامه: تحقیق در آثار ریاضی علی بن احمد نسوی*، تهران: مؤسسهٔ مطالعات و تحقیقات فرهنگی، ۱۳۷۰.

[۱۱] ج. گورگیس یوسف، *کاکل طاووس*، ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار، تهران: انتشارات علمی و فرهنگی، ۱۳۸۵.

[۱۲] ح. معصومی همدانی، *حساب*، دایرة المعارف بزرگ اسلامی ۲۰، تهران: مرکز دایرة المعارف بزرگ اسلامی، ۱۳۹۱.

[۱۳] نظام‌الدین الاعرج نیشابوری، *الشمسیة في الحساب*، نسخهٔ خطی ۶۰۷۴ کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی.

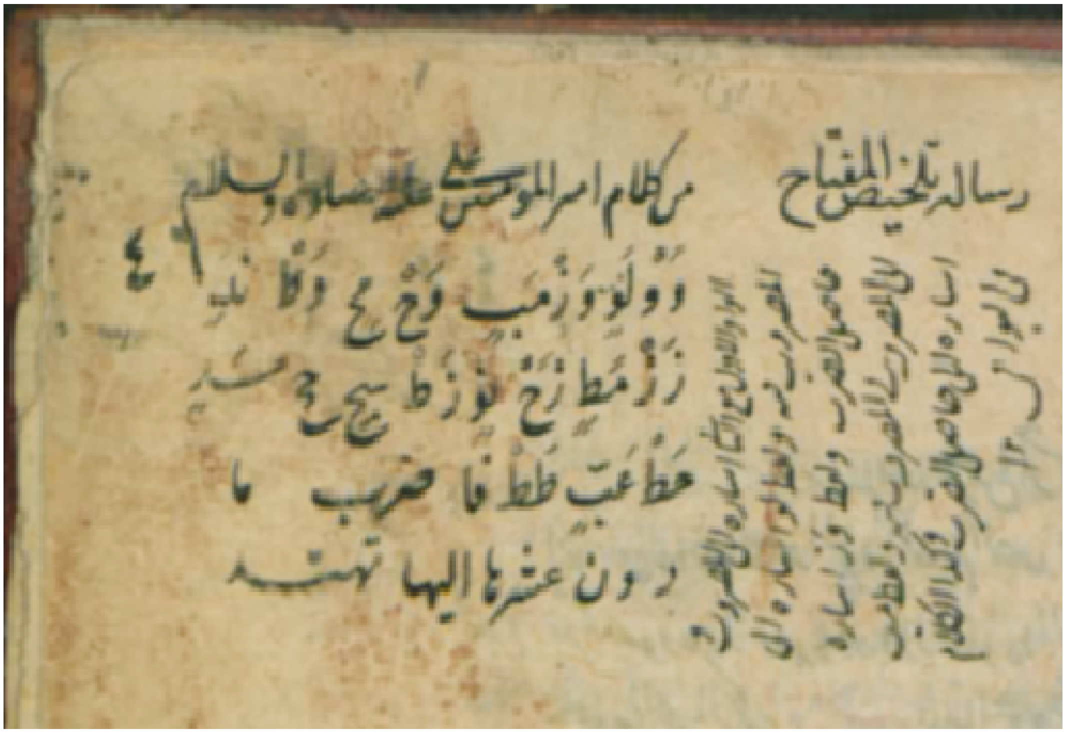
[۱۴] نظام‌الدین الاعرج نیشابوری، *الشمسیة في الحساب*، نسخهٔ خطی ۶۲۴۱ کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی.

[15] B. Carra de Vaux, *Sur l'histoire de l'arithmétique arabe*, Bibliotheca Mathematica, (1899), Issue 2, Vol 13.

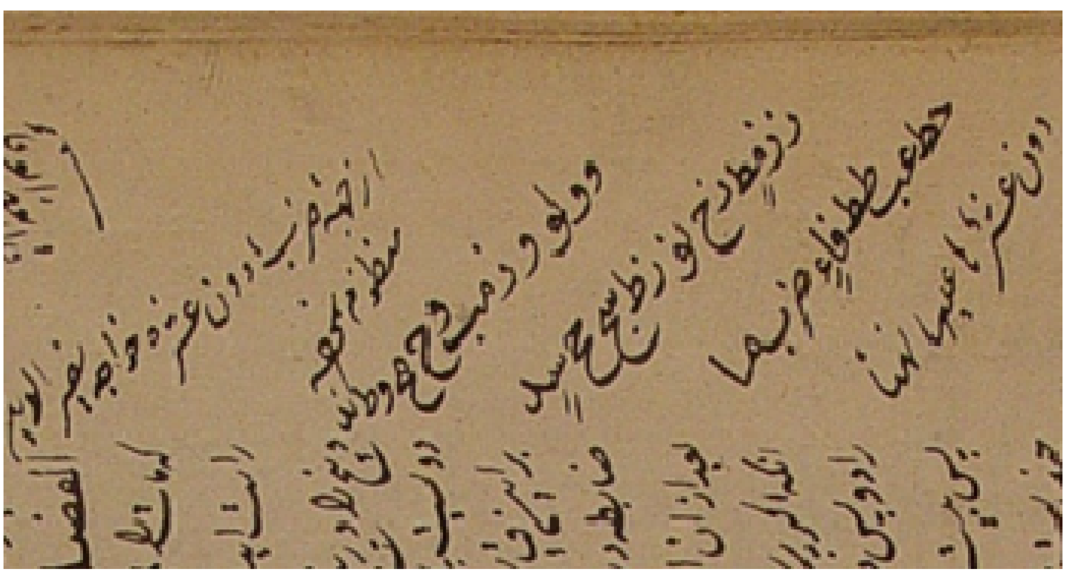
[16] H.W. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, Saunders 1990.

[17] F. Saadatmand, *The Potential of Applying the Middle Ages Mathematical Methods for Elementary Educational Purposes* , in: History of Mathematics and Teaching of Mathematics, Miskolc, Hungary, May 18-21, 2022.

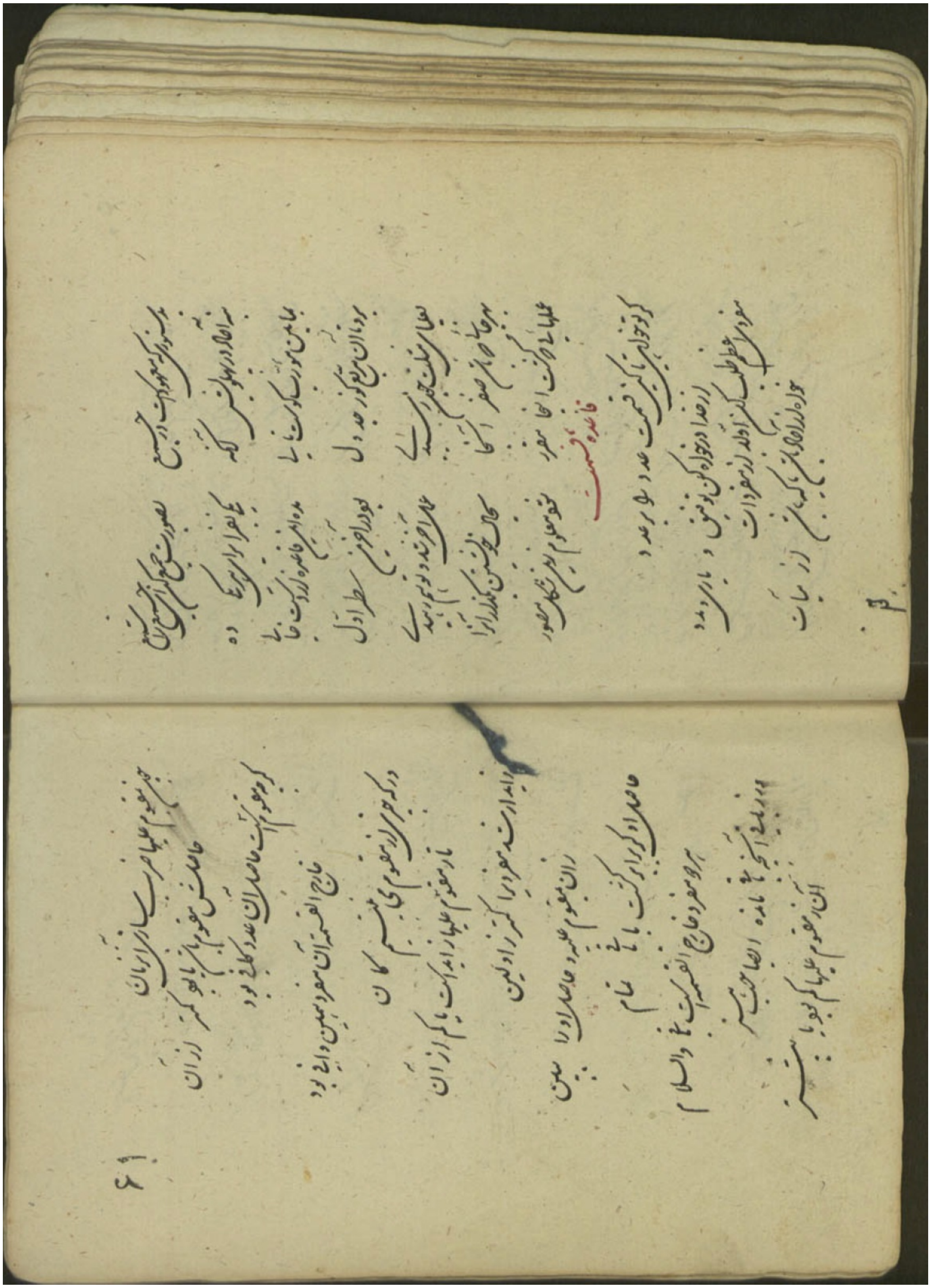
پیوست‌ها



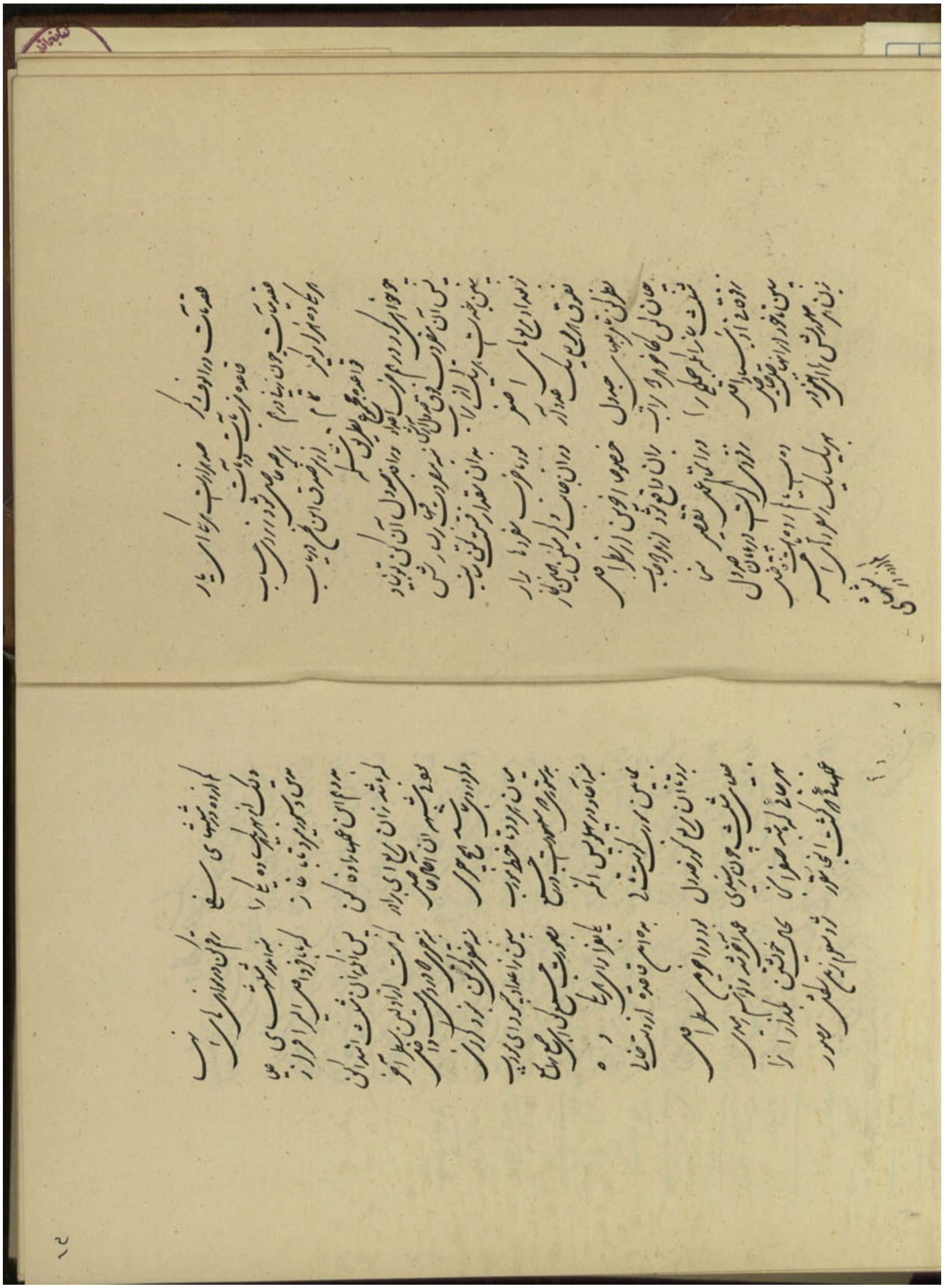
شکل ۸: برگ عنوان کتاب *تلخیص المفتاح*، نسخهٔ خطی ۶۸۲۷ کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی



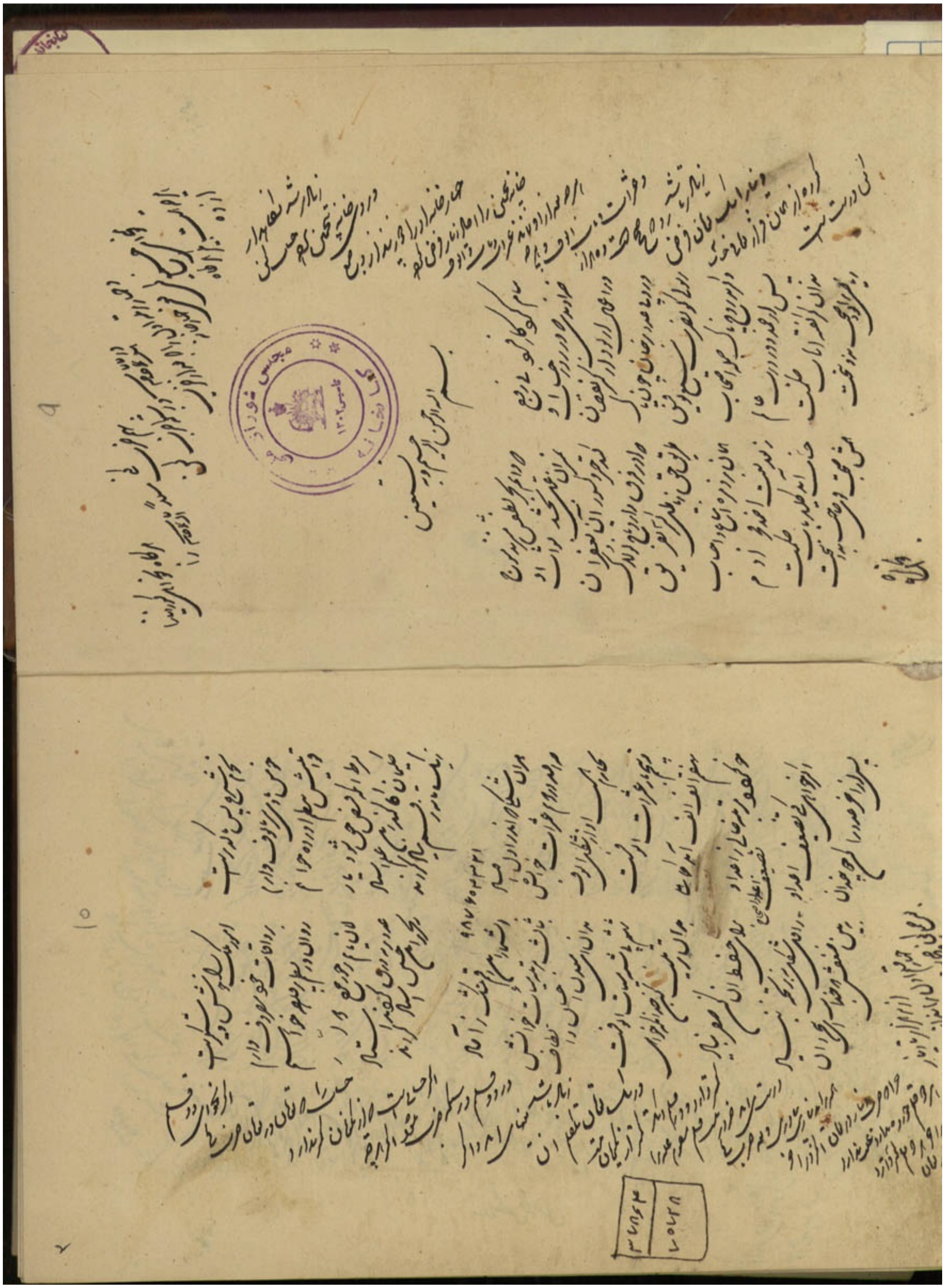
شکل ۹: حاشیهٔ نسخهٔ خطی در ضرب، از مجموعهٔ ۱۱۲۴ مرکز دائرة المعارف بزرگ اسلامی



شکل ۱۰: نسخهٔ خطی شمارهٔ ۵۳۷۹ کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی



شکل ۱۱: ضرب شبکه نسخهٔ خطی شمارهٔ ۶۵۴۵ کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی



شکل ۱۲: آغازهٔ نسخهٔ خطی شمارهٔ ۶۵۴۵ کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی

Towards Mathematical Sciences

Vol. 3, No. 1, Spring and Summer 2023, pp. 44–51

DOI.10.22067/tmsj.2023.43690

Expository Article

به سوی علوم ریاضی

THE EFFICACY OF FLIPPED EDUCATION ON THE ACADEMIC MOTIVATION IN MATH EDUCATION OF THE 11TH GRADE FEMALE STUDENTS OF HAMADAN DURING THE CORONA ERA

MANDANA MOCCARI[1*], AZADEH GHANADIAN[2], AND TAHER LOTFI[3]

[1,3]Department of Mathematics, Hamedan Branch, Islamic Azad University, Hamedan, Iran

[2]Department of Education, District 2, Hagge Forosh Hi School, Hamedan, Iran

Abstract. The present research has been carried out with the aim of investigating the effect of flipped classroom on the academic motivation of 11th grade students during the Corona era. The research method is a semi-experimental type that was implemented in two control and experimental groups. The statistical society was formed by female students at the high school in Hamedan city in the academic year of 1400-1401. The research sample includes two groups of 20 female students of the 11th grade of the school. Thus, first, a school was selected from the schools of Hamedan city, which had a homogeneous enrollment of its students, and then two classes of the school were taken into consideration for testing. One class was designated as the control group and one class as the experimental group. Harter's academic motivation questionnaire was used to test academic motivation. In this research, it was shown that flipped education has been effective in strengthening the academic motivation of students during the Corona era.

2020 Mathematics Subject Classification. 97D10

Keywords. flipped education, academic motivation, students, math course

Date: Rceived 21-11-2022 Revised 10-3-2023 Accepted 12-3-2023 Available Online 3-4-2023

[*]Corresponding author

دوره ۳، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۲، صص. ۴۴–۵۱
DOI. 10.22067/tmsj.2023.43690
مقاله علمی-ترویجی

https://tmsj.um.ac.ir

تاثیر آموزش معکوس برانگیزش تحصیلی درس ریاضی دانش‌آموزان دختر پایه یازدهم شهر همدان در دوران کرونا

ماندانا مکاری[1*]، آزاده قنادیان[2]، و طاهر لطفی[1]

[1]گروه ریاضی، واحد همدان، دانشگاه آزاد اسلامی، همدان، ایران
m_moccari@yahoo.com
lotfitaher@yahoo.com
[2]دبیرستان دخترانه حجه فروش، ناحیه ۲، آموزش و پرورش همدان، همدان، ایران
ghanadianazita@yahoo.com

چکیده. تحقیق حاضر با هدف بررسی تأثیر آموزش به روش معکوس بر انگیزش تحصیلی درس ریاضی دانش‌آموزان پایه یازدهم در دوران کرونا صورت گرفته است. روش پژوهش از نوع نیمه‌آزمایشی است که در دو گروه گواه و آزمایش اجرا شد. جامعه‌آماری را دانش‌آموزان دختر یک دبیرستان دخترانه شهرستان همدان در سال تحصیلی ۱۴۰۱–۱۴۰۰ تشکیل داده است. نمونه پژوهشی شامل دو گروه ۲۰ نفری از دانش‌آموزان دختر پایه یازدهم مدرسه می‌باشد. بدین‌صورت که ابتدا یک مدرسه از مدارس شهر همدان که به صورت همگن دانش‌آموزان آن ثبت‌نام می‌کردند، انتخاب و سپس دو کلاس از مدرسه جهت آزمایش در نظر گرفته شد. یک کلاس به عنوان گروه گواه و یک کلاس به عنوان گروه آزمایش مشخص شد. برای آزمایش انگیزش تحصیلی از پرسش‌نامه انگیزش تحصیلی هارتر استفاده شد. در این تحقیق نشان داده شد که آموزش معکوس بر تقویت انگیزش تحصیلی دانش‌آموزان در دوران کرونا مؤثر بوده است.

2020 Mathematics Subject Classification. 97D10

واژگان کلیدی. آموزش معکوس، انگیزش تحصیلی، دانش‌آموزان، درس ریاضی .
تاریخ: دریافت ۱۴۰۱/۸/۳۰ بازنگری ۱۴۰۱/۱۲/۱۹ پذیرش ۱۴۰۱/۱۲/۲۱ انتشار برخط ۱۴۰۲/۱/۱۴

* نویسنده مسئول

نحوه ارجاع به این مقاله: م.مکاری، ا.قنادیان، ط.لطفی، تاثیر آموزش معکوس برانگیزش تحصیلی درس ریاضی دانش‌آموزان دختر پایه یازدهم شهر همدان در دوران کرونا، به سوی علوم ریاضی، ۳ (۱۴۰۲)، شماره ۱، ۴۴–۵۱.

۱. پیش‌گفتار

متخصصان آموزش همواره برای یافتن روش‌های جدید و اثربخش، تکنیک‌های مختلف را در حیطه آموزش، تحقیق و بررسی می‌کنند. روش‌آموزش معکوس یکی از روش‌های نوین آموزش می‌باشد که از دو بخش اصلی تشکیل شده است: یادگیری تعاملی و ارتباطی داخل کلاس و تعلیم به کمک رایانه در خارج از کلاس [۶]. در دوران کرونا، در آموزش اجباری غیرحضوری، معلمان مجبور به استفاده از روش معکوس برای یادگیری دانش‌آموزان شدند. اغلب کلاس‌های حضوری با تعداد روزهای محدود برگزار می‌شد و معلمین برای استفاده‌ی بهینه از ساعت درسی، فیلم و محتوای آموزشی را از قبل تهیه و در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌دادند. بخصوص معلمین دروس تخصصی از جمله ریاضی به دلیل نیاز به یادگیری عمیق و فهم مطالب، مجبور به تهیه محتواهای آموزشی برحسب نیاز دانش‌آموزان کلاس خود شدند.

در این دوران فرصت تدریس مانند کلاس سنتی که معلم تمام مطالب درسی را در کلاس تدریس کند، نبود. بنابراین جایگاه دانش‌آموز، به عنوان یادگیرنده متصل، درکلاس تغییر یافت و در فرآیند یادگیری، نقش دانش‌آموز به تصمیم‌گیرنده تغییر یافت [۷]. در این تحقیق، تأثیر کلاس معکوس بر انگیزش تحصیلی دانش‌آموزان بررسی شده است. آیا کلاس معکوس بر انگیزش تحصیلی مؤثر بوده است؟ در کلاس معکوس معلم به جای نقش سخنران به عنوان هدایت‌گر، به شکل فردی یا گروهی با دانش‌آموزان تعامل می‌کند و فراهم‌کردن مواد مورد نیاز آموزش به عهده معلم است.

در سال‌های اخیر کلاس معکوس به عنوان روش نوین آموزش مورد استفاده قرار گرفته است [۵]. پژوهشی تحت عنوان بررسی تأثیر به کارگیری روش آموزش معکوس بر یادگیری درسِ کار و فناوری پایه هشتم انجام شد [۴]. این پژوهش نشان می‌دهد که کلاس معکوس مؤثرتر از کلاس سنتی است. همچنین پژوهشی با عنوان تأثیر استفاده از روش کلاس معکوس بر میزان احساس تعلق دانش‌آموزان به مدرسه انجام شده است [۱]. این پژوهش بیانگر آن است که در کلاس معکوس میزان علاقه و مسئولیت‌پذیری دانش‌آموزان نسبت به مسائل مدرسه بیشتر شده است. تحقیقی دیگر نیز تحت عنوان تأثیر رویکرد کلاس معکوس بر یادگیری و انگیزش تحصیلی دروس ریاضی دانش‌آموزان دختر پایه هفتم بهشهر انجام شد [۲]، که نشان داد انگیزه دانش‌آموزان بر یادگیری افزایش یافته است. همچنین تأثیر تدریس با روش معکوس در مقایسه با روش‌های همیاری، کاوش‌گری و سخنرانی بر یادگیری علوم تجربی دانش‌آموزان پایه ششم ابتدایی بررسی شد [۳]. نتایج حاکی از آن بود که بین تأثیر روش معکوس و سایر روش‌ها تفاوت معناداری وجود دارد. این پژوهش کاربرد روش تدریس معکوس را در کنار روش‌های دیگر همچون همیاری و کاوش‌گری برای مباحث مختلف دروس علوم پیشنهاد می‌کند . عده‌ای معتقدند رویکرد مجازی به تدریس در شرایط کرونایی، زمینه فعال‌کردن دانش‌آموز را به عنوان یادگیرندۀ مستقل فراهم کرده است و استفاده از روش معکوس تحت راهنمایی فرد آگاه و با تجربه سبب می‌شود تا یادگیری عمیق‌تری حاصل شود [۱۰]. در این تحقیق تاثیر آموزش معکوس بر انگیزش تحصیلی و یادگیری دانش‌آموزان دختر پایه یازدهم در بازگشایی مدارس بعد از دوران کرونا بررسی شد. سعی شد تاثیر

شرایط کرونایی تا حد امکان با انتخاب گروه‌های همسان کنترل شود. ولی در هر صورت دانش‌آموزان بعد از دوران کرونا و کلاسهای مجازی و امتحان‌های آنلاین، در شرایط ویژه ای قرار داشتند. این شرایط باعث افت تحصیلی دانش‌آموزان در دروس تخصصی، مخصوصا ریاضی، شد. بنابراین، سعی شد از دبیران ریاضی با تجربه و کوشا جهت این تحقیق بهره گرفته شود. یافته‌های تحقیق حاضر نشان می‌دهد که انگیزش تحصیلی، که مهمترین عامل جهت رشد و تلاش دانش‌آموزان است، با استفاده از روش معکوس افزایش یافته است.

۲. روش پژوهش

این تحقیق با استفاده از روش شبه آزمایشی و طرح پیش‌آزمون- پس‌آزمون با دو گروه گواه و آزمایش و نمونه‌گیری در درس انجام شده است. از هر دو گروه دوبار آزمون گرفته شد. اولین آزمون پیش از شروع آزمایش (جهت بررسی میزان معلومات اولیه دانش‌آموزان در مباحث لازم برای یادگیری مشتق) برگزار شد و دومین آزمون پس از تدریس مبحث مشتق به صورت سنتی از گروه گواه در دوران بازگشایی مدارس گرفته شد و همزمان آزمون گروه دوم هم پس از اجرای رویکرد کلاس معکوس برگزار شد. برای هر دو گروه ۵ جلسه کلاس برگزار شد. برای گروه اول به طور سنتی، مباحث مشتق به طور کامل در کلاس تدریس شد . برای گروه دوم فیلم‌های آموزشی تهیه شده توسط معلم روز قبل از کلاس فرستاده می‌شد و دانش‌آموزان فیلم‌ها را در منزل نگاه می‌کردند و در کلاس به حل مثال‌ها و تمرین‌های متنوع مبحث پرداخته می‌شد و از روش‌های تدریس فعال و مشارکتی بهره گرفته می‌شد. جامعه مورد پژوهش همه دانش‌آموزان دختر پایه یازدهم سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰ مدارس دخترانه ناحیه ۲ شهر همدان بوده‌اند. با استفاده از نمونه‌گیری در دسترس، دو کلاس ۲۰ نفری از مدرسه‌ای به نام حجه‌فروش انتخاب شدند. که یک کلاس به عنوان گواه و کلاس دیگر به عنوان آزمایش درنظر گرفته شد، که نمونه‌ها همسان‌سازی نیز شدند.

۱.۲. آزمون یادگیری.

در این آزمون که به صورت محقق‌ساخته بود، مباحث مربوط به تابع، حد و مشتق امتحان گرفته شد. آزمون اول از مباحث مربوط به تابع و حد بود و آزمون دوم که بعد از برگزاری ۵ جلسه آموزش برگزار شد، از مباحث مشتق بود. سؤالات با توجه به اصول سنجش و اندازه‌گیری و همچنین مطابق با اهداف مورد آزمایش طرح شدند و همچنین سؤالات مورد تأیید همکاران ریاضی نیز قرار گرفت. هر آزمون شامل ۱۵ سؤال بود که از راحت به دشوار تنظیم شده بود. سپس به دانش‌آموزان نمره ای بین ۰ تا ۲۰ داده شد.

۲.۲. پرسش‌نامه انگیزش تحصیلی.

با استفاده از پرسش‌نامه انگیزش تحصیلی هارتر، انگیزش تحصیلی این دو گروه نیز بررسی شد. این پرسش‌نامه شامل ۳۳ سؤال است که هارتر با استفاده از مقیاس دوقطبی انگیزش تحصیلی را می‌سنجد. یک قطب آن انگیزش درونی و یک قطب دیگر آن انگیزش بیرونی است. هارتر [۸] ضرایب پایایی پاره مقیاس‌ها را با استفاده از فرمول ۲۰ کودر-ریچاردسون بین 0.054 تا 0.084 و ضرایب بازآزمایی را در یک نمونه طی دوره ۹ ماهه از 0.048 تا 0.063 و در یک نمونه دیگر در مدت ۵ ماه بین 0.058 تا 0.076 گزارش کرده است [۹]. این پرسش‌نامه ثبات درونی مطلوبی دارد. به هر کدام از سؤالات پرسش‌نامه

عدد ۱ تا ۵ بر اساس مقیاس لیکرت نسبت داده می‌شود. سپس امتیازات هر پرسشنامه با هم جمع می‌شود. اگر عدد حاصل ۳۳ و نزدیک به آن باشد یعنی انگیزش تحصیلی در سطح ضعیف قرار دارد. اگر این عدد ۹۹ یا کمتر باشد یعنی انگیزش تحصیلی متوسط است. در ضمن اگر این عدد از ۹۹ تا ۱۶۵ باشد به این معنی است که انگیزه تحصیلی در حد بسیار خوب است.

در پژوهش انجام شده، مجموع امتیازات داده شده هر دانش‌آموز برای هر پرسشنامه محاسبه شد و با نام داده، پرسشنامه مورد بررسی قرار گرفت. همچنین ضرایب پایایی در تحقیق حاضر بر اساس شاخص آلفای کرونباخ 0.689 به‌دست آمد. به دلیل کنترل متغیرهایی نظیر هوش و انگیزش تحصیلی و ساعات مطالعه، سعی شد در حد ممکن گروه‌های انتخاب‌شده در یک سطح باشند. از طرفی با انتخاب مدرسه، متغیرهایی از نوع مدرسه، جنسیت و پایه تحصیلی کنترل شد. همچنین با کنترل کلاس‌های مدرسه انتخاب‌شده، دانش‌آموزان منتخب از نظر سطح سواد و سطح فرهنگی و اجتماعی و مالی تقریباً همگن بودند و همه دانش‌آموزان ترغیب شدند که با دقت به همه سوالات پاسخ دهند.

۳. یافته‌های پژوهش

جدول ۱ در زیر، به ترتیب میانگین و انحراف معیار پیش‌آزمون و پس‌آزمون و مجموع امتیازات پرسش‌نامه در گروه آزمایش و گواه را نشان می‌دهد.

جدول ۱: توزیع میانگین، انحراف معیار نمرات پیش‌آزمون و پس‌آزمون و مجموعه نمره‌ها به تفکیک دو گروه آزمایش و گواه

آزمایش	شاخص	آزمایش	گواه
پیش‌آزمون	میانگین	15.86	14.4
	انحراف معیار	3.53	3.96
پس آزمون	میانگین	16.38	14.51
	انحراف معیار	3.32	5.22
انگیزش تحصیلی	میانگین	106.65	102.4
	انحراف معیار	7.8	12.74

نسبت نرمال‌بودن برای نمرات پیش‌آزمون و پس‌آزمون و مجموع نمرات پیش‌آزمون برای دو گروه گواه و آزمایش انجام شد. سطح معنی‌داری آزمون کلموگرف اسمیرنوف، در جدول ۲ به تفکیک آورده شده است.

طبق جدول شماره ۲ سطح معنی‌داری پیش‌آزمون برای گروه آزمایش از 0.05 بیشتر است، ولی برای گروه گواه کمتر است. پس نمرات گروه آزمایش نرمال و گروه گواه غیر نرمال است. پس برای مقایسه میانگین دو گروه گواه و آزمایش برای نمرات پیش‌آزمون، از آزمون ناپارامتری من–ویتنی استفاده می‌کنیم. متغیر وابسته

جدول ۲: سطح معنی داری داده‌های مربوط به آزمون‌ها و پرسشنامه

آزمون	سطح معنی‌داری گروه آزمایش	سطح معنی‌داری گروه گواه
پیش‌آزمون	0.194	0.009
پس آزمون	0.002	0.004
انگیزش تحصیلی	0.200	0.200

ما از نوع کمی است و از دو گروه مستقل (گواه و آزمایش) تشکیل شده است. چون تعداد داده‌ها از ۱۰ تا بیشتر است، از سطح معنی‌داری مجانبی استفاده می‌کنیم که برابر 0.194 است و از 0.05 بزرگتر است که تفاوت معناداری در میانگین‌ها نیست. پس دوگروه آزمون و گواه در نمره پیش‌آزمون تفاوت معناداری از لحاظ میانگین نمرات ندارند. اما سطح معنی‌داری پس‌آزمون برای هر دو گروه آزمایش و گواه کمتر از 0.05 است، که نتیجه می‌دهد داده‌ها نرمال نیستند. پس برای مقایسه میانگین نمرات پس‌آزمون نیز از آزمون ناپارامتری من–ویتنی استفاده شده است. سطح معنی‌داری مجانبی برای آن 0.266 به‌دست آمد که از 0.05 بیشتر است. پس تفاوت معناداری بین میانگین نمرات پس آزمون گروه گواه و آزمایش وجود ندارد.

در ادامه نمرات پیش‌آزمون و پس‌آزمون در گروه آزمایش، با استفاده از آزمون ویلکاکسون مقایسه شد. این یک آزمون ناپارامتری است و به خاطر نرمال نبودن نمرات پس آزمون انتخاب شد. مقدار معنی‌داری دقیق دوطرفه برای آن 0.470 به‌دست آمد، که نشان‌دهنده این است که تفاوت معنادار بین میانگین‌ها وجود ندارد. اما از آنجا که ویلکاکسون یک آزمون رتبه علامتدار است و تعداد رتبه‌های مثبت عدد ۱۲ را نشان می‌دهد، پس تعداد ۱۲ نمره در پس‌آزمون افزایش داشته‌اند. همین مقایسه را برای نمرات گروه گواه انجام دادیم. مقدار معنی‌داری دقیق دو طرفه 0.211 به‌دست آمد. اما تعداد رتبه‌های مثبت در آن ۱۰ بود.

لازم به ذکر است که داده‌های پرسش‌نامه به علت سطح معنی‌داری بیشتر از 0.05، در هر دو گروه نرمال بودند. در واقع، برای داده‌های مربوط به پرسشنامه نرمال‌بودن امتیازهای گروه گواه و آزمایش سنجیده شد و هرکدام به طور جداگانه نرمال بودند و سطح معنی‌داری 0.2 با استفاده از آزمون کلموگروف اسمیرنوف برای هر دو گروه به‌دست آمد.

در ادامه، از آزمون t تک نمونه‌ای استفاده شد و میانگین امتیازات کسب شده هر گروه با عدد ۹۹ سنجیده شد و سطح معنی‌داری برای گروه گواه، عدد 0.247 به‌دست آمد که نشان‌دهنده این است که میانگین امتیازات کسب شده با عدد ۹۹ اختلاف معنی‌داری ندارد و انگیزش تحصیلی آنها در حد متوسط است. اما برای گروه آزمایش، سطح معنی‌داری 0.00 به‌دست آمد که نشان‌دهنده این است که اختلاف معنی‌داری با عدد ۹۹ وجود دارد. همچنین حد بالا و پایین فاصله اطمینان مثبت بود، که در نتیجه انگیزش تحصیلی این گروه در حد بسیار خوب است و نشان‌دهنده تأثیر آموزش معکوس بر انگیزش تحصیلی دانش‌آموزان گروه آزمایش است.

۴. نتیجه‌گیري و پیشنهادات آتی

در دوران کرونا به‌کارگیری فناوری اطلاعات و ارتباطات در نظام آموزش جایگاه ویژه‌ای به‌دست آورد. استفاده از رویکرد تلفیقی جزء لاینفک آموزش شد. در چنین فضایی استفاده از روش‌های تدریس نوین می‌توانست نبود زمان کافی تدریس حضوری را جبران کند.

انگیزه تحصیلی شامل فعالیت‌هایی می‌شود که باعث ایجاد حس پیشرفت و یادگیری فعال می‌شود. در آموزش سنتی معلم از کلاس درس جهت تدریس محتوای آموزشی استفاده می‌کند. اما در دوران کرونا این فرصت کمتر شد و در چنین وضعیتی، روش‌های نوین تدریس همچون آموزش معکوس می‌تواند این کمبود را تاحدودی جبران کند. معلم درس را که به صورت سخنرانی‌های آموزشی ضبط شده است به بیرون کلاس درس منتقل می‌کند. دانش‌آموزان می‌توانند مطالب را مطالعه کرده و بارها و بارها تدریس معلم را تماشا کنند و کنترل یادگیری به‌دست دانش‌آموز می‌افتد.

تحلیل حاضر به دلیل شرایط کرونایی دارای محدودیت‌هایی بود، که از جمله می‌توان به دسترسی‌نداشتن به دانش‌آموزان به صورت مداوم و مستمر در مدرسه و بیماری و نگرانی‌های حاصل از آن، نام برد. پیشنهاد می‌شود در پژوهش‌های بعدی تاثیر شرایط کرونایی از جمله اضطراب، بر کسب نمرات دانش‌آموزان بررسی شود. همچنین وجود امتحانات مجازی در شرایط ویژه و تاثیر آن بر امتحانات حضوری بعد از آن بررسی شود. اما در هر حال، یافته‌های موجود می‌تواند اطلاعات مهمی را برای پژوهشگران تعلیم و تربیت برای دوران پساکرونا داشته باشد، به گونه‌ای که چه در دوران بیماری و چه پس از آن بتوان از کیفیت و تأثیر روش های نوین آموزش بر دانش‌آموزان بهره برد. از جمله آموزش درس ریاضی که سختی فراوانی برای معلمان ریاضی و دانش‌آموزان در این دوران داشت. با استفاده از روش‌آموزش معکوس می‌توان شور و هیجان و انگیزه و علاقه را در دانش‌آموزان تقویت کرد که بر یادگیری دانش‌آموزان تاثیر گذار است.

مراجع

[۱] م. اسماعیلی فر، م. تقوایی یزدی و ک. نیازآذری، *تاثیر رویکرد کلاس معکوس بر احساس تعلق به مدرسه دانش‌آموزان دوره ابتدایی*، کنفرانس ملی مطالعات هنر و پژوهش های علوم انسانی، تهران، ۱۳۹۴.

[۲] ر. و. س. فاضل اشرفی، ف. صفری، *تاثیر رویکرد کلاس معکوس بر یادگیری و انگیزش درس ریاضی دانش‌آموزان دختر پایه هفتم شهر بهشهر*، دومین کنفرانس ملی رویکردهای نوین در آموزش و پژوهش، محمودآباد، ۱۳۹۶.

[۳] آ. احمدآبادی، ح. زین آبادی، م. استادرحیمی، *تاثیر تدریس با روش های معکوس، همیاری، کاوشگری و سخنرانی بر یادگیری علوم تجربی دانش-آموزان پایه ی ششم ابتدایی*، نشریه پژوهش در تربیت معلم، (۱۴۰۰)، ۹–۲۸.

[۴] س. مبصرملکی، ح. رستگارپور و م. کیان، *کاربرد و اثر روش آموزش معکوس بر یادگیری فعالیت های عملی درس کار و فناوری*، اولین کنگره علمی پژوهشی سراسری توسعه و ترویج علوم تربیتی و روانشناسی، جامعه شناسی و علوم فرهنگی اجتماعی ایران، تهران، ۱۳۹۴.

[5] J. Bergmann, A. Sams, *Flip your classroom: Reach every student in every class every day*, International Society for Technology in Education, Washington DC, 2012.

[6] B.J. Biggs, C. Tang, *Teaching for quality learning at university*, McGraw-Hill Education, 4th Ed. Maidenhead, 2011.

[7] S. Borg, *Teacher cognition in language teaching: A review of research on what language teachers think, know, believe and do*, Language Teaching, **36** (2003), no. 2, 81–-109.

[8] S. Harter, *A new self-report scale of intrinsic versus extrinsic orientation in the classroom: Motivational and informational components*, Developmental Psychology, **17** (1981), no. 3, 300–-312.

[9] G.F. Kuder, M.W. Richardson, *The theory of the estimation of test reliability*, Psychometrika, **2** (1973), no. 3, 151–160.

[10] J. Leigh, et al., *Redefining undergraduate nurse teaching during the coronavirus pandemic: use of digital technologies*, British J. Nursing **29** (2020), no. 10, 566–569.

Towards Mathematical Sciences

Vol. 3, No. 1, Spring and Summer 2023, pp. 52–61

DOI.10.22067/tmsj.2023.83518.1045

Expository Article

https://tmsj.um.ac.ir

SYMMETRY AND MATHEMATICS

FARIBA NOOHI[1]

[1]Department of Computer, Alzahra Technical Training Institute, Mashhad
fnoohi@tvu.ac.ir , f.noohi@gmail.com

Abstract. The observation of symmetry and its failure in the early worldview begins with nature and art, and then it is defined as a basic structure in mathematics. In this article, after a short talk about symmetry, we will discuss its application in finding the roots of quadratic equations and see how much more difficult the lack of symmetry makes solving quadratic equations.

2020 Mathematics Subject Classification. 00A05, 97I10
Keywords. function, solve the equation, symmetry, Polynomial,
Date: Rceived 22-7-2023 Revised 12-8-2023 Accepted 17-9-2023 Available Online 18-9-2023

دوره ۳، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۲، صص. ۵۲–۶۱
DOI. 10.22067/tmsj.2023.83518.1045
مقاله علمی-ترویجی

تقارن و کاربرد آن در حل معادلات

فریبا نوحی[۱]

[۱]گروه کامپیوتر، آموزشکده فنی و حرفه ای الزهرا، دانشگاه فنی و حرفه ای خراسان رضوی
مشهد، ایران

fnoohi@tvu.ac.ir , f.noohi@gmail.com

چکیده. مشاهده تقارن و شکست آن در جهان‌بینی اولیه از طبیعت و هنر شروع می‌شود و پس از آن است که به عنوان ساختارهای اساسی در ریاضیات تعریف می‌شود. در این مقاله پس از گفتاری کوتاه درباب تقارن به کاربردی از آن در یافتن ریشه‌های معادلات درجه دو می پردازیم و مشاهده می‌کنیم که عدم وجود تقارن حل معادلات درجه سه را تا چه حد دشوارتر می‌کند.

۱. پیش‌گفتار

جستجوی الگوها و قاعده مندی‌ها همیشه برای انسان مهم بوده ونتایج آن نیز همواره برای درک پیچیدگی‌های جهان به ما کمک کرده است. در تاریخ علم و فرهنگ، تقارن‌ها به عنوان الگوی نظم مورد استفاده قرار گرفته‌اند. تقارن در فرهنگ‌ها و مذاهب گوناگون جذابیت دارد و نشان دهنده هماهنگی و کمال است. در دوران باستان، دانش، هنر و طبیعت بر اساس نظم تقارنی مشترکی فهمیده می‌شد، اما در دوران معاصر این وحدت علوم طبیعی و انسانی از هم می‌پاشد. در هنر، تقارن‌ها و محاسبات تقارنی به قضاوت‌های ذهنی و ذوقی مربوط می‌شود. در حالی که در ریاضیات و علوم طبیعی، تقارن و عدم تقارن اصول اساسی توصیف طبیعت باقی می‌مانند، که کاربرد آن از شکل‌گیری ماده اولیه تا تکامل حیات را شامل می‌شود. در واقع، اکتشافات و قوانین

2020 Mathematics Subject Classification. 00A05, 97I10

واژگان کلیدی. تابع، حل معادله، تقارن، چندجمله‌ای.
تاریخ: دریافت ۱۴۰۲/۴/۳۱ بازنگری ۱۴۰۲/۵/۲۱ پذیرش ۱۴۰۲/۶/۲۶ انتشار برخط ۱۴۰۲/۶/۲۷

نحوه ارجاع به این مقاله: ف.نوحی، تقارن و کاربرد آن در حل معادلات ، به سوی علوم ریاضی، ۳ (۱۴۰۲)، شماره ۱، ۵۲–۶۱.

کنونی در کیهان شناسی، فیزیک، شیمی و زیست شناسی با تقارن و عدم تقارن در ارتباط هستند. بر اساس نظریه‌های علمی شکستن تقارن کلید تنوع، پیچیدگی و ساختارهای جدید در طبیعت، از فیزیک و شیمی تا زیست شناسی است. بدون شکستن تقارن، جهان ثابت و بدون تغییر باقی می‌ماند. ساختارهای ریاضی این ارتباطات میان‌رشته‌ای را در طبیعت و هنر آشکار می‌کند [۱، ۲، ۴].

در ریاضیات قدیم، تقارن به اندازه‌های یکسان یا هماهنگی در برش‌های شکل‌ها در هنر، معماری و یا کیهان اشاره داشت. به عبارتی، وجود برش‌هایی در شکل‌ها که قابل انطباق هستند. بازتاب، چرخش و تناوب نمونه‌هایی از ویژگی‌های تقارنی هستند.

از سوی دیگر، وجود تقارن در شکل‌های هندسی و نمودارها می تواند به حل مسائل ریاضی کمک کند. در بخش بعد نمونه ای از این مورد را مشاهده می‌کنیم. این بخش برگرفته از [۳] است.

۲. تقارن حل معادلات ریاضی را آسان می کند

حل معادلات یک مهارت اصلی در کلاس ریاضی است. یکی از اساسی ترین معادلاتی که حل آن را یاد می‌گیریم معادله $f(x) = 0$ است که در آن f یک تابع تعریف شده روی مجموعه‌ای از اعداد است که مقادیر آن نیز عددی است. این معادله در واقع دنبال این است که کدام ورودی x خروجی 0 را به‌دست می‌دهد. به همین دلیل، گاهی اوقات جواب‌های این معادله را "صفر" یا "ریشه" تابع می‌نامند. در بین تمام معادلات، شاید معادله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{۱.۲}$$

اولین برخورد جدی دانش آموزان با معادلاتی باشد که راه حل بدیهی و ساده‌ای ندارند. فرمول

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

به دانش‌آموزان جبر کمک کرده است تا حل معادله درجه دوم (۱.۲) را به‌راحتی به خاطر بسپارند. شاید وقتی دانش آموز برای بار اول با این فرمول روبه‌رو شود برایش دلهره آور باشد ولی در عین ابهت و عظمت، یک راز ساده در آن پنهان است که حل هر معادله درجه دوم را آسان می‌کند: تقارن. حال ببینیم که تقارن چه تاثیری در فرمول حل معادله درجه دوم دارد و چگونه عدم تقارن، حل معادلات درجه سوم به شکل

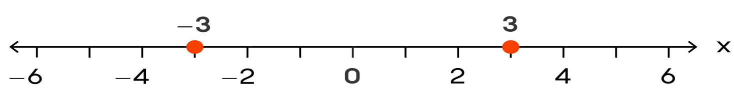
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

را بسیار بسیار دشوارتر می کند. در واقع آنقدر سخت‌تر که تعدادی از ریاضی‌دانان، در سده ۱۵۰۰، زندگی خود را در رقابتی تلخ برای حل معادلات درجه سوم سپری کردند، چیزی که برای معادلات درجه دوم به راحتی اتفاق می‌افتاد.

قبل از اینکه ریشه یک تابع درجه دوم را پیدا کنیم، با یک تابع آسان شروع می کنیم: ریشه‌های تابع $f(x) = x^2 - 9$ چیست؟ برای پیدا کردن آنها کافیست معادله $f(x) = 0$ را حل کنیم.

$$f(x) = 0 \Longrightarrow$$
$$x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow$$
$$x^2 = 9 \Longrightarrow$$
$$x = \pm 3.$$

یافتن این ریشه‌ها آسان است زیرا حل این معادله آسان است. تنها کاری که باید انجام دهیم این است که مقدار x را پیدا کنیم. توجه داشته باشید که ما به آن $\pm$ در خط آخر نیاز داریم، زیرا هر دوعدد مثبت و منفی 3 این ویژگی را دارند که وقتی آنها را به توان 2 می‌رسانیم، حاصل 9 است. یک بررسی سریع $f(3) = f(-3) = 0$ را تأیید می کند. در واقع، اینها ورودی‌هایی هستند که خروجی تابع $f(x)$ را صفر می کنند. این $\pm$ همچنین به تقارن ذاتی در این معادله اشاره میکند. این تابع درجه دوم دو ریشه دارد و اگر دو ریشه را روی یک محور عددی در نظر بگیریم، می‌بینیم که آنها نسبت به نقطه $x = 0$ متقارن هستند. از آن جایی که نمودار یک تابع



شکل ۱: تقارن ریشه‌ها در چند جمله‌ای درجه دو

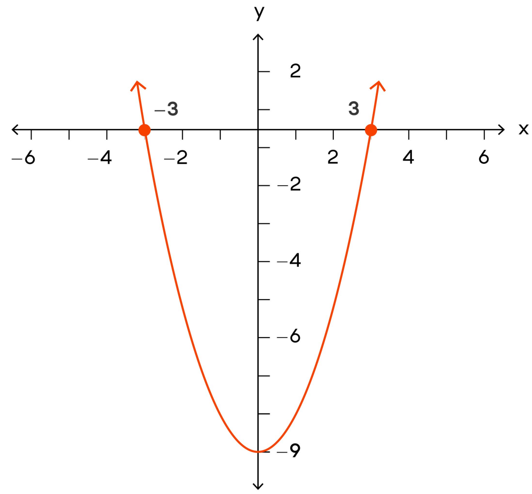
درجه دوم یک سهمی است، این بسیار منطقی به نظر می رسد زیرا هر سهمی دارای یک محور تقارن است که آن را به دو نیمه آینه‌ای تقسیم می کند. در مورد $f(x) = x^2 - 9$ محور تقارن، محور y یا همان خط $x = 0$ است. هنگامی که نمودار $f(x) = x^2 - 9$ را به روش معمول رسم می کنیم، می توانیم ریشه‌های معادله را روی محور x ببینیم که از محور y به یک فاصله هستند. شکل ۲ را ببینید.

برای یک معادله ی درجه دوم پیچیده‌تر مانند

$$f(x) = x^2 - 8x - 9$$

یافتن ریشه‌ها به اندکی تلاش بیشتر نیاز دارد.

$$f(x) = 0 \Longrightarrow$$
$$x^2 - 8x - 9 = 0 \Longrightarrow$$
$$x^2 - 8x = 9.$$



شکل ۲: تقارن ریشه‌ها نسبت به محور y

در این جا نیزمی‌توانیم $f(x)$ را برابر با صفر قرار داده و 9 را به سمت راست معادله ببریم، اما نمی‌توانیم با گرفتن جذر دو طرف معادله x را پیدا کنیم. زیرا وجود یک x دیگر در سمت چپ عبارت مانع می‌شود. اما نمودار این تابع نیز مانند هر چند جمله‌ای درجه دوم، متقارن است و ما می‌توانیم از این تقارن برای مدیریت مساله استفاده کنیم. فقط به کمی محاسبات جبری نیاز داریم تا تقارن را شفاف‌تر ببینیم. بیایید تابع $f(x) = x^2 - 8x - 9$ را به صورت $f(x) = x(x-8) - 9$ بازنویسی کنیم. اکنون روی قسمت $x(x-8)$ تمرکز می کنیم. این عبارت در دو موقعیت برابر با صفر خواهد بود، وقتی $x = 0$ و یا $x = 8$. این تضمین می کند که $f(0)$ و $f(8)$ منجر به نتیجه ی -9 خواهد شد. این به ما دو نقطه متقارن در سهمی می‌دهد، و از آنجایی که محور تقارن باید فاصله $x = 0$ و $x = 8$ را از وسط تقسیم کند، این محور باید خط $x = 4$ باشد. اکنون که تقارن پیدا را کردیم، وقت آن است که از آن استفاده کنیم. سهمی را چهار واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا محور تقارن آن از خط $x = 4$ به خط $x = 0$ حرکت کند. به بیان جبری، هر x را با $x + 4$ جایگزین می‌کنیم. بیایید تابع درجه دوم جدید حاصل از جایگزینی x با $x+4$ را g بنامیم، به عبارت دیگر $g(x) = f(x+4)$.
حال بیایید ببینیم وقتی $g(x)$ را ساده می کنیم چه اتفاقی می افتد:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x+4) \\ &= (x+4)^2 - 8(x+4) - 9 \\ &= x^2 - 25. \end{aligned}$$

پس از این مراحل همه عبارت‌های حاوی x به‌جز جمله درجه دوم آن ناپدید شدند و این امر یافتن ریشه‌های g را آسان می‌کند.

$$\begin{aligned} x^2 \ - \ 25 \ = \ 0 \Longrightarrow \\ x^2 \ = \ 25 \Longrightarrow \\ x \ = \ \pm 5. \end{aligned}$$

بنابراین، ریشه‌های $g(x)$ مقادیر $x = \pm 5$ هستند، یعنی برای یافتن ریشه‌های $f(x) \ = \ x^2 - 8x - 9$ کافی است ریشه‌های g را چهار واحد به سمت راست انتقال دهیم. ریشه‌های f، مقادیر 5 ± 4 یا همان 9 و -1 هستند که با $f(-1) = f(9) = 0$ تایید می‌شوند.

حل این معادله درجه دوم کمی سخت تربود، به این معنی که آن را اندکی لغزاندیم و با حذف عبارت مزاحم x ، آن را به یک معادله درجه دوم ساده‌تر تبدیل کردیم. این رویکرد روی هر تابع درجه دوم کار خواهد کرد. با توجه به شکل کلی یک چند جمله‌ای درجه دوم دلخواه $f(x) \ = \ ax^2 + bx + c$ همیشه می‌توانیم محور تقارن آن را با اندکی محاسبه پیدا کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) \ &= \ ax^2 + bx + c \\ &= x(ax \ + \ b) \ + c. \end{aligned}$$

در این فرم می‌بینیم که $f(0) \ = \ f(\ -\frac{b}{a}) \ = c$ ،یعنی محور تقارن در نیمه راه بین $x \ = \ 0$ و $x \ = -\frac{b}{a}$ است. به عبارت دیگر، محور تقارن هر چند جمله‌ای درجه دوم $f(x) \ = \ ax^2 + bx + c$ خط $x \ = -\frac{b}{2a}$ است. این خیلی آشنا به‌نظر می رسد. این عبارت در فرمول جواب معادله درجه دو پنهان شده است:

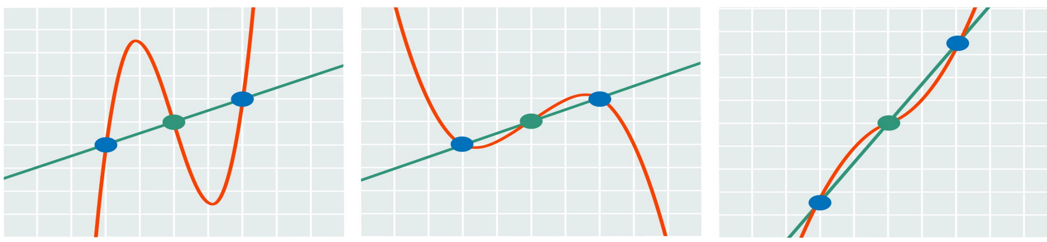
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

اگر این فرمول را به شکل زیر بازنویسی کنیم، دیدن آن آسان‌تر است:

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

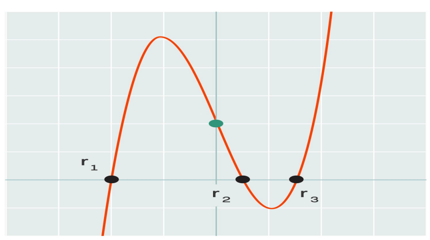
فرمول جواب معادله درجه دوم بر این واقعیت متکی است که ریشه‌های معادله ی $f(x) \ = \ ax^2 + bx + c$ نسبت به خط $x = \frac{-b}{2a}$ متقارن هستند و همانطور که در بالا انجام دادیم، می‌توان از این تقارن برای یافتن آنها استفاده کرد: فقط $f(x)$ را به اندازه $x = -\frac{b}{2a}$ انتقال می‌دهیم. این کار باعث حذف جمله ضریب x می‌شود که به ما این امکان را می‌دهد تا به راحتی معادله را حل کنیم. با انجام این کار، به فرمول معادله درجه دوم می‌رسیم.

حل معادلات درجه دوم با استفاده از قدرت تقارن ممکن است ما را تشویق کند تا یک تاکتیک مشابه را در حل معادلات درجه سوم امتحان کنیم. اما در حالی که چند جمله‌ای‌های درجه سه هم دارای تقارن هستند، تقارن آن‌ها از نوعی نیست که به حل معادلاتی مانند $f(x) = 0$ کمک کند. نمودارهای درجه سه ”تقارن نقطه‌ای“ دارند، به این معنی که یک نقطه خاص روی نمودار هر تابع چند جمله‌ای درجه سه وجود دارد که اگر خطی از آن نقطه عبور کند که نمودار را در جای دیگری قطع کرده باشد، در ادامه دوباره نمودار را در نقطه‌ای متقارن نسبت به آن نقطه قطع خواهد کرد، شکل ۳ راببینید. این یک نوع قوی از تقارن است، اما به یافتن ریشه



شکل ۳: تقارن نقطه‌ای در نمودار چندجمله‌ای درجه سه

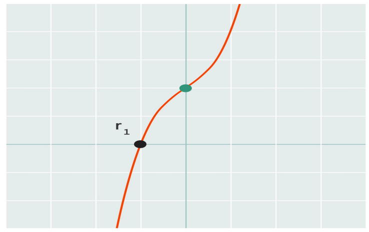
کمک نمی‌کند. دلیل آن این است که ریشه‌های یک تابع درجه سوم در جایی قرار دارند که نمودار تابع از خط افقی $y = 0$ یعنی محور x عبور می‌کند و به طور کلی، این نقاط عبور نسبت به نقطه تقارن منحنی درجه سه متقارن نیستند (شکل ۴) نقطه سبز رنگ نقطه تقارن منحنی است که در واقع همان نقطه عطف خم است. در



شکل ۴: عدم تقارن ریشه‌های چندجمله‌ای درجه سه نسبت به نقطه تقارن منحنی

واقع، یک معادله درجه سوم ممکن است فقط یک ریشه داشته باشد و در این حالت تقارنی وجود ندارد، شکل ۵ را ملاحظه کنید. با این حال، قسمتی از کار قبلی ما با درجه دوم ها وجود دارد که می‌تواند کمک کننده باشد. تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ را درنظر می گیریم. اگر ریشه‌های آن r_1 و r_2باشند، آنگاه می توانیم $f(x)$را به این صورت بنویسیم:

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2). \tag{۲.۲}$$



شکل ۵: چندجمله‌ای درجه سه با یک ریشه

وقتی این ضرب را انجام دهیم و عبارت را ساده کنیم، به نتیجه مفیدی خواهیم رسید.

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x^2 - xr_2 - r_1x + r_1r_2) \\ &= a(x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2) \\ &= ax^2 - a(r_1 + r_2)x + ar_1r_2. \end{aligned}$$

می بینم که چگونه ضریب جمله x شامل مجموع دو ریشهr_1 و r_2 می‌شود. این مربوط به یکی از فرمول‌های Vieta است.

با در نظر گرفتن تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$، مجموع دو ریشه همیشه $-\frac{b}{a}$ خواهد بود. این مساله را می‌توان با برابر قرار دادن فرم کلی معادله درجه دوم با (۲.۲) بررسی کرد:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(r_1 + r_2)x + ar_1r_2.$$

باید به خاطر داشته باشیم که تنها وقتی دو چند جمله‌ای برابرند که ضرایب جملات متناظر آنها یکسان باشد. در این حالت، این بدان معناست که ضرایب جمله‌های متناظر x در دو طرف معادله باید برابر باشند. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم:

$$b = -a(r_1 + r_2)$$

و یا

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}.$$

توجه کنید که تقسیم دو طرف این معادله بر 2 یک واقعیت جالب را نشان می‌دهد، و آن این است که میانگین دو ریشه تابع درجه دوم برابر با فاصله محور تقارن از مبدأ است:

$$\frac{r_1 + r_2}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

این منطقی است، زیرا محور تقارن باید در وسط دو ریشه باشد و میانگین هر دو عدد دقیقاً در وسط آنها است. حال این رابطه جدید را درحوزه بحث قبل در نظر بگیرید. انتقال سهمی با حرکت دادن محور تقارن از

$x = -\frac{b}{2a}$ به $x = 0$ میانگین دو ریشه را نیزاز $\frac{b}{2a}$ به 0 تغییر می‌دهد. اما اگر میانگین ریشه‌ها 0 باشد، مجموع ریشه‌ها نیز باید 0 باشد و از طرفی مجموع دو ریشه به صورت فاکتور در معادله درجه دوم ظاهر می‌شود:

$$f(x) \;=\; ax^2 \;-\; a(r_1 + r_2)x \;+\; ar_1r_2.$$

این بدان معنی است که اگر تابع چند جمله‌ای درجه دوم را به نحوی تبدیل کنیم تا مجموع ریشه‌ها 0 شود، جمله x نیز ناپدید می‌شود و این همان چیزی است که به ما کمک کرد معادله درجه دوم قبلی خود را حل کنیم. نتیجه تقریبا مشابهی در مورد ریشه‌های توابع درجه سوم وجود دارد.

با در نظر گرفتن شکل کلی یک معادله درجه سوم $f(x) \;=\; ax^3 +\; bx^2 + cx + d$ می‌توانیم همان کاری را که با معادله درجه دو انجام دادیم تکرار کنیم. اگرمعادله ی درجه سه دارای ریشه‌های r_1، r_2 ، و r_3 باشد، می‌توانیم تابع درجه سوم را به شکل زیر تبدیل کنیم.

$$\begin{aligned} f(x) \;&=\; a(x \;-\; r_1)(x \;-\; r_2)(x \;-\; r_3) \\ &=\; ax^3 \;-\; a(r_1 + r_2 \;+\; r_3)x^2 \;+\; a(r_1r_2 \;+\; r_1r_3 \;+\; r_2r_3)x \;-\; ar_1r_2r_3. \end{aligned} \tag{۳.۲}$$

اگر این مقدار را برابر فرم کلی معادله، یعنی $f(x) \;=\; ax^3 +\; bx^2 + cx + d$ قرار دهیم، ضرایب متناظر باید برابر باشند و در نهایت برای محاسبه مجموع ریشه به فرمول ویتا برای مجموع ریشه‌های یک معادله درجه سه می‌رسیم:

$$r_1 \;+\; r_2 +\; r_3 \;=\; -\,\frac{b}{a}$$

توجه کنید که می‌توانیم هر دو طرف معادله را بر 3 تقسیم کنیم:

$$\frac{r_1 \;+\; r_2 +\; r_3}{3} \;=\; -\,\frac{b}{3a}$$

این به ما می‌گوید که مینگین ریشه‌های معادله درجه سه برابر است با $-\frac{b}{3a}$. حال، اگر تابع را به این مقدار انتقال دهیم، میانگین ریشه‌ها صفر خواهد شد که مجموع ریشه‌ها را نیز 0 می‌کند و در نتیجه عامل x^2 در معادله ناپدید می‌شود. به طور خلاصه، تبدیل $g(x) \;=\; f(x - \frac{b}{3a})$ چیزی را حاصل می‌کند که به نام فرم درجه سه ‘‘تحویل یافته’’ شناخته می‌شود، که به‌سادگی به این معنی است که هیچ عامل x^2 در آن وجود ندارد. چند جمله‌ای درجه سه تحویل یافته به‌صورت زیر خواهد بود:

$$g(x) \;=\; ax^3 +\; mx \;+\; n,$$

که ضرایب m و n را می‌توان با کمک a، b، c و d در فرم اصلی درجه سه، به‌دست آورد.

این فرمول درجه سومی است که مانند فرمول درجه دوم هر معادله درجه سوم را حل می کند. اما سادگی و هارمونی حل معادله درجه دوم در اینجا وجود ندارد. توجه می کنیم که هر چند جمله‌ای درجه سه دارای سه

ریشه است که حداقل یکی از آنها حقیقی است. ریشه حقیقی دارد. با یافتن یکی از این سه ریشه و استفاده از (۳.۲) و برابر قراردادن آن با شکل اصلی معادله، می‌توان مجموع و حاصلضرب دو ریشه دیگر را به دست آورد و از آنجا این دو ریشه قابل محاسبه خواهند بود. بدون وارد شدن به جزئیات فرمول زیر را که یک ریشه معادله درجه سه را به دست می دهد بیان می کنیم:

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{-b^3}{27a^3} + \frac{b^3}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right) + \sqrt{\left(\frac{-b^3}{27a^3} + \frac{b^3}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} + \sqrt[3]{\left(\frac{-b^3}{27a^3} + \frac{b^3}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right) - \sqrt{\left(\frac{-b^3}{27a^3} + \frac{b^3}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} - \frac{b}{3a}$$

این فرمول معروف به فرمول کاردانو[۱] است که در سال ۱۵۴۵ توسط کاردانو منتشر شد.

مراجع

[1] P. Ball, *Patterns in Nature*, University of Chicago Press, US. 2016.

[2] J.H. Conway, H. Burgiel and C. Goodman-Strauss, *The Symmetries of Things*, Taylor Francis Inc. 2008.

[3] P. Honner, *The symmetry that makes solving math equations easy*, Quanta Magazine 2023, https://www.quantamagazine.org/the-symmetry-that-makes-solving-math-equations-easy-20230324/

[4] I.G. Johnston, K. Dingle, S.F. Greenbury and A.A. Louis, *Symmetry and simplicity spontaneously emerge from the algorithmic nature of evolution*, PNAS, 119 (2022), no. 11, e2113883119.

[۱] Cardano

Towards Mathematical Sciences

Vol. 3, No. 1, Spring and Summer 2023, pp. 62–73

DOI.10.22067/tmsj.2309-1051

Expository Article

به سوی علوم ریاضی

MATHEMATICAL MODELING AND ITS EFFECT ON DISEASE RECOGNITION AND CONTROL

MARZIE ZAJ[1]

[1]Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, IRAN
zaj.marzie@gmail.com

Abstract. Diseases are complex phenomena that are influenced by many factors. Mathematical modeling is a powerful tool for studying these factors and their effects on the disease process. Modeling helps us understand diseases better and find more effective ways to control them. Mathematical models of diseases are usually based on mathematical equations that describe the behavior of the population of people with the disease over time. These models can be used to predict the course of the disease, evaluate the effectiveness of treatment methods, and investigate the effect of various factors on the disease. One of the simplest mathematical models of diseases is the SIR model. This model has wide applications in the study of infectious diseases and is used to predict the course of epidemics, evaluate the effectiveness of vaccination, and investigate the effect of various factors such as human behavior on the course of the disease.

2020 Mathematics Subject Classification. 34B15, 35C10

Keywords. mathematical modeling, infectious disease, compartmental model, epidemic

Date: Rceived 23-9-2023 Revised 24-9-2023 Accepted 24-9-2023 Available Online 27-9-2023

دوره ۳، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۲، صص. ۶۲–۷۳
DOI. 10.22067/tmsj.2309 − 1051
مقاله علمی-ترویجی

به سوی علوم ریاضی

https://tmsj.um.ac.ir

مدلسازی ریاضی و تاثیر آن در شناخت و کنترل بیماری‌ها

مرضیه زاج[۱]

[۱]دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران

zaj.marzie@gmail.com

چکیده. بیماری‌ها پدیده های پیچیده ای هستند که تحت تأثیر عوامل متعددی قرار دارند. مدلسازی ریاضی ابزاری قدرتمند برای مطالعه این عوامل و تأثیر آنها بر روند بیماری است. در واقع مدلسازی به ما کمک کند تا بیماری‌ها را بهتر بفهمیم و راه های موثرتری برای کنترل آنها پیدا کنیم. مدل‌های ریاضی بیماری‌ها معمولاً بر اساس معادلات ریاضی هستند که رفتار جمعیت افراد مبتلا به بیماری را در طول زمان توصیف می‌کنند. این مدل‌ها می‌توانند برای پیش بینی روند بیماری، ارزیابی اثربخشی روش‌های درمانی و بررسی تأثیر عوامل مختلف بر بیماری استفاده شوند. یکی از ساده ترین مدل‌های ریاضی بیماری‌ها، مدل SIR است. این مدل کاربردهای گسترده ای در مطالعه بیماری‌های عفونی دارد و برای پیش بینی روند اپیدمی‌ها، ارزیابی اثربخشی واکسیناسیون و بررسی تأثیر عوامل مختلف مانند رفتار انسان بر روند بیماری استفاده می‌شود.

۱. مقدمه

بیماری‌ها پدیده های پیچیده ای هستند که متاثر از عوامل متعددی پیش می آیند. یکی از ابزارهای قدرتمندی که می‌توان برای مطالعه و شناخت بیماری‌ها و عوامل رشد و شیوع آنها بکار برد، مدلسازی ریاضی است. مدل‌های ریاضی به‌طور گسترده در طول همه‌گیری‌های گذشته و حال مورد استفاده قرار گرفته‌اند تا نگاهی دقیق‌تر به پویایی انتشار بیماری داشته باشند و پیش‌بینی کنند که چه زمانی و به چه قیمتی بیماری مهار می‌شود. در

2020 Mathematics Subject Classification. 34B15, 35C10

واژگان کلیدی. مدلسازی ریاضی، بیماری عفونی، مدل چند محفظه ای، اپیدمی.
تاریخ: دریافت ۱۴۰۲/۷/۱ بازنگری ۱۴۰۲/۷/۲ پذیرش ۱۴۰۲/۷/۲ انتشار برخط ۱۴۰۲/۷/۵

نحوه ارجاع به این مقاله: م.زاج، مدلسازی ریاضی و تاثیر آن در شناخت و کنترل بیماری‌ها ، به سوی علوم ریاضی، ۳ (۱۴۰۲)، شماره ۱، ۶۲–۷۳.

باب اهمیت مدلسازی جا دارد متذکر شویم که این علم یکی از ابزارهای مهم در مبارزه با بیماری کوید ۱۹ بوده و هست و به ما کمک می‌کند تا با تجمیع تحقیقات موجود در این زمینه، چالش‌ها و شکاف‌های تحقیقاتی را هر چه بهتر شناسایی کنیم و بتوانیم اقدامات لازم را برای کنترل اپیدمی انجام دهیم. مدلسازی ریاضی معمولا با استفاده از معادلات ریاضی برای توصیف تعاملات بین عوامل مختلف و تأثیرگذار بر یک بیماری ایجاد می‌شوند که این معادلات را عموما به عنوان یک سیستم دینامیکی در نظر می‌گیریم. در واقع، سیستم‌های دینامیکی مجموعه ای از معادلات ریاضی هستند که رفتار یک سیستم را در طول زمان توصیف می‌کنند. این سیستم‌های دینامیکی می‌توانند برای پیش بینی روند بیماری، تأثیر عوامل مختلف بر بیماری و بررسی راه های مختلف درمانی استفاده شوند. مدل‌های ریاضی می‌توانند برای پیش بینی روند بیماری در آینده استفاده شوند. این پیش بینی‌ها می‌توانند برای برنامه ریزی هر چه بهتر برای مراقبت‌های بهداشتی و اقدامات کنترلی استفاده شوند. همچنین، می‌توانند برای بررسی تأثیر عوامل مختلف بر بیماری استفاده شوند. این عوامل می‌توانند شامل عوامل ژنتیکی، محیطی و رفتاری باشند. سرانجام با توجه به تمام اطلاعاتی که این سیستم‌های دینامیکی در اختیارمان قرار می‌دهند، می‌توانند برای ارزیابی اثربخشی مداخلات درمانی استفاده شوند. این مداخلات می‌توانند شامل واکسیناسیون، درمان دارویی و اقدامات کنترلی باشند.

یکی از این مدل‌های ریاضی، مدل‌های چند محفظه ای هستند که برای توصیف رفتارهای بیماری‌های واگیردار و عفونی مانند آبله، ایدز، مالاریا، کرونا و ... بکار می‌روند [۱۷]. مدل‌های چند محفظه‌ای از اوایل قرن بیستم نقش اصلی را در مدل‌سازی بیماری‌های عفونی ایفا کرده‌اند. این مدل‌ها به طور گسترده برای توصیف فرآیند یک اپیدمی در حال گسترش استفاده می‌شوند. معمولا این مدل برای اپیدمی‌های کوتاه مدت بکار برده می‌شود. اپیدمی‌های کوتاه مدت اپیدمی‌هایی هستند که در مقایسه با طول عمر، مدت زمان آنها نسبتاً کوتاه است. این اپیدمی‌ها معمولاً به شکل شیوع ناگهانی بیماری هستند که بخش قابل توجهی از جمعیت یک منطقه را مبتلا می‌کنند و احتمالاً می‌کشند. به طور کلی در اپیدمی‌های کوتاه مدت، نرخ انتقال معمولاً زیاد است. این بدان معناست که افراد مستعد به سرعت به افراد آلوده تبدیل می‌شوند. همچنین، نرخ بهبودی یا مرگ و میر معمولاً زیاد است. این بدان معناست که افراد آلوده به سرعت بهبود می‌یابند یا می‌میرند. مدل‌های چند محفظه ای مانند مدل SIR علاوه بر پیش بینی روند اپیدمی، نشان دهد که اپیدمی چگونه گسترش می‌یابد و چگونه در نهایت فروکش می‌کند.

۲. ساخت مدل بیماری عفونی

یکی از ساده ترین مدل‌های این دسته، مدل‌های SIR [۱] هستند که نخستین بار توسط [۱۱] و [۹] مورد بررسی قرار گرفتند. این مدل یک مدل ساده از انتشار بیماری است که جمعیت مفروض را به سه گروه مجزا

---

[۱] Susceptible Infectious Removed

تقسیم می‌کند. جمعیت افراد سالم و مستعد ابتلا به بیماری که می‌توانند از طریق تماس با افراد آلوده به بیماری مبتلا شوند را با S [۲] نشان می دهند. جمعیت افراد آلوده به بیماری را با I [۳] نشان می‌دهند که این افراد می‌توانند بیماری را به دیگران منتقل کنند و جمعیت افراد بهبود یافته را با R [۴] نشان می‌دهند. مدل SIR با معادلات زیر توصیف می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

در این معادلات β نشان دهنده نرخ انتقال بیماری و γ نشان دهنده نرخ بهبودی از بیماری است. در واقع، این یک مدل سه بخشی برای مطالعه چگونگی تکامل بیماری‌های عفونی در طول زمان در سطح جمعیت است. شکل ۱ را ببینید.

شکل ۱: سیستم دینامیکی مدل سه محفظه ای مستعد-آلوده-بهبود یافته

به طور خلاصه، این مدل وضعیت عفونت در جامعه را با (i) انتقال افراد مستعد به محفظه عفونی از طریق فرآیند انتقال و (ii) انتقال افراد عفونی به محفظه R (چه مرده و چه بهبود یافته) از طریق فرآیند حذف توصیف می‌کند. همانطور که قبلا اشاره کردیم، در یک زمان معین، کل جمعیت N تحت یک مطالعه به سه بخش تقسیم می‌شود که با S ، I و R نشان داده می‌شوند، و اندازه‌های آن‌ها در تساوی $S + I + R = N$ صدق می‌کند.

اغلب اوقات، علت اصلی علاقه به چنین سیستمی، در مقادیر تابع در طول زمان نهفته است. با این حال، ممکن است راه حل تحلیلی مناسبی برای چنین توابعی وجود نداشته باشد. به عنوان مثال، برای پاسخ به این سوال که تا پایان سال ۲۰۲۰ (یا هر زمان آینده) چند نفر به کووید-۱۹ مبتلا خواهند شد، نیاز به ماشین حسابی داریم که بتواند تعداد تجمعی موارد مستعد، آلوده و حذف شده و بهبود یافته را از گذشته تا آینده محاسبه کند. متأسفانه، در واقعیت، توابع مرتبط با این ماشین حساب معمولاً غیرخطی هستند و فرم دقیق آنها را به سختی می‌توان به طور مستقیم مشخص کرد. در مقابل، مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) به درک

---

[۲] Susceptible

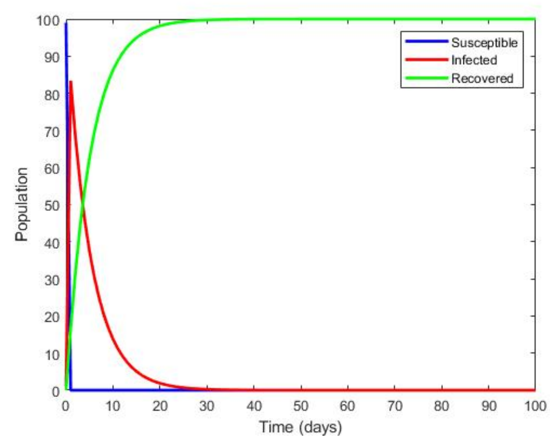
[۳] Infectious

[۴] Recovered

بهتر دینامیک انتقال بیماری (یعنی ویژگی‌های بیماری‌های عفونی) کمک می‌کند و ویژگی‌های کلیدی آنها را به‌طور راحت‌تری پدیدار می‌کند. در چنین حالتی، هر نوع بیماری با یک مدل دستگاه دینامیکی معمولی ممکن است مطابقت داشته باشد زیرا معادله دیفرانسیل معمولی، یک معادله ریاضی است که رابطه بین یک یا چند متغیر و نرخ تغییر آنها را توصیف می‌کند. این معادلات به طور گسترده در فیزیک، مهندسی و زیست شناسی برای مدلسازی سیستم‌های پیچیده استفاده می‌شوند.

برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی با شرایط مرزی معین، می‌توان از روش‌های عددی مانند روش گسسته سازی اویلر یا روش تقریب رانگ–کوتا استفاده کرد، [۲] و [۱۵] ، زیرا حل معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی معین می‌تواند دشوار باشد، به خصوص زمانی که معادلات غیرخطی باشند. روش های عددی می‌توانند برای حل این معادلات به طور تقریبی استفاده شوند.

مثال ۱.۲. مدل SIR را برای یک جمعیت فرضی با تعداد ثابت $N = 100$ در نظر بگیرید، که از این تعداد ۹۹ نفر مستعد، ۱ نفر آلوده و هیچ بهبود یافته یا حذف شده ای نداریم. انتقال بین محفظه ها، که در دستگاه معادلات ۱.۲ نوشته شده است، نشان دهنده حرکت جمعیت از یک محفظه به محفظه دیگر است. اگر مقادیر پارامترها را $\beta = 0.5$ و $\gamma = 0.2$ در نظر بگیریم، با استفاده از یکی از روش های عددی که قبلا اشاره کردیم، می‌توان رفتار جمعیت های محفظه های مختلف را طبق شکل ۲ با نمودار به خوبی توصیف کرد.



شکل ۲: جواب معادله دیفرانسیل معمولی مدل سه محفظه ای با استفاده از روش تقریب مرتبه چهارم رانگ کوتا

۱.۲. عدد بازتولید. بر اساس دو پارامتر β و γ در یک مدل SIR ، نسبت $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$ به عنوان عدد بازتولید پایه ای نامیده می‌شود که در واقع نشان دهنده تعداد افرادی است که به طور مستقیم ویروس را از یک فرد آلوده دریافت می‌کنند. R_0 یک پارامتر مهم برای ارزیابی چگونگی گسترش یک بیماری در جمعیت است و به عوامل مختلفی مانند نرخ انتقال ویروس، مدت زمان آلوده بودن افراد و جمعیت مستعد بستگی دارد. برای

مثال، R_0 برای ویروس سرخک حدود ۱۲–۱۸ است، به این معنی که یک فرد مبتلا به سرخک به طور متوسط ۱۲ تا ۱۸ نفر دیگر را آلوده می‌کند. در مقابل، R_0 برای ویروس HIV حدود ۴ است، به این معنی که یک فرد مبتلا به HIV به طور متوسط ۴ نفر دیگر را آلوده می‌کند. بنابراین، عدد بازتولید یک ویژگی کلیدی برای توصیف و مقایسه بیماری‌های عفونی ارائه می‌دهد، مراجع [۴] ، [۵] ، [۸] و [۱۰] را ملاحظه کنید. با توجه به این اطلاعات می‌توان ادعا کرد که اگر R_0 در یک بیماری بیشتر از ۱ باشد، انتظار می‌رود که آن بیماری به صورت اپیدمی گسترش یابد. در مقابل، اگر R_0 یک بیماری کمتر از ۱ باشد، انتظار می‌رود که آن بیماری از بین برود. در واقع بیشتر از ۱ بودن عدد R_0 به این معنی است که هر فرد آلوده به طور متوسط بیش از یک نفر دیگر را آلوده می‌کند. در این صورت، بیماری می‌تواند به سرعت در جمعیت گسترش یابد و یک اپیدمی ایجاد کند. در مقابل، اگر R_0 در یک بیماری کمتر از ۱ باشد، به این معنی است که هر فرد آلوده به طور متوسط کمتر از یک نفر دیگر را آلوده می‌کند. در این صورت، بیماری به کندی در جمعیت گسترش می یابد و در نهایت از بین می‌رود.

۳. فرض‌ها و محدودیت‌ها در مدل SIR

مانند هر مدل ریاضی دیگری، مدل SIR نیز دارای برخی فرض‌ها و محدودیت‌ها مانند شرایط مرزی است که باید برآورده کند. این محدودیت‌ها شرایطی را تعریف می‌کنند که در آن مدل SIR ممکن است در عمل قابل استفاده باشد. تمام فرض‌های کلیدی عبارتند از:

- جمعیت بسته است، به این معنی که هیچ فرد جدیدی به جمعیت اضافه نمی‌شود و هیچ فردی از جمعیت خارج نمی‌شود. مثلا ما در اینجا جمعیت را برابر با مقدار ثابت N در نظر گرفته ایم. در واقع از نظر تکنیکی این فرض برای مدل سه محفظه ای بصورت زیر برقرار می‌باشد:

$$\frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} = 0$$

- افراد در جمعیت به طور تصادفی با یکدیگر ملاقات می‌کنند، زیرا احتمال و درجه تعامل با یکدیگر در طول زمان ثابت می‌ماند. این یک فرض قوی از همگنی برای سیستم دینامیکی SIR است که توسط همان پارامترهای β و γ کنترل می‌شود. فرض همگنی باعث می‌شود که مدل SIR قابل محاسبه و تحلیل باشد.
- در یک فرد مستعد، فقط از طریق عفونت (یعنی بدون واکسیناسیون) مصونیت ایجاد می‌شود. به عبارت دیگر، همانطور که در شکل ۱ نشان داده شده است، محفظه عفونی تنها خروجی محفظه مستعد است و هیچ حالت دیگری وجود ندارد که فرد در معرض خطر به محفظه دیگری منتقل شود. پس از بهبودی از عفونت ناشی از بیماری، برای باقیمانده دوره، نسبت به ویروس مصون می‌شود و دیگر مستعد مبتلا نخواهد شد و در واقع، این یک تعریف دقیق از مدل SIR است. از منظر نمایش

گرافیکی همانگونه که در شکل ۱ نشان داده می‌شود، هیچ ارتباطی از محفظه بهبود یافته به محفظه مستعد وجود ندارد، یا به عبارت دیگر محفظه حذف شده حالت پایانی دینامیک بیماری است.

- این بیماری دارای دوره نهفته صفر است و این موجب می‌شود که فرد پس از قرار گرفتن در معرض بیماری، مبتلا شود. این یک تمایز کلیدی مدل SIR از مدل SEIR است. مانند بسیاری از بیماری‌های عفونی، در کووید-۱۹ میانگین دوره نهفتگی بین ۴ تا ۷ گزارش شده [۱۲] که این موضوع بر پیچیدگی مدلسازی بیماری‌های عفونی می‌افزاید. برخی از مطالعات نشان داده اند که ناقلین کوید ۱۹ در مراحل اولیه بیماری قبل از بروز علائم بالینی، موجب سرایت بیماری به دیگران می‌شوند، [۶] و [۷] .
- از آنجایی که در مدل SIR پارامترهای β و γ ثابت در نظر گرفته شده اند، فرض می‌شود که عفونت زمینه‌ای در محیط های بدون مداخله خارجی تکامل می‌یابد. این یک محدودیت مهم مدل SIR است زیرا با واقعیت متفاوت است. بسیاری از کشورها اقدامات کنترل غیر دارویی مختلفی را برای کاهش شیوع کوید ۱۹ انجام داده اند و به علاوه راه حل هایی برای اصلاح این فرض غیر واقعی مدل SIR در تجزیه و تحلیل داده های کوید ۱۹ پیشنهاد شده است.
- اندازه جمعیت N به اندازه کافی بزرگ است به طوری که تعداد مواردی از جمله تعداد افراد آلوده، تعداد مرگ و میرها و تعداد موارد بهبود یافته را در بر دارد، به این ترتیب پارامترها در مدل SIR را می‌توان به طور پایدار با دقت بالا تخمین زد. از نظر تکنیکی، این یک فرض برای مدل محسوب نمی‌شود، بلکه شرطی برای اندازه جامعه آماری است. بنابراین از آنجایی که این مدل در نهایت برای پیش بینی ریسک استفاده خواهد شد، لازم است که یک مدل مناسب با داده های قابل اعتماد تعریف کنیم تا علاوه بر پیش بینی ، به اندازه کافی عدم قطعیت پیش بینی را نیز ارزیابی کند.

۴. ویژگی‌های مدل SIR

برای درک بهتر مکانیسم بیماری‌های عفونی که توسط مدل SIR مدلسازی می‌شوند، فهرستی از ویژگی‌های تحلیلی این مدل ارائه می‌کنیم که دستورالعمل‌های مفیدی را برای ساختن مدل‌ها و روش‌های آماری در مدل SIR ارائه می‌کند.

- به بیان دقیق، اندازه هر محفظه $S(t)$ ، $I(t)$ و $R(t)$ در این مدل عددی صحیح می‌باشد. مهمتر از آن، با اینکه سیستم دینامیکی تعریف شده توسط مدل SIR به صورت پیوسته در زمان تعریف می‌شود، داده های موجود در نقاط زمانی گسسته و در فواصل زمانی گسسته گزارش می‌شوند. این بدان معناست که اگرچه مدل SIR دینامیک انتشار بیماری را به صورت پیوسته در زمان توصیف می‌کند، داده های نظارتی در مورد بیماری (مانند تعداد موارد جدید در روز یا تعداد افراد بهبود یافته) در نقاط زمانی مشخص و در فواصل زمانی مشخص گزارش می‌شوند. این اختلاف بین مدل و داده ها باید هنگام استفاده از مدل SIR برای تجزیه و تحلیل داده ها در نظر گرفته شود. برای مثال، اگر بخواهیم از مدل SIR برای پیش بینی روند شیوع یک بیماری در آینده استفاده کنیم، باید داده ها را

به گونه ای اصلاح کنیم که با مدل سازگار باشند. این کار را می‌توان با استفاده از روش هایی مانند فیلتر کردن یا تخمین انجام داد. بنابراین، این یک موضوع مهم است که هنگام استفاده از مدل‌های ریاضی برای بیماری‌های عفونی، اختلاف بین مدل و داده را در نظر بگیریم. این کار به ما کمک می‌کند تا از مدل‌ها به طور دقیق تر و مؤثرتری استفاده کنیم.

- مدل SIR یک مدل قطعی است و شامل هیچ مولفه احتمالی نیست، یعنی مقادیر جمعیت در هر یک از گروه‌ها در هر زمان مشخص به طور دقیق توسط پارامترهای مدل و شرایط اولیه تعیین می‌شوند. این در حالی است که در دنیای واقعی، مقادیر جمعیت در هر گروهی با عدم قطعیت همراه است. این عدم قطعیت می‌تواند ناشی از عوامل مختلفی مانند خطاهای اندازه‌گیری، تغییرات در رفتار انسان و عوامل محیطی باشند. قابل توجه است که یک سیستم دینامیکی و یک فرآیند تصادفی دو ویژگی ریاضی متفاوت هستند. یک سیستم دینامیکی (به عنوان مثال مدل SIR) لزوماً تصادفی نیست، در حالی که یک سیستم تصادفی لزوماً پویا نیست. همانطور که در شکل ۲ نشان داده شده است، اندازه هر کدام از محفظه‌های $S(t)$ ، $I(t)$ و $R(t)$ ، توابع متغیر زمان و بدون نوسانات تصادفی هستند که به طور کامل توسط پارامترهای مدل و شرایط اولیه مدل SIR تعیین می شوند. بنابراین، زمانی که جمع آوری داده‌ها با عدم قطعیت و خطاهای تصادفی همراه است و تجزیه و تحلیل نیز بر اساس همین داده‌ها صورت می گیرد، این یک محدودیت برای مدل SIR محسوب می‌شود.
- به راحتی می‌توان نشان داد که تعداد افراد در معرض خطر (در ورودی سیستم) یعنی $S(t)$ ، به طور یکنواخت غیر افزایشی است و تعداد موارد حذف شده (در خروجی سیستم) یعنی $R(t)$ به طور یکنواخت غیر کاهشی است. این واقعیت در شکل ۲ کاملا مشهود است. از این رو، تعداد کل افرادی که در معرض ویروس قرار گرفته اند برابر با $N - S(t) = I(t) + R(t)$ بوده و به طور یکنواخت غیر کاهشی می‌باشد. $I(t)$ یعنی تعداد افراد مبتلا شده، یا اختلاف بین دو گروه در معرض خطر و دسته بهبود یافتگان، می‌تواند افزایشی یا کاهشی باشد. نمودار شکل ۲ به خوبی چنین خط سیری را که در آن زمان به اوج رسیدن و زمان کاهش به صفر $I(t)$ به عنوان دو نقطه عطف مهم در پاندمی می‌باشند، نشان می‌دهد.
- می‌توان نشان داد که $I(\infty) = 0$ به این معنی است که بیماری در نهایت از بین خواهد رفت. با این حال، این ویژگی کاهش به صفر مشروط به مفروضاتی است که قبلا ذکر شد. نقض فرضیات مذکور، به احتمال زیاد باعث تداوم بیماری می‌شود زیرا یکنواختی $S(t)$ بیان شده در استدلال قبلی دیگر معتبر نیست. نمونه بارز چنین بیماری‌هایی آنفولانزای فصلی است که مصونیت در آن در طولانی مدت به هیچ وجه میسر نیست.
- مدل SIR دارای ویژگی بازگشتی است. یعنی در هر زمان معین، پیشرفت بیماری فقط به مقادیر فعلی آنها بستگی دارد و نه به اطلاعات دیگر از گذشته. به عنوان مثال، برای پیش بینی تعداد افراد

آلوده در روز آینده، فقط به تعداد افراد آلوده در روز جاری و پارامترهای مدل SIR نیاز داریم. نیازی به دانستن تعداد افراد آلوده در روزهای گذشته نیست. این ویژگی بازگشتی نباید با ویژگی مارکوف که منحصراً در فرآیندهای تصادفی تحت قانون احتمال شرطی استفاده شده است، اشتباه گرفته شود. خاصیت مارکوف در فرآیندهای تصادفی به این معنی است که حالت آینده یک سیستم فقط به حالت فعلی آن بستگی دارد و نه به حالات گذشته آن. به عنوان مثال، در یک فرآیند مارکوف سکه انداختن، نتیجه پرتاب بعدی سکه فقط به نتیجه پرتاب فعلی سکه بستگی دارد و نه به نتایج پرتاب های گذشته سکه. در مدل SIR، هیچ قانون احتمالی در عملیات بازگشتی دخیل نیست. به این معنی که اگر مقادیر اولیه جمعیت در هر یک از سه گروه و پارامترهای مدل SIR را بدانیم، پیشرفت بیماری با قطعیت کامل قابل پیش بینی است. تمایز مفهومی بین یک سیستم دینامیکی و یک فرآیند تصادفی، به درک تفاوت‌های بین مدل SIR و فرآیندهای مارکوف کمک می‌کند. دینامیک به معنای تغییر در طول زمان است، در حالی که تصادفی بودن به معنای غیرقابل پیش بینی بودن است. مدل SIR یک مدل دینامیکی است، اما یک مدل تصادفی نیست.

۵. توسیعی از مدل SIR

در طول یک بیماری همه گیر، معمولاً اقدامات کنترلی مختلفی توسط دولت ها برای کاهش یا مهار گسترش بیماری انجام می‌شود. تأثیر مستقیم این مداخلات خارجی این است که هر دو نرخ انتقال و بازیابی، در طول زمان ثابت نیستند. بنابراین، یک تعمیم مهم از مدل SIR ، تطبیق دادن فعالیت‌های مختلف سیاست‌های کاهش، از جمله فاصله گذاری اجتماعی، محدود کردن حمل و نقل، پوشیدن اجباری ماسک و قرنطینه شهری است. همانطور که در همه گیری مداوم کوید ۱۹ مشاهده شد، سیاست های کاهش در طول زمان در حال تغییر هستند. محدود کردن جابجایی افراد مستعد و جداسازی افراد مبتلا در جمعیت، میزان ابتلا به ویروس را کاهش می‌دهد و منجر به کاهش نرخ انتقال بیماری یعنی $\beta(t)$ می‌شود. در عین حال، به دست آوردن دانش بهتر در مورد درمان و خود مدیریتی علائم و بهبود منابع پزشکی ممکن است میزان بهبودی یعنی نرخ γ را در طول یک اپیدمی افزایش دهد. بنابریان گنجاندن پارامترهای متغیر با زمان در یک مدل SIR منجر به گسترش مهم این مدل می‌شود.

ماهیت پارامتر $\beta(t)$ عمدتا به دو صورت قابل تعریف است. یکی این است که اجازه دهید $\beta(t)$ یک تابع پارامتری باشد (مثلاً تابع نمایی نزولی) و یا یک تابع غیر پارامتری باشد [۱۴] و [۱۶]، که در هر دو نوع ممکن است داده های موجود تخمین زده شوند. یکی از ویژگی های مفید برای استفاده از تابع پارامتری β زمانی است که می‌خواهیم از فصلی بودن در نرخ انتقال صحبت کنیم. در واقع این ویژگی می‌تواند برای مدلسازی بیماری‌های عفونی که رفتارهای فصلی دارند، مفید باشد. به عنوان مثال، بیماری‌های عفونی تنفسی ناشی از برخی از ویروس ها مانند کوید ۱۹، در برخی از ماه های زمستان با بیشترین سرعت گسترش می‌یابند. این امر به دلیل عوامل مختلفی از جمله دمای پایین تر و رطوبت بیشتر در زمستان است که می‌تواند به زنده

ماندن و تکثیر ویروس کمک کند. هنگامی که فصلی بودن در نرخ انتقال گنجانده می‌شود، می‌تواند به مدل‌های بیماری عفونی کمک کند تا رفتار واقعی بیماری را بهتر شبیه سازی کنند. این امر می‌تواند برای پیش بینی شیوع بیماری و برنامه ریزی برای اقدامات کنترلی مفید باشد. به عنوان نمونه، یک تابع سینوسی می‌تواند برای مدلسازی تغییرات فصلی در نرخ انتقال استفاده شود. در این حالت، نرخ انتقال در طول سال با یک دوره مشخص نوسان می‌کند، [۱] و [۱۳] . در نظر گرفتن چنین تناوب فصلی در مدل، پیش‌بینی بلندمدت بهتری از یک اپیدمی ایجاد می‌کند. از آنجایی که توجه عمومی به پیش بینی همه گیری کوید ۱۹ به تدریج از کوتاه مدت به بلندمدت تغییر می‌کند، توجه به فصلی بودن اهمیت بیشتری پیدا می‌کند. در [۳] نویسنده یک راه ساده برای معرفی فصلی بودن ارائه است و آن این است که فرض کنیم نرخ انتقال β در طول یک سال به صورت زیر معرفی شود:

$$\beta(t)=\beta_0\{1+\sigma\cos(\frac{2\pi(t-\varepsilon)}{365})\}, t=1,\dots,365,$$

که در اینجا β_0 متوسط نرخ برخورد و $\sigma\in[0,1]$ درجه فصلی بودن است که با $\sigma=0$ به مدل SIR پایه تبدیل می‌شود. به علاوه، $\varepsilon\in[0,365)$ و در نتیجه اوج انتقال زمانی اتفاق می افتد که $t=\varepsilon$. لازم به ذکر است که سایر توابع تناوبی یا ترکیب آنها نیز می‌توانند برای مدلسازی فصلی استفاده شوند.

۶. مدل SIR با دینامیک حیاتی

فرض اندازه جمعیت ثابت در مدل SIR یک فرض ساده کننده ولی در عین حال محدود کننده است که به‌طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد. این فرض به این معنی است که تعداد افراد در هر یک از سه گروه جمعیتی (مستعد، آلوده، و بهبود یافته) در طول زمان ثابت می‌ماند. در واقعیت، اندازه جمعیت همیشه ثابت نیست. افراد به طور طبیعی متولد می‌شوند و می‌میرند. علاوه بر این، در طول یک اپیدمی، ممکن است افراد به دلیل عوامل مختلفی مانند مهاجرت یا مرگ ناشی از بیماری، از جمعیت حذف شوند. اگرچه فرض اندازه جمعیت ثابت می‌تواند در درک اولیه از اپیدمی‌ها مفید باشد اما برای توصیف دقیق رفتار اپیدمی در طول زمان، باید دینامیک تولد و مرگ طبیعی را هم در نظر گرفت. زیرا به هر حال در یک اپیدمی طولانی‌مدت، تغییرات در اندازه جمعیت می‌تواند بر روند اپیدمی تأثیر بگذارد. به عنوان مثال، در یک جامعه با نرخ تولد بالا، اپیدمی ممکن است سریع‌تر گسترش یابد. این به این دلیل است که تعداد افراد بیشتری برای آلوده شدن وجود دارد ولی در یک جامعه با نرخ مرگ و میر بالا، اپیدمی ممکن است سریع‌تر فروکش کند. این به این دلیل است که افراد کمتری برای آلوده شدن و گسترش بیماری وجود دارند. به علاوه اگر در یک جامعه آمار مهاجرت کنندگان بالا باشد، اپیدمی ممکن است به مناطق جدید منتقل شود. بنابراین گنجاندن دینامیک جمعیت در مدل SIR می‌تواند به ما کمک کند تا اپیدمی‌ها را بهتر درک کنیم و پیش‌بینی‌های دقیق‌تری ارائه دهیم. با توجه به این توضیحات ما در ابتدا فرض می کنیم که μ نرخ تولد طبیعی و ν نرخ مرگ طبیعی باشد. بنابراین اندازه جمعیت به صورت یک معادله دیفرانسیل معمولی $\frac{dN(t)}{dt}=\mu N(t)-\nu N(t)$ تغییر خواهد کرد. در این مورد، سه

خروجی برای مرگ های طبیعی وجود دارد که هر کدام در یک محفظه رخ می دهد. در نتیجه مدل پایه SIR را می‌توان به شرح زیر توسیع داد:

$$\begin{aligned}
\frac{dS(t)}{dt} &= \mu N(t) - \beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} - \nu S(t) \\
\frac{dI(t)}{dt} &= \beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} - \gamma I(t) - \nu I(t) \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I(t) - \nu R(t),
\end{aligned} \tag{۱.۶}$$

توجه کنید که در اینجا $S(t) + I(t) + R(t) = N(t)$ و بدست می آوریم

$$\frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR}{dt} = \mu N(t) - \nu N(t) = \frac{dN(t)}{dt}.$$

مراجع

[1] Barreca, A.I. Shimshack, J.P. *Absolute humidity, temperature, and influenza mortality: 30 years of countylevel evidence from the United States*. Amer. J. Epidemiol., 176, S114–S122, 2012.

[2] Butcher, J.C. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Chichester, United Kingdom: John Wiley Sons, 2016.

[3] Dietz, K. *The incidence of infectious diseases under the influence of seasonal fluctuations*. In Mathematical Models in Medicine, pp. 1–15, 1976.

[4] Chowell, G., Castillo-Chavez, C., Fenimore, P.W., Kribs-Zaleta, C.M., Arriola, L. Hyman, J.M. *Model parameters and outbreak control for SARS*. Emerg. Infect. Dis., 10(7), 1258, 2004.

[5] Ferguson, N.M., Cummings, DerekA.T., Fraser, C., Cajka, J.C., Cooley, P.C. Burke, D.S. *Strategies for mitigating an influenza pandemic*. Nature, 442(7101), 448–452, 2006.

[6] He, X., Lau, EricH.Y., Wu, P., Deng, X., Wang, J., Hao, X., Lau, Y.C., Wong, J.Y., Guan, Y., Tan, X. Mo, X , *Temporal dynamics in viral shedding and transmissibility of COVID-19*. Nat. Med., 26(5), 672–675, 2020.

[7] Ip, D.K.M., Lau, L.L.H., Leung, N.H.L., Fang, V.J., Chan, K.-H., Chu, D.K.W., Leung, G.M., Peiris, J.S.M., Uyeki, T.M. Cowling, B.J. *Viral shedding and transmission potential of asymptomatic and paucisymptomatic influenza virus infections in the community*. Clin. Infect. Dis., 64(6), 736–742, 2017.

[8] Khan, A., Naveed, M., Dur-e Ahmad, M. Imran, M. *Estimating the basic reproductive ratio for the Ebola outbreak in Liberia and Sierra Leone*. Infect Dis Poverty, 4(1), 13, 2015.

[9] Kermack, W.O. , McKendrick, A.G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. Proc. R. Soc. Lond. Ser. Math. Phys. Eng. Sci., 115(772), 700–721, 1927.

[10] Liu, Y., Gayle, A.A., Wilder-Smith, A. Rocklöv, J. *The reproductive number of COVID-19 is higher compared to SARS coronavirus.* J. Trav. Med., 27(2), taaa021, 2020.

[11] McKendrick, A.G. Applications of mathematics to medical problems. Proc. Edinb. Math. Soc., 44, 98–130, 1925.

[12] Pan, A., Liu, L., Wang, C., Guo, H., Hao, X., Wang, Q., Huang, J., He, N., Yu, H., Lin, X., Wei, S. Wu, T. *Association of public health interventions with the epidemiology of the COVID-19 outbreak in Wuhan, China.* J. Amer. Med. Assoc., 323, 1915–1923, 2020.

[13] Sajadi, M.M., Habibzadeh, P., Vintzileos, A., Shokouhi, S., Miralles-Wilhelm, F. Amoroso, A. *Temperature and latitude analysis to predict potential spread and seasonality for COVID-19.* Available at SSRN 3550308, 2020.

[14] Smirnova, A., deCamp, L. Chowell, G. *Forecasting epidemics through nonparametric estimation of timedependent transmission rates using the SEIR model.* Bull. Math. Biol., 81(11), 4343–4365, 2019.

[15] Stoer, J. Bulirsch, R. *Introduction to Numerical Analysis.* New York, United States: Springer, 2013.

[16] Sun, H., Qiu, Y., Yan, H., Huang, Y., Zhu, Y., Gu, J. Chen, S.X. *Tracking reproductivity of COVID-19 epidemic in China with varying coefficient SIR model.* J. Data Sci., 18(3), 455–482, 2020.

[17] Tang L, Zhou Y, Wang L, Purkayastha S, Zhang L, He J, Wang F, Song PX-K. *A review of multi-compartment infectious disease models.* Int. Stat. Rev. 88, 462–513. (doi:10.1111/insr.12402),2020.

Towards Mathematical Sciences

Volume 3, Issue 1, 2023

Publisher
Ferdowsi University of Mashhad
Director-in-Charge
Mohammad Sal Moslehian
Editor-in-Chief
Fateme Helen Ghane
Executive Manager
Mohammad Janfada

Mailing Address: TMSJ Office, Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran. P. O. Box 91775-1159.

Website Address: https://tmsj.um.ac.ir **Email:** tmsj@um.ac.ir

Phone: +98-51-38806222 **Fax:** +98-51-38807358

به سوی علوم ریاضی

دانشگاه فردوسی مشهد

فهرست مطالب

ISSN 2783-5162

tmsj.um.ac.ir