

دوره ۴، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۳



به سوی علوم ریاضی

شاپا الکترونیک ۵۱۶۲-۲۷۸۳

[tmsj.um.ac.ir](http://tmsj.um.ac.ir)



بسم الله الرحمن الرحيم

به سوی علوم ریاضی

دارای پروانه انتشار شماره ۸۶۳۹۶ به تاریخ ۱۳۹۹/۲/۱۵ از وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی، شاپا الکترونیک ۵۱۶۲-۲۷۸۳

دوره ۴، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۳

صاحب امتیاز: دانشگاه فردوسی مشهد

مدیر مسئول

محمد صال مصلحیان

سردبیر

فاطمه هلن قانع

مدیر اجرایی

محمد جانفدا

اعضای هیات تحریریه

شیرین حجازیان، دانشگاه فردوسی مشهد

مسعود آیین نژاد، دانشگاه زنجان

محمد جانفدا، دانشگاه فردوسی مشهد

آرزو حبیبی راد، دانشگاه فردوسی مشهد

داود خجسته سالکویه، دانشگاه گیلان

امیر دانشگر، دانشگاه صنعتی شریف

مهدی دوست پرست، دانشگاه فردوسی مشهد

علی دولتی، دانشگاه یزد

فرزاد راد مهر، دانشگاه فردوسی مشهد

حبیب رجبی مشهدی، دانشگاه فردوسی مشهد

بختیار شعبانی ورکی، دانشگاه فردوسی مشهد

احمد صفاپور، دانشگاه ولیعصر رفسنجان

معصومه فشنندی، دانشگاه فردوسی مشهد

غلامرضا محتشمی برزادران، دانشگاه فردوسی مشهد

احسان ممتحن، دانشگاه یاسوج

علی اصغر مولوی، دانشگاه حکیم سبزواری

مجید میرزا وزیری، دانشگاه فردوسی مشهد

اعضای مشورتی هیات تحریریه

فائزه توتونیان مشهد، دانشگاه فردوسی مشهد

رحیم زارع نهندی، دانشگاه تهران

امیدعلی شهنی کرم زاده، دانشگاه شهید چمران اهواز

محمد قاسم وحیدی اصل، دانشگاه شهید بهشتی

بهمن هنری، دانشگاه فردوسی مشهد

این نشریه به صورت دوفصلنامه (دو شماره در سال) منتشر می شود.

کلیه حقوق برای دانشگاه فردوسی مشهد محفوظ است

نشانی:

مجله‌ی به سوی علوم ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، ص.ب. ۱۱۵۹، مشهد ۹۱۷۷۵

ایمیل: [tmsj@um.ac.ir](mailto:tmsj@um.ac.ir)

آدرس وبسایت: <https://tmsj.um.ac.ir>

فاکس: ۰۵۱-۳۸۸۰۷۳۵۸

تلفن: ۰۵۱-۳۸۸۰۶۲۲۲

مجله به سوی علوم ریاضی با هدف عمومی سازی ریاضیات، کمک به آشنایی جامعه به طور عام و جامعه دانشگاهی به طور خاص با جنبه‌های مختلف و کاربردهای ریاضی، آمار، و کامپیوتر و ارتباط آنها با سایر علوم در قالب چاپ مقالات علمی-ترویجی مرتبط می‌باشد.

این مجله مقالات در زمینه‌های ریاضی محض، ریاضی کاربردی، آمار و احتمال، علوم کامپیوتر، آموزش ریاضی، تاریخ و فلسفه ریاضی، کاربردهای ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر در سایر علوم، و نقدهای علمی را برای بررسی می‌پذیرد. همچنین ترجمه مقالاتی در موضوعات گفته شده نیز با شرایط خاص مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مقالات باید به گونه‌ای نوشته شوند که قابل فهم برای افرادی با اطلاعات پایه‌ای ریاضی در سطح کارشناسی یا دانشجویان تحصیلات تکمیلی باشند.

ارسال مقاله به این مجله به این معنی است که کلیه نویسندگان مقاله از این ارسال آگاه بوده، اصالت محتوای علمی آن را تأیید و با ارسال آن به مجله‌ی به سوی علوم ریاضی موافق بوده‌اند و به علاوه متعهد هستند که مقاله ارسالی به این مجله به‌طور همزمان در مراحل بررسی و یا چاپ در هیچ نشریه دیگری نیست. با ارسال مقاله به این مجله، همه نویسندگان متعهد می‌شوند که حقوق مالکیت فکری و اخلاق پژوهشی را رعایت نموده‌اند و کلیه حقوق استفاده از محتوا، جداول، تصاویر و ... را به ناشر واگذار کرده‌اند.

ارسال مقاله تنها از طریق لینک <https://tmsj.um.ac.ir> و به صورت الکترونیک امکان‌پذیر است. همچنین راهنمای نویسندگان و [فایل فشرده فرمت مجله](#) در این لینک قابل مشاهده است.

## فهرست مطالب

پیرامون ساختارهای فازی در آنالیز ریاضی..... ۱

م. شهاخت، ع. گنج بخش صنعتی، ا. یوسفی کیا، و ع. شهیدی کیا

مطالعه ای تطبیقی بر ارتباط بین آمار و علم داده ..... ۱۹

ا.ح. قطاری، ا. تبریزی، و ا. بهرامی سامانی

تحلیل محتوای حسابان ۲ پایه دوازدهم رشته ریاضی و فیزیک بر اساس روش ویلیام رومی..... ۳۲

م. عزتی و ح. فرجی

مدلی جدید برای تابع گاما در اعداد طبیعی..... ۴۲

ر. محمدیان

اصول و استانداردهای آموزش ریاضی دوره ی متوسطه با تأکید بر استانداردهای فرآیندی..... ۶۵

ن. هاشمی

معادله درجه دوم  $x^2 - x - 1 = 0$  و دنباله های لوکاس و فیبوناچی با تأکید بر دنباله ها در کتب درسی مدرسه..... ۸۳

ح. دستجردی



## ABOUT FUZZY STRUCTURES IN MATHEMATICAL ANALYSIS

MANOUCHEHR SHAHAMAT<sup>1\*</sup>, ALI GANJBAKHSH SANATEE<sup>2</sup>, OMID YOUSEFI KIA<sup>3</sup>,  
AND ALI SHAHIDIKIA<sup>4</sup>

<sup>1,3,4</sup>Department of Mathematics, Dezful branch, Islamic Azad University, Dezful, IRAN  
m.shahamat@iaud.ac.ir  
omidyk2011@gmail.com  
a.shahidikia@gmail.com

<sup>2</sup>Faculty of Mathematical Sciences, Department of Mathematics, University of Quchan, Iran  
a.ganjbakhsh@qiet.ac.ir

**Abstract.** In the present article, we examine continuous phases using analytical structures. Based on our analysis of the concepts of continuity and differentiability in the continuous phase, we study the behavior of systems and their applications. Mathematical analysis structures such as continuity, sequences, differentiability, uniformly continuous sequences of functions, and so forth, are not only extensively used in the examination and analysis of the properties of phase function structures, but they also have led to the development of new perspectives in the theory of classical phase models. We demonstrate how differentiable phases introduce systems. Additionally, we study uniformly continuous phases and trace the behavior of systems by examining the behavior of sequences of other systems.



## پیرامون ساختارهای فازی در آنالیز ریاضی

منوچهر شهامت<sup>1\*</sup>، علی گنج بخش صنعتی<sup>2</sup>، امید یوسفی کیا<sup>3</sup>، و علی شهیدی کیا<sup>3</sup>

<sup>1,3,4</sup> گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد دزفول، دزفول، ایران

<sup>1</sup>m.shahamat@iaud.ac.ir

<sup>3</sup>o.yousefikia@iaud.ac.ir

<sup>4</sup>alishahidikia@iaud.ac.ir

<sup>2</sup> گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان، ایران

a.ganjbakhsh@qiet.ac.ir

چکیده. در مقاله حاضر به بررسی فازهای پیوسته به کمک ساختارهای آنالیزی می‌پردازیم. با توجه به تحلیلی که از مفهوم پیوستگی و مشتق‌پذیری در فاز پیوسته داریم، رفتار سیستم‌ها و کاربرد آن‌ها را بررسی می‌کنیم. ساختارهای مباحث آنالیز ریاضی مانند پیوستگی، دنباله، مشتق‌پذیری، دنباله توابع به‌طور یکنواخت پیوسته و غیره نه‌تنها در بررسی و تحلیل خواص ساختارهای توابع فاز کاربردهای فراوانی دارد، بلکه باعث به وجود آمدن نگرش‌های جدیدی در نظریه مدل فاز کلاسیک نیز شده است. نشان می‌دهیم فازهای مشتق‌پذیر چگونه سیستم‌ها را معرفی می‌کنند. همچنین فازهای به‌طور یکنواخت پیوسته را مطالعه می‌کنیم و رفتار سیستم‌ها را با بررسی رفتار دنباله‌ای از سیستم‌های دیگر پیگیری می‌کنیم.

2010 Mathematics Subject Classification. 37B10.

واژگان کلیدی. فاز، پیوسته، مشتق‌پذیر.

تاریخ: دریافت ۱۴۰۲/۷/۱ بازنگری ۱۴۰۳/۲/۲۱ پذیرش ۱۴۰۳/۳/۸ انتشار برخط ۱۴۰۲/۷/۵

نحوه ارجاع به این مقاله: م. شهامت، ع. گنج بخش صنعتی، ا. یوسفی کیا، ع. شهیدی کیا، پیرامون ساختارهای فازی در آنالیز ریاضی، به سوی علوم ریاضی، ۴ (۱۴۰۳)، شماره ۱، ۱-۱۸.

© دانشگاه فردوسی مشهد.

## ۱. پیش‌گفتار

فرآیند مدل‌سازی ریاضی پدیده‌های دنیای واقعی، غالباً دقیق نیستند. در نتیجه این مدل‌سازی‌ها نیز کارایی لازم برای راه‌حل مسائل دنیای واقعی را ندارند.

سیستم فازی<sup>۱</sup> برای اولین بار در سال ۱۹۶۵ توسط لطفی‌زاده<sup>۲</sup> معرفی شد. لطفی‌زاده به ناتوانی ریاضیات کلاسیک در برخورد به مسائل نادقیق اشاره کرد و بدین منظور نظریه فازی را برنامه‌ریزی کرد [۴].

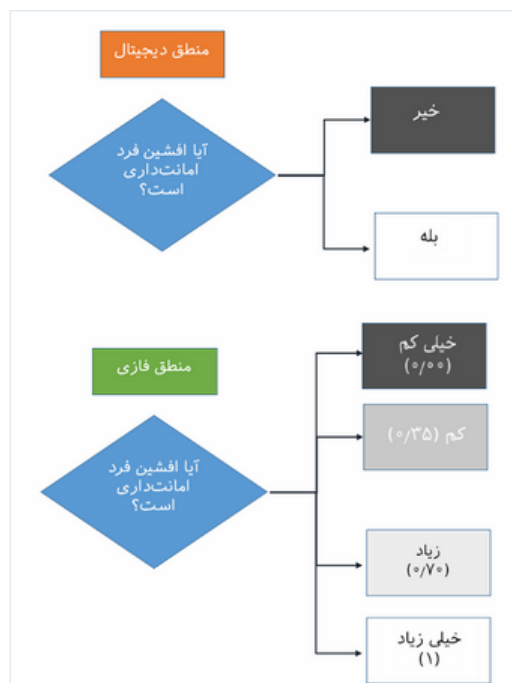
برای مقایسه منطق فازی و منطق کلاسیک، فرض کنید یک سیستم فازی طراحی شده است که توسط آن می‌توان میزان امانت‌داری افراد را مشخص کرد. در مقابل بر اساس یک سیستم دیجیتال یا منطق کلاسیک نیز امانت‌داری افراد اندازه‌گیری و تعیین می‌شود. به شکل ۱ و تفاوت نتایج حاصل از این دو سیستم توجه کنید. مشخص است که نمی‌توان در مورد امانت‌داری در منطق فازی به‌طور قطع نظر داد درحالی‌که در منطق کلاسیک این کار به راحتی امکان‌پذیر است.

به‌عنوان مثالی دیگر می‌توان به کاربرد منطق فازی در ماشین‌های شستشوی لباس اشاره کرد. ماشین‌های لباس‌شویی مدرن از منطق فازی استفاده می‌کنند. آن‌ها حس‌گرهایی دارند که به‌طور مداوم تغییرات دما را ردیابی می‌کنند. بر این اساس کنترل‌ها و عملیات را تنظیم می‌کنند. این سیستم‌ها عملکرد خوبی دارند. منطق فازی فرآیند شستشو، دمای آب، سرعت چرخش، زمان شستشو، مصرف آب و عملکرد آبکشی را کنترل می‌کند. با این وجود سیستم‌های فازی نیز در بعضی موارد ناتوان هستند [۵]. مشخص است که نمی‌توان منطق فازی را راه‌حلی جامع برای همه مسائل دانست؛ بنابراین مهم است که بدانیم در چه مواقعی نباید از منطق فازی استفاده کرد. از آنجایی‌که بر مبنای قوانین از پیش تعیین‌شده، فرآیند تصمیم‌سازی بر مبنای منطق فازی صورت می‌گیرد، اگر این قوانین دچار نقص یا اشکال باشند، ممکن است نتایج اصلاً قابل قبول نباشند. از طرفی پیاده‌سازی منطق فازی در سخت‌افزارهای رایج احتیاج به آزمایش‌های متعدد و زمان‌بر دارد. در زیر به معرفی زمینه‌هایی می‌پردازیم که بهتر است از منطق فازی استفاده نشوند:

- (۱) زمانی که از حواس پنج‌گانه استفاده می‌شود، منطق فازی کارساز نیست.
- (۲) اگر روش‌های کنترل و تصمیم‌گیری بدون منطق فازی به خوبی کار می‌کنند، پس احتیاجی نیست که آن‌ها را به منطق فازی تبدیل کنیم.
- (۳) الگوریتم‌های فازی نیاز به اعتبارسنجی و تأیید گسترده دارند.
- (۴) سیستم‌های کنترل فازی به تخصص و دانش انسان وابسته هستند.

فاز پیوسته تعمیمی از فاز کلاسیک با دامنه نامتناهی است. بسیاری از نتایج فاز کلاسیک، به فاز پیوسته تعمیم داده شده‌اند. در دنیای واقعی ابهام وجود دارد اما بعضی مواقع لازم نیست از جملات دقیق استفاده کرد. برای مثال جمله «هوا گرم است.» را در نظر بگیرید. این جمله با وجودی که دقیق نیست، اما مفهوم آن مشخص

<sup>۱</sup>Fuzzy System<sup>۲</sup>Lotfizadeh



شکل ۱: مقایسه ریاضی فازی و کلاسیک.

است در صورتی که اگر برای رساندن منظورمان ازجمله دقیق «دمای هوا ۳۰ درجه است.» استفاده می‌کردیم، کارایی کمتری داشت. در اواسط قرن بیستم این ضعف برای سیستم‌های کنترل آشکارتر شد زیرا قرار بود از ماشین به جای انسان استفاده شود. واژه فازی معانی مختلفی دارد که از آن جمله می‌توان به واژه‌های «مبهم» و «گنگ» اشاره کرد. در نظریه فازی امکان مدل‌سازی کمیت‌های روزمره مانند «کم، متوسط و زیاد» را دارد که در ریاضیات کلاسیک قابل بیان نیستند. نظریه فازی سعی می‌کند هر اندازه که ممکن است فاصله بین مدل و واقعیت را کمتر کند. در سیستم فازی می‌توان مفاهیم مبهمی مانند کم، متوسط و زیاد را تعریف و از آن‌ها به خوبی استفاده کرد. در بخش ۲، به بررسی مقدمات توابع فازی می‌پردازیم. در بخش ۳، مقدماتی از آنالیز ریاضی را بیان کرده و وارد مبحث فازهای پیوسته می‌شویم. در بخش ۴، مفهوم فازهای مشتق‌پذیر را بیان کرده و توابع فازی را از نظر شهودی بررسی می‌کنیم.

## ۲. مفاهیم اولیه، تعاریف و قضایا

در مجموعه‌های کلاسیک برای یک عضو فقط دو حالت رخ می‌دهد. یک عضو یا به مجموعه متعلق است یا متعلق نیست، زیرا در این مجموعه‌ها مرز مشخص است؛ مانند اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۱۰ که به صورت  $\{x \in \mathbb{N} : x > 10\}$  نشان داده می‌شود. اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۱۰ دقیق و خوش تعریف است؛ اما چنانچه گفته شود «اعداد طبیعی خیلی بزرگ‌تر از ده» آنگاه عبارت خیلی بزرگ یک مفهوم مبهم و غیردقیق است. در اینجا برای مثال عدد ۹ اصلاً به مجموعه تعلق ندارد اما عدد ۱۶ کمی به مجموعه تعلق دارد و تعلق عدد ۱۲۳۴

به مجموعه بیشتر از تعلق عدد 16 است. می‌توان به میزان عضویت یک عنصر، عددی را نسبت داد. اگر  $\mu$  به‌عنوان میزان تعلق عضوی از مجموعه کلاسیک  $A$  در نظر گرفته شود، آنگاه

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

اما چنانچه  $\mu$  را به‌عنوان میزان تعلق برای مجموعه فازی  $\tilde{A}$  در نظر بگیریم، آنگاه

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 < \mu(x) \leq 1, & x \in \tilde{A}, \\ 0, & x \notin \tilde{A}. \end{cases}$$

یک مجموعه فازی از طریق تابع عضویت آن مشخص می‌شود که نموداری هموار دارد و با طرز فکر بشر بیشتر در تطابق است. در صورتی که منحنی تابع عضویت یک مجموعه کلاسیک پله‌ای 0 و 1 بوده و نمی‌تواند طرز فکر دقیق فرد را مشخص نماید. در مجموعه‌های فازی باید عضوها و میزان عضویت مشخص باشد.

**تعریف ۱.۲ ([۲]).** فرض کنیم  $X$  مجموعه مرجع<sup>۳</sup> باشد. مجموعه فازی  $\tilde{A}$  تعریف شده روی  $X$  عبارت است از اعضای  $X$  و میزان عضویت  $\mu_A(x)$ ، که در آن  $\mu_A$  تابع عضویت از  $X$  به  $[0, 1]$  هست و میزان عضویت عناصر  $A$  را مشخص می‌کند. درواقع

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) : \mu_A : X \rightarrow [0, 1]\}.$$

در حالت کلی مجموعه‌های فازی به‌صورت زوج مرتب نوشته می‌شوند. در صورتی که مجموعه مرجع گسسته<sup>۴</sup> باشد، آنگاه هر عضو و میزان عضویت آن در یک پرانتز نوشته می‌شود.

**یادآوری ۲.۲.** در این مقاله برای سهولت از نماد  $\tilde{A}(x)$  به‌جای نماد  $\mu_A(x)$  استفاده می‌کنیم. به همین علت به‌جای مجموعه فاز از تابع فاز نیز می‌توان استفاده کرد.

**مثال ۳.۲.** اگر مجموعه مرجع را  $\{3, 4, 5, 6, 9, 10\}$  در نظر بگیریم، آنگاه یک مجموعه فازی برای اعداد بزرگ‌تر از 3 به‌صورت زیر است:

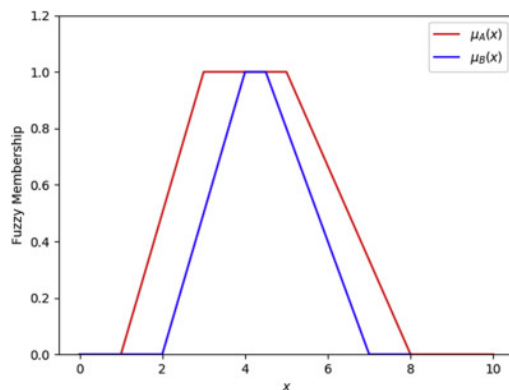
$$\{(3, 0), (4, 0.1), (5, 0.4), (6, 0.6), (9, 0.9), (10, 1)\}.$$

در صورتی که مجموعه مرجع پیوسته<sup>۵</sup> باشد، آنگاه مجموعه فازی و تابع عضویت آن به‌صورت یک تابع نوشته می‌شوند.

<sup>3</sup>Reference Set

<sup>4</sup>Discrete

<sup>5</sup>Continuous



شکل ۲: توابع فاز برای عدد نزدیک به ۴.

مثال ۴.۲. اگر مجموعه مرجع را اعداد حقیقی نامنفی در نظر بگیریم، آنگاه یک مجموعه فازی برای اعداد طبیعی نزدیک به صفر به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$\{(x, e^{-x}) : x > 0\}.$$

تعریف ۵.۲ ([۳]). فرض کنیم  $\tilde{A}$  یک مجموعه فازی از  $E$  باشد. تکیه‌گاه  $\tilde{A}$  را با نماد  $\text{supp}(\tilde{A})$  نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{supp}(\tilde{A}) = \{e \in E : \tilde{A}(e) > 0\}.$$

برای نمونه در مثال ۳.۲ داریم  $\text{supp}(\tilde{A}) = \{4, 5, 6, 9, 10\}$  و برای مثال ۴.۲،

$$\text{supp}(\tilde{A}) = (0, \infty).$$

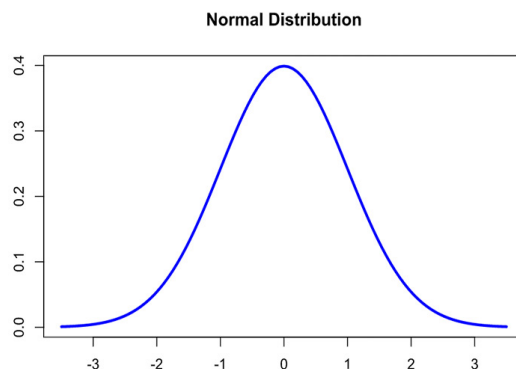
واضح است که توابع فازی تعریف شده بر یک مجموعه مرجع، یکتا نیستند. شکل ۲ نمایش دو تابع فازی برای اعداد نزدیک به ۴ است.

تعریف ۶.۲ ([۶]). مجموعه فازی  $\tilde{A}$  از  $E$  را نرمال<sup>۶</sup> گوئیم، هرگاه عضوی از  $E$  مانند  $e$  وجود داشته باشد که  $\tilde{A}(e) = 1$ .

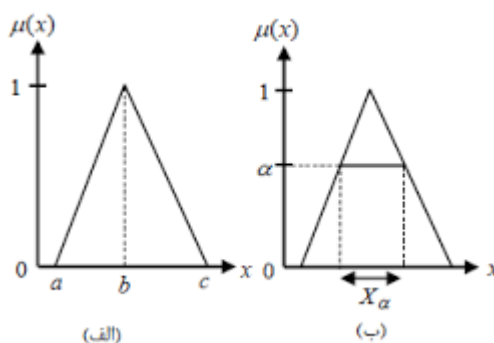
تابع فازی مثال ۳.۲ نرمال است اما برای مثال ۴.۲ چنین نیست. در فازهای نرمال همیشه عضویت قطعی<sup>۷</sup> وجود دارند. برای دیدن نمودار فازهای نرمال، شکل ۳ را ببینید.

<sup>۶</sup>Normal

<sup>۷</sup>Certainty



شکل ۳: فاز نرمال.

شکل ۴:  $\alpha$ -برش.

تعریف ۷.۲ ([۷]). فرض کنید  $\alpha$  عددی حقیقی باشد. مجموعه  $\alpha$ -برش  $\tilde{A}$  را با نماد  $\tilde{A}_\alpha$  نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A}_\alpha = \{e \in E : \tilde{A}(e) > \alpha\}.$$

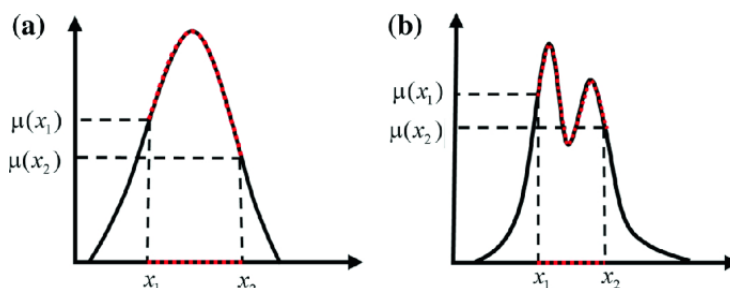
چون ممکن است  $\tilde{A}_\alpha$  روی همه عناصر  $E$  اثر نکند، پس ممکن است تابع فاز نباشد. شکل ۴ را ببینید.

تعریف ۸.۲. مجموعه فازی  $\tilde{A}$  از  $E$  را محدب<sup>۸</sup> گوئیم، هرگاه به ازای هر دو عضو  $e_1, e_2 \in E$  و هر  $t \in [0, 1]$  داشته باشیم

$$\tilde{A}(te_1 + (1-t)e_2) \leq \min\{\tilde{A}(e_1), \tilde{A}(e_2)\}.$$

هر دو مثال‌های ۳.۲ و ۴.۲ محدب هستند. چنانچه تابع فازی محدب باشد، آنگاه اگر هر دو نقطه نمودار آن را به هم وصل کنیم، بایستی نقطه مینیمم زیر خط گذرا از آن دو نقطه قرار گیرد. به عبارت دیگر نباید دارای

<sup>8</sup>Convex



شکل ۵: فاز محدب و نامحدب.

مینیمم نسبی باشد و تنها می‌تواند دارای مینیمم مطلق باشد که آن نیز تنها در ابتدا یا انتهای بازه رخ می‌دهد. نمودار توابع فاز محدب نمی‌توانند فرورفتگی داشته باشند و حداکثر دارای یک برآمدگی هستند. همچنین اگر در بازه‌ای نزولی باشند، بایستی در کل دامنه هم نزولی باشند. سیستم‌های فازی محدب با ساختار گنبدی شکلی که دارند تمایل به حرکت به سمت سیستم نرمال دارند. از آنجاکه تقعر آن‌ها به سمت پایین است، لذا این تمایل سیستم به‌کندی رخ می‌دهد. پیش‌بینی رفتار چنین سیستم‌هایی برخلاف دیگر سیستم‌ها امکان‌پذیر است و در نتیجه اطلاعات آن‌ها قابل‌دسترسی است. نمودار فازهای محدب و نامحدب در شکل ۵ داده شده‌اند. فرض کنیم  $\{\tilde{A}_n\}$  دنباله‌ای از فازهای تعریف شده بر مجموعه  $E$  باشند. اجتماع و اشتراک فازهای  $\tilde{A}_n$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bigcup_{n \geq 1} \tilde{A}_n(e) = \max\{\tilde{A}_n(e) : n \in \mathbb{N}\}.$$

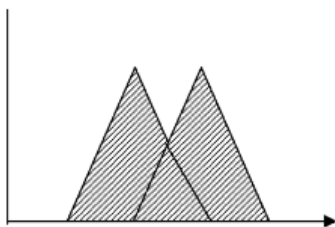
$$\bigcap_{n \geq 1} \tilde{A}_n(e) = \min\{\tilde{A}_n(e) : n \in \mathbb{N}\}.$$

واضح است که اجتماع و اشتراک فازها، توابع فاز هستند. از آنجاکه فاز اجتماع همیشه بیشترین عضویت و فاز اشتراک کمترین عضویت را نشان می‌دهد، پس آن‌ها را به ترتیب فاز بیشینه و کمینه نامیده می‌شوند. فاز بیشینه تلاش می‌کند تا بیشترین رضایتمندی یا قطعیت را معرفی کند در صورتی که فاز کمینه دنبال معرفی کمترین قطعیت است. شکل‌های ۶ و ۷ به ترتیب فازهای بیشینه و کمینه را در حالت متناهی نشان می‌دهند. حال در قضیه‌ی بعدی به روابط بین نرمال بودن فازها با فازهای بیشینه و کمینه همچنین روابط بین تکیه‌گاه آن‌ها می‌پردازیم.

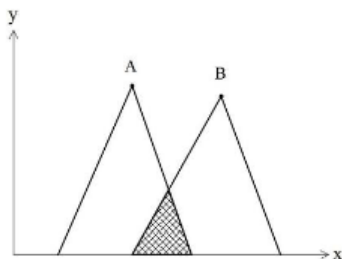
**قضیه ۹.۲.** فرض کنیم  $\{\tilde{A}_n\}$  دنباله‌ای از فازهای تعریف شده بر مجموعه  $E$  باشند. در این صورت،

(۱) دستکم یکی از فازهای  $\{\tilde{A}_n\}$  نرمال است اگر و تنها اگر فاز بیشینه آن‌ها نرمال باشد.

(۲) اگر فاز کمینه نرمال باشد، آنگاه فازهای  $\{\tilde{A}_n\}$  نرمال هستند.



شکل ۶: فاز بیشینه.



شکل ۷: فاز کمینه.

اثبات. (۱) نخست فرض کنیم به ازای  $i \in \mathbb{N}$ ، فاز  $\{\tilde{A}_i\}$  نرمال باشد. یعنی  $e_0 \in E$  وجود دارد که پس  $\tilde{A}_i(e_0) = 1$

$$\max\{\tilde{A}_n(e) : n \in \mathbb{N}\} = 1.$$

درنتیجه  $\bigcup_{n \geq 1} \tilde{A}_n(e_0) = 1$ . بنابراین  $\bigcup_{n \geq 1} \tilde{A}_n(e)$  نرمال است. بالعکس، فرض کنیم  $\bigcup_{n \geq 1} \tilde{A}_n(e)$  نرمال باشد. پس  $e_0 \in E$  وجود دارد که

$$\bigcup_{n \geq 1} \tilde{A}_n(e_0) = 1.$$

پس  $i \in \mathbb{N}$  وجود دارد که  $\tilde{A}_i(e_0) = 1$  درنتیجه  $\tilde{A}_i$  نرمال است.

(۲) فرض کنیم فاز کمینه نرمال باشد. پس  $e_0 \in E$  وجود دارد که

$$\bigcap_{n \geq 1} \tilde{A}_n(e_0) = 1.$$

درنتیجه

$$\min\{\tilde{A}_n(e) : n \in \mathbb{N}\}.$$

پس به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  داریم  $\tilde{A}_i(e_0) = 1$  درنتیجه  $\tilde{A}_n$  نرمال است.

□

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قسمت (۲) از قضیه ۹.۲ ممکن است برقرار نباشد.

مثال ۱۰.۲. فازهای  $\tilde{A}_1$  و  $\tilde{A}_2$  به صورت زیر نرمال هستند:

$$\tilde{A}_1 := \{(x, 1), (y, 0.5)\}, \tilde{A}_2 := \{(x, 0.5), (y, 1)\}.$$

اما واضح است که

$$\tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2 = \{(x, 0.5), (y, 0.5)\}$$

نرمال نیست.

قضیه ۱۱.۲. فرض کنیم  $\{\tilde{A}_n\}$  دنباله‌ای از فازهای تعریف شده بر فضای  $E$  باشند. در این صورت:

$$\text{supp}\left(\bigcup_{n \geq 1} \tilde{A}_n\right) = \bigcup \{\text{supp}(\tilde{A}_n) : n \in \mathbb{N}\} \quad (۱)$$

$$\text{supp}\left(\bigcap_{n \geq 1} \tilde{A}_n\right) = \bigcap \{\text{supp}(\tilde{A}_n) : n \in \mathbb{N}\} \quad (۲)$$

□

اثبات. با توجه به تعریف فاز بیشینه و کمینه، اثبات بدیهی است.

مثال ۱۲.۲. اگر مجموعه مرجع را اعداد حقیقی مثبت در نظر بگیریم، آنگاه توابع فازی  $\tilde{A}_1$  و  $\tilde{A}_2$  را برای افراد قد بلند به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{A}_1(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ -0.5 + x, & 1 \leq x \leq 1.5, \\ 1, & 1.5 \leq x, \end{cases}$$

$$\tilde{A}_2(x) = \begin{cases} 0.5x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 1.5, \\ x - 1, & 1.5 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x. \end{cases}$$

در این صورت فاز بیشینه و کمینه به صورت زیر هستند:

$$\tilde{A}_1(x) \cap \tilde{A}_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 1.5, \\ x - 1, & 1.5 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x, \end{cases}$$

$$\tilde{A}_1(x) \cup \tilde{A}_2(x) = \begin{cases} 0.5x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 1.5, \\ -0.5 + x, & 1.5 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x. \end{cases}$$

در این مثال فاز بیشینه تمایل دارد تا حد امکان افراد را قدبلند معرفی نماید اما فاز کمینه تمایل دارد تا برای افراد قدبلند شرایط سخت‌تری در نظر بگیرد و تا حد امکان افراد را قدبلند لحاظ نمی‌کند.

یکی از کاربردهای فازهای کمینه کمک به تصمیم‌گیری‌های فازی است. مثال بعد چنین مطلبی را بیان می‌کند.

مثال ۱۳.۲. یک شرکت ساختمانی زمین‌هایی با مساحت 150، 200، 280، 350، 750، 1200 مترمربع دارد. می‌خواهد از بین آن‌ها زمین مناسبی برای ساختن مجتمع 8 واحدی انتخاب کند. فرض کنید توابع فازی زمین مناسب و زمین بزرگ به صورت زیر باشند:

$$\tilde{L} = \{(0, 150), (0.1, 300), (0.3, 280), (0.6, 350), (0.8, 500), (1, 750)\},$$

$$\tilde{S} = \{(0.8, 150), (1, 300), (1, 280), (0.7, 350), (0.3, 500), (0, 750)\}.$$

مایلیم زمین بهینه را بیابیم. چون زمین موردنظر باید هر دو خاصیت مناسب و بزرگ بودن را داشته باشد، پس باید اشتراک آن‌ها را در نظر بگیریم.

$$\tilde{L} \cap \tilde{S} = \{(0, 150), (0.1, 300), (0.3, 280), (0.6, 350), (0.3, 500), (0, 750)\}.$$

حال باید زمینی را انتخاب کنیم که بیشترین مقدار عضویت را داشته باشد. پس انتخاب بهینه زمین با مساحت 350 مترمربع است.

۳. توابع به‌طور یکنواخت پیوسته

تعاریف و نمادهای این بخش از مرجع [۷] گرفته شده‌اند.

تعریف ۱.۳. مجموعه  $E$  در صورتی یک فضای متریک است که به هر دو نقطه  $a$  و  $b$  از  $X$  عدد حقیقی مانند  $d(a, b)$  به نام فاصله<sup>۹</sup> از  $a$  تا  $b$  طوری مربوط شده باشد که

$$(۱) \text{ هرگاه } a \neq b, \text{ آنگاه } d(a, b) > 0 \text{ و } d(a, a) = 0.$$

$$(۲) d(a, b) = d(b, a).$$

<sup>۹</sup>Distance

(۳) به ازای هر  $e \in E$  داشته باشیم  $d(a, b) \leq d(a, e) + d(e, b)$ . هر تابع برخوردار از این سه خاصیت را یک متر نامند.

در مجموعه اعداد حقیقی، قدر مطلق یک متر است و آن را متر اقلیدسی نامند.

تعریف ۲.۳. فرض کنیم  $E$  یک فضای متری<sup>۱۰</sup> باشد.

(۱) یک همسایگی<sup>۱۱</sup> نقطه  $p$  به شعاع  $r$  مجموعه‌ای مانند  $N_r(p)$  است که به صورت  $N_r(p) = \{e \in E : d(p, e) < r\}$  تعریف می‌شود. در فضای اقلیدسی همسایگی‌ها بازه‌های باز هستند.

(۲) نقطه  $p$  یک نقطه درونی<sup>۱۲</sup>  $\tilde{A}$  است، هرگاه یک همسایگی از  $p$  مانند  $N$  وجود داشته باشد که  $N \subset \tilde{A}$ .

(۳) مجموعه  $A$  باز<sup>۱۳</sup> است، هرگاه هر نقطه از آن نقطه درونی باشد.

تعریف ۳.۳. دنباله  $e_n$  در فضای متری  $E$  را همگرا<sup>۱۴</sup> به  $e$  گوئیم، هرگاه به ازای هر  $\epsilon > 0$  عدد صحیحی مانند  $N$  وجود داشته باشد که اگر  $n > N$ ، آنگاه  $d(e_n, e) < \epsilon$ .

تعریف ۴.۳. نگاشت  $f$  را پیوسته گوئیم، هرگاه تصویر معکوس هر مجموعه باز در  $Y$  یک مجموعه باز در  $X$  باشد.

زمانی که تابع فاز پیوسته باشد، تغییر عضویت ناگهانی رخ نمی‌دهد. فازهای پیوسته دارای امنیت بیشتری هستند. برای مثال فرض کنیم مجموعه مرجع بازه  $[0, 20]$  باشد. توابع فازی  $\tilde{A}_1$  و  $\tilde{A}_2$  که میزان دشواری صعود به قله با ارتفاع ۲۰ را مشخص می‌کنند، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{A}_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{100}x, & 0 \leq x \leq 10, \\ 1, & 10 \leq x \leq 20, \end{cases}$$

$$\tilde{A}_2(x) = \frac{1}{20}x.$$

تابع فاز  $\tilde{A}_1$  وقتی به ارتفاع ۱۰ می‌رسیم، تغییر ناگهانی می‌دهد و قابل پیش‌بینی نیست. اما با استفاده از تابع فازی  $\tilde{A}_2$  می‌توان آینده صعود را پیش‌بینی کرد.

<sup>10</sup>Metric space

<sup>11</sup>Neighborhood

<sup>12</sup>Internal

<sup>13</sup>Open

<sup>14</sup>Converge

**تعریف ۵.۳.** دنباله‌ای از توابع مانند  $f_n$  بر  $A$  به طور یکنواخت<sup>۱۵</sup> به تابع  $f$  همگراست، هرگاه به ازای هر  $\epsilon > 0$  عدد صحیحی مانند  $N$  موجود باشد که برای هر  $x \in A$  و  $n > N$  داشته باشیم  $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ .  
در این صورت می‌نویسیم  $f_n \xrightarrow{u} f$

اگر  $\tilde{A}_n \xrightarrow{u} \tilde{A}$ ، آنگاه می‌توان میزان عضویت دنباله  $\{\tilde{A}_n(x)\}$  را به کمک  $\tilde{A}(x)$  تقریب زد.

**مثال ۶.۳.** (۱) فرض کنیم مجموعه مرجع بازه  $[0, 4]$  باشد. به ازای هر عدد طبیعی تابع فازی  $\tilde{A}_n$  را میزان رضایت‌مندی شهروندان از عملکرد دولت در بازه چهارساله به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{A}_n(x) = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{1}{n}\right)x.$$

در این صورت

$$\tilde{A}_n \xrightarrow{u} \tilde{A}(x) = \frac{1}{8}x.$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که هرچه قدر به پایان دوره چهارساله نزدیک می‌شویم، رضایت شهروندان کم شده و میزان رضایت آن‌ها به ۱۲.۵ درصد از آغاز عملکرد نزدیک می‌شود.

(۲) فرض کنیم مجموعه مرجع بازه  $[0, 1000]$  باشد. به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  تابع فازی میزان بازدهی خاک یک منطقه را در پایان سال  $n$  ام به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\tilde{A}_n(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2n}, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1000. \end{cases}$$

در این صورت

$$\tilde{A}_n \xrightarrow{u} \tilde{0},$$

یعنی با گذشت زمان میزان بازدهی خاک به صفر نزدیک می‌شود.

**قضیه ۷.۳.** اگر  $\tilde{A}_n \xrightarrow{u} \tilde{A}$ ، آنگاه عدد طبیعی  $N$  وجود دارد به طوری که به ازای هر  $n > N$  داریم

$$\text{supp}(\tilde{A}) \subseteq \text{supp}(\tilde{A}_n).$$

**اثبات.** فرض کنیم  $e_0 \in \tilde{A}$ . بنابراین  $\tilde{A}(e_0) > 0$ . چون  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}_n(e_0) = \tilde{A}(e_0)$  پس عدد طبیعی  $N$  وجود دارد که به ازای هر  $n \geq N$  داریم

$$|\tilde{A}_n(e_0) - \tilde{A}(e_0)| < \frac{1}{2}\tilde{A}(e_0).$$

در نتیجه  $\tilde{A}_n(e_0) > \frac{1}{2}\tilde{A}(e_0) > 0$  پس  $e_0 \in \tilde{A}_n$  به ازای هر  $n \geq N$  برقرار است.  $\square$

<sup>15</sup>Uniformly

به عنوان نتیجه ای از قضیه ی قبل داریم.

نتیجه ۸.۳.

(۱)

$$\text{supp}(\tilde{A}) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{supp}(\tilde{A}_n).$$

(۲)

$$\text{supp}(\tilde{A}) \subseteq \bigcap_{n \geq N} \text{supp}(\tilde{A}_n).$$

قضیه ۹.۳. اگر  $\tilde{A}_n$  دنباله ای از فازهای نرمال بر فضای فشرده  $E$  باشند که به  $\tilde{A}$  به طور یکنواخت همگرا باشد، آنگاه  $\tilde{A}$  نرمال است.

اثبات. با توجه به فرض، به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  عنصر  $e_n$  وجود دارد که  $\tilde{A}_n(e_n) = 1$ . در نتیجه  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  دنباله ای از فضای متری فشرده  $E$  است. پس زیردنباله ی<sup>۱۶</sup>  $\{e_{i_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  وجود دارد که به  $e$  همگراست. همچنین  $\tilde{A}_n \xrightarrow{u} \tilde{A}$  پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}_{i_n}(e_{i_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}_{i_n}(e) = \tilde{A}(e).$$

□

از طرفی  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}_{i_n}(e) = \tilde{A}(e)$  پس  $\tilde{A}(e) = 1$ .

مثال بعد نشان می دهد که عکس قضیه ۹.۳ برقرار نیست.

مثال ۱۰.۳. توابع فاز  $\tilde{A}_n(x) = 1 - \frac{1}{n}$  بر بازه  $[0, 1]$  تعریف می کنیم. در این صورت

$$\tilde{A}_n \xrightarrow{u} 1.$$

در اینجا  $\tilde{A} := 1$  نرمال است اما فازهای  $\tilde{A}_n$  چنین نیستند.

قضیه ۱۱.۳. فرض کنید  $\{\tilde{A}_n\}$  دنباله ای از فازهای تعریف شده بر  $E$  باشند و  $\tilde{A}_n \xrightarrow{u} \tilde{A}$ .

(۱) اگر  $\tilde{A}$  یک به یک<sup>۱۷</sup> و محدب باشد، آنگاه از مرتبه ای به بعد فازهای  $\tilde{A}_n$  محدب هستند.

(۲) اگر فازهای  $\tilde{A}_n$  محدب و تعداد نامتناهی از آنها یک به یک باشند، آنگاه فاز  $\tilde{A}$  محدب است.

اثبات. (۱) فرض کنیم تابع فاز  $\tilde{A}$  محدب باشد. گیریم  $t \in [0, 1]$  و  $e_1, e_2 \in E$  دلخواه باشند. بدون آنکه از کلیت اثبات کاسته شود، فرض کنیم  $\tilde{A}(e_1) \leq \tilde{A}(e_2)$ . قرار می دهیم  $e = te_1 + (1-t)e_2$ . پس  $\tilde{A}(e) \geq \tilde{A}(e_1)$ . اگر  $e = e_1$ ، آنگاه اثبات تمام است. پس فرض کنیم  $e \neq e_1$ . در نتیجه

<sup>16</sup>Sub-sequence

<sup>17</sup>One to one

$\tilde{A}(e) - \tilde{A}(e_1) > 0$ . قرار می‌دهیم  $\epsilon := \frac{\tilde{A}(e) - \tilde{A}(e_1)}{2}$ . با توجه به تعریف  $N \in \mathbb{N}$  وجود دارد که به ازای هر  $n \geq N$  داریم

$$|\tilde{A}(e) - \tilde{A}_n(e)| < \epsilon, |\tilde{A}(e_1) - \tilde{A}_n(e_1)| < \epsilon.$$

در نتیجه

$$\tilde{A}_n(e) > \tilde{A}(e) - \frac{\tilde{A}(e) - \tilde{A}(e_1)}{2} = \frac{\tilde{A}(e) + \tilde{A}(e_1)}{2} > \tilde{A}(e_1) + \epsilon.$$

از طرفی  $\tilde{A}(e_1) + \epsilon > \tilde{A}_n(e_1)$ . پس  $\tilde{A}_n(e) > \tilde{A}_n(e_1)$  و در نتیجه  $\tilde{A}_n$  محدب است. (۲) اثبات این قسمت مشابه (۱) است.

□

**قضیه ۱۲.۳** ([۷]). اگر  $\{\tilde{A}_n\}$  دنباله‌ای از فازهای پیوسته بر  $E$  باشند که  $\tilde{A}_n \xrightarrow{u} \tilde{A}$  آنگاه،  $\tilde{A}$  پیوسته است.

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه ۱۲.۳ برقرار نیست.

**مثال ۱۳.۳**. فرض کنیم  $\tilde{A}_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n$ . در این صورت به ازای هر  $x \in [0, 1]$  داریم  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}_n(x) = 0$ . در اینجا  $\tilde{A}(x) = 0$  و  $\tilde{A}_n$  به‌طور یکنواخت پیوسته‌اند اما  $\tilde{A}_n \xrightarrow{u} \tilde{A}$  برقرار نیست [۷].

#### ۴. مشتق تابع فاز

مشتق<sup>۱۸</sup> تابع فاز، آهنگ تغییرات عضویت عناصر مجموعه مرجع را نشان می‌دهد. زمانی که مشتق مثبت باشد، یعنی عضوهای مجموعه مرجع قطعیت بیشتری دارند. همچنین هراندازه مقدار مشتق بزرگ‌تر باشد، یعنی میل افراد به رضایتمندی یا قطعیت عضوها در حال افزایش است. میزان قطعیت فازهای مشتق‌پذیر تقریباً قابل تشخیص است. چنانچه تابع فازی در  $e_0$  مشتق‌پذیر باشد، آنگاه در یک همسایگی از آن نقطه رفتار تابع فاز مشابه میزان قطعیت در نقطه  $e_0$  است. اما چنانچه مشتق‌پذیر نباشد، آنگاه میزان قطعیت ممکن است در نقاطی بسیار نزدیک به نقطه  $e_0$  نیز متفاوت با قطعیت در نقطه  $e_0$  باشند.

<sup>18</sup>Derivative

مثال ۱.۴. برای نمرات خوب مجموعه مرجع را بازه  $[0, 20]$  در نظر می‌گیریم. توابع فازی  $\tilde{A}_1(x)$  و  $\tilde{A}_2(x)$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{A}_1(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 10, \\ 10x - 100, & 10 < x < 10.1, \\ 1, & 10.1 \leq x \leq 20, \end{cases}$$

و

$$\tilde{A}_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 10, \\ \frac{1}{100}(x - 10)^2, & 10 \leq x \leq 20. \end{cases}$$

با توجه به توابع فوق از نظر خانواده‌ها نمره 10 بسیار ضعیف است در صورتی که نمره 10.05 برای خانواده دوم همچنان ضعیف درحالی که برای خانواده اولی نمره‌ای خوب لحاظ می‌شود. این اختلاف ناشی از این است که تابع فاز  $\tilde{A}_2(x)$  در 10 مشتق‌پذیر است بنابراین تابع فاز هموار بوده و رفتار سیستم در نقاط نزدیک به هم، مشابه هم هستند اما تابع فاز در  $\tilde{A}_1(x)$  چنین نیست. این اختلاف برای حالتی که فاز پیوسته هم نباشد، بیشتر می‌شود.

مثال ۲.۴. در یک کوره حرارتی برای کنترل سیستم حرارتی نیاز به مدل‌سازی مجموعه‌های حرارت کم، حرارت متوسط و حرارت زیاد داریم. اگر مجموعه مرجع بازه  $[0, 400]$  باشد، آنگاه تابع فازی برای حرارت کم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{A}_l(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 240, \\ \frac{400-x}{160}, & 240 < x < 400, \\ 0, & 400 \leq x. \end{cases}$$

در اینجا برای دمای کمتر از 240 یا بیشتر از 400 مقدار مشتق برابر صفر است پس مقدار تابع فاز با حرارت کم برای این بازه دمایی ثابت است. یعنی دمای کمتر از 240 درجه حرارت پایین و دمای بیشتر از 400 حرارت زیاد محسوب می‌شود. همچنین مقدار مشتق در بازه  $[240, 400]$  منفی و ثابت است. پس تابع فاز حرارت کم نزولی است. پس زمانی که دما از 240 به 400 نزدیک می‌شود، میزان حرارت بر اساس یک تابع خطی زیاد می‌شود.

مثال ۳.۴. خانواده دوم مربوط به مثال ۱.۴ از نمرات خوب را در نظر بگیرید. در این صورت

$$\tilde{A}_2'(11) = \frac{1}{50} < \frac{1}{10} = \tilde{A}_2'(15).$$

پس از نظر خانواده دوم آهنگ قطعیت خوب بودن نمره 15 بسیار بیشتر از نمره 11 است. برای مثال وقتی فردی از این خانواده ابتدا نمره 15 اخذ کرده باشد، سپس نمره 16 را کسب کند، رضایت خانواده به مراتب بیشتر از زمانی است که پیشرفت فرد از نمره 11 به 13 باشد.

از آنجا که مقدار مشتق ممکن است منفی باشد، پس مشتق یک فاز ممکن است خود یک فاز نباشد. اما مشتق فازهای صعودی با شرط  $\tilde{A}' \leq 1$  چنین مشکلی را ندارد و نتیجه تابع فاز هستند که ما آن‌ها را فاز مشتق نام‌گذاری می‌کنیم.

اگر  $\tilde{A}'(e) = 0$  برابر صفر باشد، آنگاه  $e$  یک نقطه بحرانی تابع فاز است. چنانچه  $\tilde{A}''(e)$  منفی (مثبت) شود، آنگاه تابع فاز در  $e$  به بیشترین (کمترین) قطعیت خود می‌رسد. در حالت کلی نرمال بودن یا نبودن یک فاز به مشتق آن فاز وابسته نیست. یعنی یک فاز در عین نرمال بودن، ممکن است دارای فاز مشتق نرمال یا غیرنرمال باشد.

قضیه ۴.۴. (۱) فازهای مشتق همواره محدب هستند.

(۲) تکیه‌گاه فاز مشتق ناتهی است اگر و تنها اگر تابع فاز، ثابت نباشد.

اثبات. (۱) فرض کنیم  $\tilde{A}$  یک فاز مشتق باشد. با توجه تعریف فاز، بایستی  $\tilde{A}' \geq 0$ . پس تابع فاز

تابعی صعودی است. حال فرض کنیم  $e_1 \leq e_2 \in E$  در این صورت

$$e_1 \leq te_1 + (1-t)e_2 \leq e_2.$$

پس

$$\tilde{A}(e_1) \leq \tilde{A}(te_1 + (1-t)e_2) \leq \tilde{A}(e_2).$$

از طرفی

$$\tilde{A}(e_2) \leq \tilde{A}(te_1 + (1-t)e_2).$$

در نتیجه

$$\tilde{A}(te_1 + (1-t)e_2) \geq \tilde{A}(e_1) = \min\{\tilde{A}(e_1), \tilde{A}(e_2)\}$$

و اثبات تمام است.

(۲) فرض کنیم  $\tilde{A}'$  تابع فاز باشد و  $\text{supp } \tilde{A}' \neq \emptyset$ . پس عنصر  $e \in E$  وجود دارد که  $\tilde{A}'(e) > 0$ .

پس تابع فاز ثابت نیست. بالعکس، فرض کنیم تابع فاز  $\tilde{A}$  ثابت نباشد. پس  $e_1 < e_2 \in E$

وجود دارند که  $\tilde{A}(e_1) \neq \tilde{A}(e_2)$ . با توجه به قضیه مقدار میانگین عدد  $e \in [e_1, e_2]$  وجود دارد

که  $\tilde{A}'(e) = \frac{\tilde{A}(e_2) - \tilde{A}(e_1)}{e_2 - e_1} > 0$ . در نتیجه  $\tilde{A}'(e) > 0$  پس  $\text{supp}(\tilde{A}') \neq \emptyset$ .

□

قضیه ۵.۴. فرض کنیم  $\tilde{A}$  تابع فاز پیوسته‌ای بر بازه‌ی  $[a, b]$  باشد. در این صورت دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌های

$$A_n(X) = \int_0^1 c_n \tilde{A}(1 - (t - x)^2)^n dt$$

وجود دارد که  $A_n \xrightarrow{u} \tilde{A}$ .

## ۵. نتیجه‌گیری

بررسی و تحلیل خواص توابع فازی به کمک ساختارهای آنالیزی امکان‌پذیر است. ساختارهای آنالیزی مانند پیوستگی، مشتق‌پذیری و غیره باعث به وجود آمدن نگرش‌های جدیدی در منطق فازی می‌شوند. ارتباط بین منطق فازی و منطق کلاسیک به کمک این ساختارها امکان‌پذیر بوده و باعث می‌شود تا عدم قطعیت‌های موجود در تصمیم‌گیری‌های انسانی را توصیف نمایند. به‌طورکلی مسائل پیچیده فازی به کمک ساختارهای آنالیزی ساده‌تر می‌شوند. حتی اگر پارامترهای ما نامشخص یا نادقیق باشند. زیرا می‌توان رفتار یک سیستم را به کمک سیستمی دیگر که پارامترهایی شناخته‌شده دارند، بررسی و پیش‌بینی کرد.

## مراجع

- [۱] ا. افضلی، م. کوچکی رفسنجانی و آ. برومند سعید، مدل تصمیم‌گیری چند هدفه فازی برای انتخاب تأمین‌کننده با رویکرد تصمیم‌گیری گروهی، همایش ملی علوم و مهندسی کامپیوتر، نجف آباد، ۱۳۹۰.
- [۲] ح. رضایی و م. رشید پور، نگاشت مجموعه‌های فازی نوع ۲، ۱۳۹۸.
- [۳] ا. رنجبر یانه سری و م. اصغری لاریمی، اجتماع زیرگروه‌های فازی و نرمال فازی، همایش منطقه‌ای پژوهشهای نوین در ریاضی، گرگان، ۱۳۹۰.
- [۴] ش. سرگلزانی و ح. میش مست نهی، مروری بر مجموعه‌های فازی نوع-۲، ۱۳۹۸.
- [۵] ا. کیخا و ح. میش مست نهی، ارائه مدل نوین ارزیابی و رتبه بندی کارکنان، سازمان‌ها و حل مسائل تصمیم‌گیری چندشاخصه در محیط فازی مردد، ۱۴۰۰.

[6] A. Najafi, and A. Borumand Saeid, *Fuzzy Points in BE-Algebras*, 1980.

[7] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed. McGraw-Hill, New York, 1976.



## A COMPARATIVE STUDY ON THE RELATIONSHIP BETWEEN STATISTICS AND DATA SCIENCE

AMIR HOSSEIN GHATARI<sup>1\*</sup>, ELHAM TABRIZI<sup>2</sup>, AND EHSAN BAHRAMI SAMANI<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Department of Statistics, Faculty of Mathematics and Computer Science, Amirkabir University of Technology, Tehran, IRAN

[a.h.ghatari@aut.ac.ir](mailto:a.h.ghatari@aut.ac.ir)

<sup>2</sup>Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Science and Computer, Kharazmi University, Tehran, Iran

[elham.tabrizi@khu.ac.ir](mailto:elham.tabrizi@khu.ac.ir)

<sup>3</sup>Department of Statistics, Faculty of Mathematical Science, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

[ehsan\\_bahrami\\_samani@yahoo.com](mailto:ehsan_bahrami_samani@yahoo.com)

**Abstract.** The study of the relation between data science as an emergent phenomenon in 21st century and statistics, an original and applicable science, is one the most challenged topics by different researchers. Data science is dependent to some theoretical basics such as linear models, clustering and etc, which are from statistics. Some of the scientists believe that data science is begotten from statistics and consider it as statistics' offspring. Some others consider data science as a branch of statistics using modern computational techniques. Also, there is an uncommon idea that considers data science as a separated scientific field from statistics. In this paper, we recall theoretical basics of data science and bring up comments and interpretations of some well-known scientists about the fact that data science is not separate from statistics. Finally, we consider Statistics<sup>+</sup> as another name of data science. Additionally, this study aims to explore the practical implications of this relationship by examining how advancements in data science continue to reshape and augment statistical methodologies. Through a comprehensive review of contemporary applications, we aim to illustrate the dynamic interplay between data science and statistics, illuminating their evolving synergy.

2010 Mathematics Subject Classification. 97K70, 97D10.

Keywords. Statistics, Statistics<sup>+</sup>, Data Science, Machine Learning.

Date: Received 20-1-2024 Revised 29-2-2024 Accepted 28-5-2024 Available Online 27-9-2023

©Ferdowsi University of Mashhad.



## مطالعه‌ای تطبیقی بر ارتباط بین آمار و علم داده‌ها

امیرحسین قطاری<sup>۱\*</sup>، الهام تبریزی<sup>۲</sup>، و احسان بهرامی سامانی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> گروه آمار، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران.

a.h.ghatari@aut.ac.ir

<sup>۲</sup> گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران.

elham.tabrizi@khu.ac.ir

<sup>۳</sup> گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران.

ehsan\_bahrami\_samani@yahoo.com

چکیده. ارتباط میان علم داده‌ها به‌عنوان پدیده‌ای نوظهور در قرن ۲۱ با دانش ریشه‌دار و کاربردی آمار همواره مورد بحث و تبادل نظر میان پژوهشگران مختلف است. علم داده‌ها در میدان عمل، متکی به مبانی نظری مختلفی از جمله احتمالات، مدل‌های خطی و غیرخطی، رده‌بندی، روش‌های بازنمونه‌گیری، خوشه‌بندی و... است که جملگی از مبانی نظری علم آمار هستند. برخی از دانشمندان بر این باورند که علم داده‌ها برخاسته از آمار بوده و مولود این دانش سنتی است. برخی علم داده‌ها را شاخه‌ای از آمار می‌دانند که تکنیک‌های محاسباتی نرم افزاری نوین را به‌کار بسته است. همچنین، یک نظر نامرسوم نیز این است که علم داده‌ها فارغ از آمار بوده و بر آمار استوار نشده است. در این نوشتگان، ضمن بررسی پایه‌های نظری علم داده‌ها، بررسی شباهت مبانی نظری آن با آمار و نقد و بررسی نظرات برخی از صاحب‌نظران عصر حاضر این گزاره را که «علم داده‌ها عملاً از آمار جدا نیست و همان آمار است با ابزارهای نوین» به‌عنوان خروجی این پژوهش مطرح کرده و لقب آمار<sup>+</sup> را برای علم داده‌ها در نظر می‌گیریم.

2010 Mathematics Subject Classification. 97K70, 97D10.

واژگان کلیدی. آمار، آمار<sup>+</sup>، علم داده‌ها، یادگیری ماشین.  
تاریخ: دریافت ۱۴۰۲/۱۰/۳۰ بازنگری ۱۴۰۲/۱۲/۱۰ پذیرش ۱۴۰۳/۳/۸ انتشار برخط ۱۴۰۲/۷/۵  
نحوه ارجاع به این مقاله: ا.ح. قطاری، ا. تبریزی، ا. بهرامی سامانی، مطالعه‌ای تطبیقی بر ارتباط بین آمار و علم داده‌ها، به سوی علوم ریاضی، ۴ (۱۴۰۳)، شماره ۱، ۱۹-۳۱.  
© دانشگاه فردوسی مشهد.

## ۱. مقدمه

میان علم آمار و علم داده‌ها<sup>۱</sup> ارتباط تنگاتنگی وجود دارد و بسیاری از روش‌های تحلیل داده از حوزه‌ی علم آمار اخذ شده است؛ تا جایی که ارتباط علم داده‌ها و علم آمار مورد بحث برخی پژوهشگران در قرن ۲۱ شده است. این که آیا علم داده‌ها شاخه‌ای از علم آمار است؟ یا این که بستگی به آمار ندارد و تنها از آمار استفاده می‌کند؟ همچنین، آیا علم داده‌ها بیشتر به علوم کامپیوتر نزدیک است تا آمار؟ از جمله سؤالاتی هستند که در ضمن این مسئله مطرح شده‌اند. همواره نظرات مختلفی در مورد پاسخ به سؤالات فوق مطرح شده است. بهترین آغاز برای بررسی مسئله و پاسخ به سؤالات فوق و البته سؤالاتی از این قبیل، اشاره به تعاریف علم داده‌ها و آمار است که در نشریه انجمن آمار سلطنتی انگلستان و در مقاله دیگل<sup>۲</sup> [۱۲] به کار رفته‌اند:

- آمار: این علم، دانش مطالعه‌ی مجموعه داده‌ها، تحلیل، تفسیر، نمایش و سازمان‌دهی آن‌هاست.
- علم داده‌ها: استخراج اطلاعات از داده‌ها است. فن‌ها و نظریه‌های مطرح شده در زمینه‌های مختلف علوم ریاضی، آمار و همچنین فناوری اطلاعات<sup>۳</sup> را برای رسیدن به این هدف به کار می‌بندد.

به‌وضوح از تعریف این دو علم درمی‌یابیم که تقریباً هدف هر دو یک مقصد است با این تفاوت که آمار با ظاهری که امروزه مشاهده می‌کنیم در آغاز قرن بیستم و با مشارکت دانشمندانی چون فرانسیس گالتون<sup>۴</sup>، رونالد فیشر<sup>۵</sup>، کارل پیرسون<sup>۶</sup> و.... شکلی نظام‌مند به خود گرفته است و در طی سالیان متمادی رشدی نظری و کاربردی داشته است؛ درحالی‌که علم داده‌ها با اهدافی مشابه آمار، در قرن ۲۱ پای به عرصه علوم نهاده است. به بیان دیگر، علم داده‌ها به‌طور مستقیم با فن‌آوری‌های نوین و پیشرفته ارتباط داشته و به استخراج مفاهیم از داده‌ها و تولید محصولات داده محور می‌پردازد.

برخی از دانشمندان، علم داده‌ها را زیرمجموعه‌ی آمار خوانده‌اند. از جمله پژوهش‌های هم‌راستا با این نظر، می‌توان از گودمن<sup>۷</sup> و همکاران [۱۷] و سینگپروالا<sup>۸</sup> [۲۸] نام برد. همچنین کسلا<sup>۹</sup> و همکاران [۷] معتقدند که آمار ریشه‌ی پیدایش دانشی است که به‌عنوان علم ساختاردهی، طبقه‌بندی و تحلیل داده شناخته می‌شود. در

---

<sup>1</sup>Data Science

<sup>2</sup>Diggle

<sup>3</sup>Information Technology

<sup>4</sup>Francis Galton

<sup>5</sup>Ronald Fisher

<sup>6</sup>Karl Pearson

<sup>7</sup>Goodman

<sup>8</sup>Singpurwalla

<sup>9</sup>Casella

یک گزارش اینترنتی برای نشریه‌ی پرایس اکونومیکس<sup>۱۰</sup>، بهاردواج<sup>۱۱</sup> [۲] به بررسی تفاوت‌های علم داده‌ها و آمار از دیدگاه‌های مختلف پرداخته است.

ازجمله موارد دیگری که از علل پیدایش علم داده‌ها محسوب می‌شود؛ نیاز مبرم به گسترش و تعمیم فن‌های محاسباتی آماری در تحلیل داده‌ها در دنیای امروز است. چمبرز<sup>۱۲</sup> [۸] از قُدم‌ا در تحقیق و بررسی درباره‌ی نیاز به این مسئله بود. وی ازجمله پژوهشگرانی است که در قرن ۲۱م در زمره‌ی موافقین این گزاره است که علم داده‌ها و مفاهیم مورداستفاده در آن ریشه‌ی آماری دارند. در پژوهشی به‌روزتر در مورد ارتباط میان علم داده‌ها و آمار، وایز<sup>۱۳</sup> و ایکشتات<sup>۱۴</sup> [۳۰]، به بررسی تأثیرات آمار در پیدایش علم داده‌ها پرداخته‌اند. آن‌ها معتقدند که آمار نقشی حیاتی در تشکیل علم داده‌ها و فراهم آوردن مفاهیم اولیه‌ی آن دارد. دیگر پژوهش توسط کارمیشل<sup>۱۵</sup> و مارون<sup>۱۶</sup> [۶] انجام شده است. آن‌ها این سؤال را که علم داده‌ها ریشه‌ی آماری دارد یا خیر را در ابعاد مختلف ازجمله نظرات سایر دانشمندان و حتی عملکرد در مسائل کاربردی، موردبررسی قرار دادند. پژوهشگران متعددی درباره‌ی این‌که علم داده‌ها در مسیر به‌روزرسانی و تکامل آمار به وجود آمده است؛ تحقیق و بررسی کرده‌اند. برای اطلاعات بیشتر در این باره به [۲۳، ۱۰، ۱۸، ۲۰، ۲۶] مراجعه شود.

در این مقاله به واکاوی جزئی‌تر اهداف علم داده‌ها، ابزار مورداستفاده در این علم و مقایسه‌ی آن با مفاهیم و ابزارهای آماری پرداخته و نظرات برخی از دانشمندان حال حاضر را درباره‌ی ارتباط این دو گرایش از علم موردنقد و بررسی قرار خواهیم داد. درنهایت می‌خواهیم به این سؤال پاسخ دهیم که آیا علم داده‌ها چیزی جدای از علم آمار است و یا تنها یک پدیده‌ی پیشرفته در ضمن آمار و متناسب با نیاز عصر حاضر است؟ هدف ثانویه‌ی این مقاله ارائه‌ی یک معرفی عمومی از آمار و علم داده‌ها به همراه برخی از مشاهیر و فعالان در این زمینه‌ها به نحوی است که فعالان علمی پژوهشی خارج از این دو حوزه را نیز همراه خود کرده و اطلاعات و منابع سودمندی درباره‌ی آمار و علم داده‌ها در اختیار این طیف از خوانندگان مقاله قرار دهد.

## ۲. علم داده‌ها، ظهور، اهداف و ابزارها

۱.۲. ظهور علم داده‌ها. عبارت علم داده‌ها بیش از دو دهه است که موجودیت دارد. با استناد به گزارش منتشرشده توسط جیل پرس<sup>۱۷</sup> [۲۵]، ویلیام کلیولند<sup>۱۸</sup> اولین کسی است که اصطلاح علم داده‌ها را در سال

<sup>10</sup>priceonomics

<sup>11</sup>Bhardwaj

<sup>12</sup>Chambers

<sup>13</sup>Weihs

<sup>14</sup>Ickstadt

<sup>15</sup>Carmichael

<sup>16</sup>Marron

<sup>17</sup>Press

<sup>18</sup>William Cleveland

۲۰۰۱ مطرح کرده است. وی در مقاله [۹] «علم داده‌ها: برنامه‌ای برای گسترش جنبه‌های فنی در رشته آمار» پیشنهاد کرد که علم داده‌ها به عنوان رشته‌ای مستقل شناخته شود. کیلوند این رشته‌ی جدید را مرتبط با علوم کامپیوتر و داده‌کاوی می‌داند. وی بر این باور بود که منافع استفاده از یک تحلیلگر داده محدود است. چون مهندسين کامپیوتر شناخت کمی از روش‌های کار با داده دارند و دانش محاسباتی متخصصین آمار هم محدود است؛ بنابراین تلفیق این دو گروه می‌تواند منجر به نوآوری‌های زیادی شود. گروه‌های علم داده‌ها باید استنادی داشته باشد که بتوانند دانش داده‌ها را با دانش محاسبات تلفیق کنند.

۲.۲. اهداف علم داده‌ها. پیشرفت فناوری در روش‌های ذخیره‌سازی داده‌ها در عصر حاضر، منجر به پیدایش پایگاه‌های داده‌های بزرگ<sup>۱۹</sup> شده است. از طرف دیگر، پردازش و تحلیل داده‌های حجیم<sup>۲۰</sup> نظیر داده‌های هواشناسی، زیستی یا مالی به دلیل حجم و معمولاً بعد بالا، امر ساده‌ای نیست.

تحلیل داده‌های حجیم یک نیاز حیاتی در دنیای تجارت و همچنین علوم اجتماعی است [۲۴]. درواقع از نیازهای اساسی که می‌توان آن را یکی از علل پیدایش علم داده‌ها عنوان کرد؛ همین مسئله‌ی تحلیل داده‌های حجیم است. بر اساس نظر کیلوند، آمار سنگ بنای نظری برای علم داده‌ها را فراهم می‌کند و فناوری نیز به کمک آمار آمده و تحلیل‌های دقیق‌تر و متناسب با نیاز روز را فراهم می‌آورد. بر اساس همین نظر نیز می‌توان گفت که علم داده‌ها درواقع آمار است که بازوان اجرایی آن فن‌های مدرن در دنیای مهندسی کامپیوتر است.

۳.۲. ابزارهای علم داده‌ها. در این زیربخش به مروری بر ابزارها و فن‌های مرسوم در علم داده‌ها پرداخته می‌شود. از یک سو، مشخص می‌شود که علم داده‌ها خاستگاه نظری خود را از چه منبعی تهیه کرده و از طرف دیگر نشان می‌دهد که علم داده‌ها عملاً تلفیق چند رشته‌ی علمی نیست و درواقع آمار است که با استفاده از ابزارهای محاسباتی پیشرفته در عصر حاضر دست به ارائه‌ی نتایج می‌زند. این ابزارها عبارت‌اند از:

- رگرسیون خطی<sup>۲۱</sup>، مبحثی که گروه تحقیقاتی گالتون نخستین بار در اواخر قرن ۱۹ میلادی بدان پرداخته‌اند.

- مدل‌های خطی تعمیم‌یافته<sup>۲۲</sup>، این مقوله در ذیل مبحث کلاس‌بندی داده‌ها بوده که نخستین بار تحلیل این نوع از داده‌ها توسط کارل پیرسون در آغاز قرن ۲۰ میلادی مطرح گشت (اگرستی<sup>۲۳</sup> [۱] فصل ۱۶، بخش اول).

<sup>19</sup>Big Data

<sup>20</sup>Huge Data

<sup>21</sup>Linear Regression

<sup>22</sup>Generalized Linear Models

<sup>23</sup>Agresti

- درخت تصمیم<sup>۲۴</sup>، این مبحث نیز یک شاخه‌ی نظری در علم آمار است که در مسائل رده‌بندی و رگرسیونی می‌توان از آن استفاده کرد. برای اطلاعات بیشتر در مورد درخت تصمیم به بریمن<sup>۲۵</sup> و همکاران [۴] و ون وینترفلت<sup>۲۶</sup> و ادواردز<sup>۲۷</sup> [۲۹] مراجعه شود.
- در نوعی پیشرفته‌تر از درخت تصمیم، جنگل تصادفی<sup>۲۸</sup>، کیسه‌بندی<sup>۲۹</sup> و روش تقویتی<sup>۳۰</sup>، سه روش مبتنی بر یادگیری گروهی<sup>۳۱</sup> هستند که برای ساختن مدل‌های پیشگویی‌کننده از درخت‌های تصمیم استفاده می‌کنند. در اکثر روش‌های سنتی آمار فرض می‌شود که تعداد متغیرهای توضیحی کمتر از تعداد نمونه‌های مستقل است. بنابراین، ظهور مجموعه داده‌های با بعد بالا<sup>۳۲</sup> که در آن‌ها تعداد متغیرهای توضیحی بیشتر از تعداد نمونه‌های مستقل است، به‌طور قابل‌توجهی جریان اصلی بسیاری از تحقیقات آماری را به خود اختصاص داده است. جنگل‌های تصادفی یکی از جدیدترین روش‌های یادگیری با ناظر<sup>۳۳</sup> است که محققین، مطالعات زیادی را پیرامون این روش برای بهبود عملکرد پیش‌بینی متغیر پاسخ، هنگام مواجهه با داده‌های با بعد بالا، انجام داده‌اند. مجموعه اطلاعات در مورد این نوع از یادگیری آماری در هستی<sup>۳۴</sup> و همکاران [۱۹] در دسترس است.
- ماشین بردار پشتیبان<sup>۳۵</sup>، این نیز یک مبحث در کلاس‌بندی داده‌هاست که عملاً مباحثی نظری در آمار دارد. مجموعه اطلاعات در مورد این نوع از کلاس‌بندی، منشأ و معرف آن در هستی<sup>۳۶</sup> و همکاران [۱۹] در دسترس است.

---

<sup>24</sup>Decision Tree

<sup>25</sup>Breiman

<sup>26</sup>Von Winterfeldt

<sup>27</sup>Edwards

<sup>28</sup>Random Forest

<sup>29</sup>Bagging

<sup>30</sup>Boosting

<sup>31</sup>Ensemble Learning

<sup>32</sup>High Dimensional Data

<sup>33</sup>Supervised Learning

<sup>34</sup>Hastie

<sup>35</sup>Support Vector Machine

<sup>36</sup>Hastie

- خوشه‌بندی<sup>۳۷</sup>، نخستین بار ارائه شده توسط دریور<sup>۳۸</sup> و کروبر<sup>۳۹</sup> [۱۴]، بحثی مجزا با گونه‌های بسیار متنوع در علم آمار است. تفاوت آن با کلاس‌بندی آمار این است که در کلاس‌بندی برچسب طبقات داده‌ها مشخص است و در خوشه‌بندی با اتکا به خصوصیات موجود در داده‌ها اقدام به دسته‌بندی می‌کنیم. خوشه‌بندی عضوی از مجموعه‌ی یادگیری بدون ناظر<sup>۴۰</sup> است که شامل تمام مطالعاتی است که در آن‌ها فرض قبلی در مورد برچسب طبقات داده‌ها برقرار نیست. برای اطلاعات کامل در مورد انواع خوشه‌بندی و یادگیری بدون ناظر به کاسامبرا<sup>۴۱</sup> [۲۱] مراجعه شود.
  - کاهش بُعد<sup>۴۲</sup>، مبحثی در زمینه‌ی تلخیص داده‌هاست. برخی داده‌های بُعد بالا، ایجاد نقایصی در خواص ریاضیاتی مدل‌ها را در بر خواهند داشت. کاهش بعد یک مبحث مشترک در آمار و جبرخطی است که کاربرد در تلخیص داده‌ها دارد.
  - یادگیری ماشین<sup>۴۳</sup>، اساساً ابزار محاسباتی کامپیوتر محور در علم داده‌ها محسوب می‌شود که با ارائه‌ی الگوریتم‌های محاسباتی دقیق و پرسرعت موجب تسهیل دریافت خروجی می‌شود. درواقع، یادگیری ماشین کاربردی از هوش مصنوعی است که به سیستم، توانایی یادگیری خودکار و بهبود تجربه را می‌دهد. جهت اطلاعات بیشتر در مورد فن‌های یادگیری ماشین به بیشاپ<sup>۴۴</sup> [۳] مراجعه شود.
- آنچه در بالا مطرح شد ابزارهای مورد استفاده در علم داده‌ها بود. در ادامه از دیدگاه آماری به این ابزارها نگاه خواهیم کرد.

### ۳. آمار و نقش مبانی نظری آن در علم داده‌ها

بر اساس موارد ذکر شده در بخش ۲، علم داده‌ها از رگرسیون، کلاس‌بندی آماری، خوشه‌بندی، کاهش بعد و یادگیری ماشین برای تحلیل، پیش‌بینی و ارائه خروجی در مورد داده‌ها استفاده می‌کند. همان‌طور که در زیربخش ۳.۲ ذکر شد، تمامی موارد فوق (غیر از الگوریتم‌های رایانه‌ای در یادگیری ماشین) اساساً مباحثی ریشه‌ای در علم آمار هستند. درواقع این چنین استنتاج می‌شود که در علم داده‌ها از یادگیری ماشین استفاده می‌کنند تا مباحث نظری آماری را پیاده‌سازی کنند. اگر تاکنون به پاسخ نرسیده‌اید، اکنون سؤال دیگری مطرح می‌کنیم که

<sup>37</sup>Clustering

<sup>38</sup>Driver

<sup>39</sup>Kroeber

<sup>40</sup>Unsupervised Learning

<sup>41</sup>Kassambara

<sup>42</sup>Dimension Reduction

<sup>43</sup>Machine Learning

<sup>44</sup>Bishop

دریافتن پاسخ کمک خواهد کرد.

فرض کنید مسافرانی سوار هواپیما شوند، آیا مسافران را هواپیما به مقصد رسانده است یا خلبان؟ بهتر مطرح کنیم: آیا هواپیما ابزاری در دست خلبان برای جابجایی مسافران بوده یا خود آن‌ها را به مقصد رسانده است؟ مسافران همان داده‌ها، خلبان همان نظریات آماری و علم داده‌ها همان هواپیمایی است که آمار، داده‌ها را به کمک آن به مقصد که همان تحلیل و نتایج است می‌رساند.

هوش مصنوعی به عنوان یکی از ابزارهای پیشرفته‌ی مورد استفاده‌ی علم داده‌ها شناخته می‌شود. گودفلوو<sup>۴۵</sup> و همکاران [۱۶] در مورد نقش هوش مصنوعی در علم داده‌ها این گونه تعبیر می‌کنند که، فن‌های مرتبط با تحلیل و محاسبات در هوش مصنوعی معمولاً بر پایه‌ی یادگیری عمیق<sup>۴۶</sup> طراحی شده‌اند و شدیداً تشنه‌ی داده هستند. نقش هوش مصنوعی در علم داده‌ها را می‌توان تشبیه به یک رایانه کرد که وظایف یک کارشناس آمار را انجام می‌دهد. در واقع مباحث نظری آمار به وسیله علم داده‌ها روی داده‌های حجیم تولید شده در عصر حاضر پیاده‌سازی می‌شوند. می‌توان گفت هوش مصنوعی نکته‌ای شبیه به خلبان خودکار در هواپیماست. یعنی از ماهیت موضوع که فاعل اصلی آمار است، چیزی کاسته نمی‌شود. در ادامه، به بررسی بیشتر پاسخ‌های ارائه شده در مورد رابطه‌ی بین آمار و علم داده‌ها می‌پردازیم. در نهایت می‌خواهیم به پاسخی تجمیعی برای سؤالی که از ابتدا مطرح کرده‌ایم، برسیم.

#### ۴. آیا علم داده‌ها چیزی بیش از آمار است یا تنها نسخه‌ی پیشرفته‌ی آمار می‌باشد؟

در این بخش، به بررسی و نقد نظرات برخی از افراد صاحب نظر در دنیای آمار و علم داده‌ها درباره‌ی ارتباط این دو رشته می‌پردازیم:

- چمبرز [۸] در ۱۹۹۳، در انتقاد به واکنش آماردان‌ها به پیشرفت فناوری این گونه بیان داشته که: آمار در پاسخ به فناوری‌های جدید تغییرات قابل توجهی نداشته است. این رشته بر تئوری تأکید دارد و دروس آمار مقدماتی بیشتر تمرکز بر آزمون‌های آماری دارد تا محاسبات آماری. نقد و بررسی: با توجه به این که این نظرات در دهه ۱۹۹۰ بوده است؛ نقدی قابل پذیرش و نوعی هشدار در جهت همسو شدن فعالان رشته‌ی آمار با پیشرفت فناوری است. به صورت غیرمستقیم و البته آنچه در حقیقت رخ داد نیز این بود که در شرایط احساس نیاز به تحلیل داده‌های حجیم، علمی به اسم علم داده‌ها در بستر نظری دانش آمار ظهور کرد.

- کیلیولند [۹] در مورد ظهور علم داده‌ها این گونه بیان می‌کند که:

علم داده‌ها را باید بر اساس میزان توانمندسازی یک تحلیلگر در تفسیر داده‌ها قضاوت کرد. ابزارهایی

<sup>45</sup>Goodfellow

<sup>46</sup>Deep Learning

که توسط تحلیلگر داده‌ها استفاده می‌شود، اثربخشی مستقیم دارند. نظریه‌هایی که به‌عنوان مبنایی برای توسعه ابزارها عمل می‌کنند، فواید غیرمستقیم دارند.

**نقد و بررسی:** نظر کیلیوند [۹] تبیین‌کننده‌ی این نکته است که علم داده‌ها در بستر نیاز به گسترش روش‌های تحلیل داده‌ها به وجود آمده است. وی ابزارهای تحلیل را مستقیماً مؤثر بر علم داده‌ها دانسته و مبنای نظری را به‌صورت غیرمستقیم برای این علم سودمند دیده است. این نظر منافاتی با این‌که علم داده‌ها درواقع گسترش روش‌های آماری و مبنای نظری آن در جهت حل مسائل جدید است، ندارد.

• لوکیدز<sup>۴۷</sup> [۲۲] معتقد است که تنها تفاوت میان آمار و علم داده‌ها این است که علم داده‌ها از رویکردهای کلی‌نگرتری استفاده می‌کند.

**نقد و بررسی:** نظر لوکیدز [۲۲] همسو با این عقیده است که علم داده‌ها از دیدگاه مبنای تئوری از آمار جدا نیست. درواقع وی تنها روش‌های حل مسئله میان این دو رشته را متفاوت می‌داند.

• سیلور<sup>۴۸</sup> آماردان و ژورنالیست مشهور آمریکایی درباره ارتباط علم داده‌ها با آمار این‌گونه بیان می‌کند که علم داده‌ها تنها می‌تواند نام دیگر آمار باشد نه رشته‌ی علمی جداگانه [۲۷].

**نقد و بررسی:** نظر سیلور [۲۷] بر این اساس است که علم داده‌ها از همان مبنای نظری مورداستفاده‌ی آمار برای تحلیل نتایج استفاده می‌کند. او معتقد است که آنچه از آمار نیاز داریم چیزی جدا از علم داده‌ها نیست.

• برومن<sup>۴۹</sup> [۵] در مقاله‌ای تحت عنوان علم داده‌ها همان آمار است این‌گونه بیان کرده است که وقتی در فیزیک از ریاضی استفاده می‌کنیم فیزیکدانان نمی‌توانند بگویند در حال انجام علم اعداد هستند، آن‌ها دارند از ریاضی استفاده می‌کنند. بنابراین، هرگاه ما تجزیه و تحلیل انجام دهیم، در حال بهره بردن آمار هستیم. شما می‌توانید آن را علم داده‌ها یا انفورماتیک یا تحلیل یا هر چیز دیگری بنامید، اما هنوز هم آمار هست و این نباید باعث شود اصطلاح «آمار» را کنار بگذارید.

**نقد و بررسی:** دیدگاه برومن [۵] هم‌راستا با نظر سیلور [۲۷] است. درواقع هر دو بر این باورند که علم داده‌ها چیزی جدای از آمار نیست و تحلیل داده‌ای که علم داده‌ها بدان می‌پردازد درواقع استفاده از آمار است.

<sup>47</sup>Loukides

<sup>48</sup>Silver

<sup>49</sup>Broman

- گلمان<sup>۵۰</sup> [۱۵] بر این باور است که آمار کمترین نقش را دارد و آمار را یک بخش غیراساسی علم داده‌ها برشمارده است.

نقد و بررسی: بر اساس موارد قیدشده در بخش ۲، نقش به سزای مباحث نظری آمار در ساختن پیکره‌ی ابزارها و فن‌های مورد استفاده برای تحلیل داده در علم داده‌ها غیرقابل انکار است. درواقع علم داده‌ها بدون رگرسیون، سری زمانی، کلاس‌بندی و خوشه‌بندی چیزی بیشتر از یک ماشین حساب پرسرعت نخواهد بود و این فن‌های مذکور تماماً از سرفصل‌های شناخته‌ی شده‌ی علم آمار هستند. نظر نگارنده بر آن است که گلمان [۱۵] از دیدگاه توان محاسباتی و نقطه‌نظر فناوری‌های رایانه‌ای به مسئله پرداخته‌اند. در کل نقطه‌ی قوت علم داده‌ها استفاده از الگوریتم‌های پیچیده و پیشرفته‌ی کامپیوتری است که همین الگوریتم‌ها نیز درواقع کدنویسی از فن‌های آماری روی کاغذ هستند. بدون مباحث نظری آمار روی کاغذ این الگوریتم‌ها وجود خارجی ندارند.

- دهار<sup>۵۱</sup> [۱۱] دانشمند هندی، معتقد است که آمار تأکید بر داده‌های کمی و توصیف و تفسیر آن‌ها دارد و علم داده‌ها در تعامل با داده‌های کمی و کیفی سعی و تأکید بر تحلیل و پیش‌بینی این داده‌ها دارد.

نقد و بررسی: نظرات آقای دهار عملاً تعبیری نادرست از دانش آمار مطرح می‌کند. بر اساس هستی و همکاران [۱۹]، پیش‌گویی و پیش‌بینی بر اساس مدل‌بندی داده‌ها به کمک روش‌های آماری چه برای داده‌های کمی و چه کیفی امکان‌پذیر است. مسئله‌ی رگرسیون عملاً مدل‌بندی و پیش‌بینی داده‌هایی از متغیر هدف است که بر اساس ویژگی‌های موجود و تعیین مدل مناسب این هدف در دسترس قرار می‌گیرد. همچنین ارائه‌ی مدلی که داده‌ها را به کلاس‌های گوناگون طبقه‌بندی کند و یک ورودی جدید را به یک طبقه‌ی خاص نسبت دهد عملاً رویه‌ای برای تحلیل داده‌های کیفی است که در مسئله‌ی کلاس‌بندی آماری انجام می‌شود. فن‌های یادگیری ماشین و الگوریتم‌های موجود در آن، این امکان را به روش‌های مذکور می‌دهد که نتایج و تحلیل‌ها را با سرعت بهتر انجام دهند. همچنین امکان تحلیل داده‌های حجیم با استفاده از زبان برنامه‌نویسی پایتون و به کار بستن روش‌های آمار مذکور وجود دارد. شایان ذکر است که در دنیای امروز به کار بستن یک رویکرد علمی آماری در یک ماشین یادگیری و گرفتن خروجی نهایی را از وظایف علم داده‌ها می‌دانند. حال آنکه بر اساس آنچه گفته شد تنها یک ابزار محاسباتی قوی در خدمت روش‌ها و مفاهیم نظری آمار داریم.

<sup>50</sup>Gelman

<sup>51</sup>Dhar

• دونوهو<sup>۵۲</sup> [۱۳] در یک کارگاه تخصصی در متنی تحت عنوان ۵۰ سال از علم داده‌ها، اذعان داشته است که علم داده‌ها به واسطه‌ی بهره‌جستن از فن‌های محاسباتی پیشرفته و حجم داده‌های مورد تحلیل آن‌که از آمار حجیم‌تر است؛ از آمار متمایز نمی‌شود. او بر این باور است که علم داده‌ها تنها یک زمینه‌ی کاربردی است که در بستر آمار سنتی رشد کرده است.

نقد و بررسی: بر اساس نظر دونوهو [۱۳]، علم داده‌ها پدیده‌ای است که بر اساس دانش آمار طرح‌ریزی شده و علم داده‌ها را یک زمینه‌ی کاربردی می‌داند که از دانش آمار نشأت می‌گیرد. این تعبیر دونوهو چیزی دور از این جمله نیست که علم داده‌ها فرزند آمار است و عملاً پدیده‌ای است که آمار را آماده‌ی پاسخ‌دهی به نیازهای متناسب با زمانه یعنی تحلیل داده‌های حجیم و بهره‌جستن از الگوریتم‌های رایانه‌ای کرده است.

درواقع خالی از ارزش نیست اگر بگوییم، علم داده‌ها تنها نسخه‌ای جدید از آمار است با ابزارهای پیشرفته‌ی محاسباتی که متناسب با نیازهای روز پژوهشگران در علوم کاربردی عمل می‌کند. این نسخه‌ی جدید از آمار را می‌توان آمار<sup>+</sup> یا همان Statistics<sup>+</sup> در نظر گرفت.

## ۵. نتیجه‌گیری

بر اساس موارد گفته‌شده، علم داده‌ها و آمار هر دو یک مقصد دارند. پیش‌بینی و تحلیل و تفسیر داده‌ها هدف اصلی هر دو است. داده‌های حجیم و نیاز مبرم به فن‌های محاسباتی پیشرفته برای تحلیل و مدل‌بندی آن‌ها ازجمله اصلی‌ترین انگیزه‌های ظهور گرایشی علمی به نام علم داده‌ها است. علم داده‌ها از همان مفاهیم و مبانی نظری موجود در آمار بهره می‌برد. بزرگ‌ترین وجه تمایز آمار و علم داده‌ها ابزارهای نوین نرم‌افزاری در تحلیل و مدل‌بندی داده‌ها است. علم داده‌ها با اتکا به مبانی آمار و ابزار نرم‌افزاری مدرن به تحلیل داده‌هایی می‌پردازد که در قرن ۲۱ به واسطه پیشرفت صنعت و فناوری تولیدشده‌اند. اگر این‌گونه مطرح کنیم که علم داده‌ها همان آمار است که مبانی نظری آن را در نرم‌افزارهای پیشرفته پیاده‌سازی شده است؛ درواقع می‌توان نتیجه گرفت که علم داده‌ها درواقع نسخه‌ی پیشرفته‌ی علم آمار یا همان آمار<sup>+</sup> است.

## ۶. تشکر و قدردانی

نویسندگان این مقاله، از داوران محترم بابت ارتقاء سطح کیفی مقاله با نظرات سازنده و مفیدشان و همچنین از دبیر رابط و سردبیر محترم نشریه بابت مد نظر قرار دادن مقاله کمال قدردانی و تشکر خود را ابراز می‌دارند.

## مراجع

[1] A. Agresti, *Categorical data analysis*, (Vol. 792), John Wiley & Sons, 2012.

<sup>52</sup>Donoho

- [2] A. Bhardwaj, *What's the Difference Between Data Science and Statistics?* Priceonomics. <https://priceonomics.com/whats-the-difference-between-data-science-and/> (2015).
- [3] C.M. Bishop, *Pattern recognition and machine learning*, Springer, New York, 2006.
- [4] L. Breiman, J. Friedman, R. Olshen and C. Stone, *Classification and regression trees*, Chapman and Hall/CRC, 1984.
- [5] K. Broman, *Data science is statistics*, The Stupidest Thing: Statistics, Genetics, Programming, Academics, 2013.
- [6] I. Carmichael and J.S. Marron, *Data science vs. statistics: two cultures?* Jpn. J. Stat. Data Sci, **1**, (2018) 117–138.
- [7] G. Casella, S. Fienberg and I. Olkin, *Springer Texts in Statistics*, Design (Vol. 102) 2006.
- [8] J.M. Chambers, *Greater or lesser statistics: a choice for future research*, Statist. Comput., **3** (1993), no. 4, 182–184.
- [9] W.S. Cleveland, *Data science: an action plan for expanding the technical areas of the field of statistics*, International statistical review, **69** (2001) no. 1, 21–26.
- [10] R.D. De Veaux, M. Agarwal, M. Averett, B.S. Baumer, A. Bray, T.C. Bressoud, L. Bryant, L.Z. Cheng, A. Francis, R. Gould and A.Y. Kim, *Curriculum guidelines for undergraduate programs in data science*. Annu. Rev. Stat. Appl., **4** (2017) 15–30.
- [11] V. Dhar, *Data science and prediction*, *Communications of the ACM*, **56** (2013) no. 12, 64–73.
- [12] P.J. Diggle, *Statistics: a data science for the 21st century*, J. R. Stat. Soc., A: Stat. Soc. **178** (2015) no. 4, 793–813.
- [13] D. Donoho, *50 Years of Data Science*, J. Comput. Graph. Stat. **26** (2017) no. 4, 745–766.
- [14] H.E. Driver and A.L. Kroeber, *Quantitative expression of cultural relationships* Berkeley, University of California Press, 1932.
- [15] A. Gelman, *Statistics is the least important part of data science*, Statistical Modeling, Causal Inference, and Data Science blog. 2013.
- [16] I. Goodfellow, Y. Bengio and A. Courville, *Deep learning* (Vol. 1) USA: MIT Press, 2017.
- [17] A. Goodman, C. Kamath and V. Kumar, *Data analysis in the 21st century*, Statistical Analysis and Data Mining: The ASA Data Science Journal, **1** (2008) no. 1, 1–3.
- [18] J. Hardin, R. Hoerl, N.J. Horton, D. Nolan, B. Baumer, O. Hall-Holt, P. Murrell, R. Peng, P. Roback, D. Temple Lang and M. Ward, *Data science in statistics curricula: Preparing students to “think with data”*, The American Statistician **69**(2015) no. 4, 343–353.
- [19] T. Hastie, R. Tibshirani and J. Friedman, *The elements of statistical learning (2nd Edition)*, New York: Springer, 2009.
- [20] S.C. Hicks and R.A. Irizarry, *A guide to teaching data science*, The American Statistician, **72**(2018) no.4, 382–391.

- [21] A. Kassambara, *Practical guide to cluster analysis in R: Unsupervised machine learning*, France: Statistical Tools For High-Throughput Data Analysis, 2017.
- [22] M. Loukides, *What is data science?* O'Reilly Media, Inc. 2011.
- [23] D. Nolan and D. Temple Lang, *Computing in the statistics curricula*, The American Statistician, **64**(2010) no. 2, 97–107.
- [24] P. Pham, *The Impacts of big data that you may not have heard of*, Forbes.  
[https://www.forbes.com/sites/peterpham/2015/08/28/the-impacts-of-big-data-that-you-may-not-have-heard-of/\(2015\)](https://www.forbes.com/sites/peterpham/2015/08/28/the-impacts-of-big-data-that-you-may-not-have-heard-of/(2015)).
- [25] G. Press, *A very short history of big data*, Forbes Tech Magazine.  
[https://www.forbes.com/sites/gilpress/2013/05/28/a-very-short-history-of-data-science/\(2013\)](https://www.forbes.com/sites/gilpress/2013/05/28/a-very-short-history-of-data-science/(2013)).
- [26] N. Reid, *Statistical science in the world of big data*, Stat. Probab. Lett. **136**, (2018) 42–45.
- [27] N. Silver, *What I need from statisticians*, Stats & Data Science Views.  
[https://www.statisticviews.com/article/nate-silver-what-i-need-from-statisticians/\(2013\)](https://www.statisticviews.com/article/nate-silver-what-i-need-from-statisticians/(2013)).
- [28] D. Singpurwalla, *A handbook of statistics: An overview of statistical methods*, 2013.
- [29] D. Von Winterfeldt, and W. Edwards, *Decision analysis and behavioral research*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [30] C. Weihs and K. Ickstadt, *Data science: the impact of statistics*, Int. J. Data Sci. Anal. **6** (2018) 189–194.



## ANALYZING THE CONTENT OF 12TH GRADE MATHEMATICS AND PHYSICS CALCULUS BASED ON WILLIAM RUMI'S METHOD

MAHSA EZZATI<sup>1\*</sup> AND HANNANEH FARAJI<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Bachelor's student Mathematics Education Farhangian University, Tehran, IRAN  
mahsaezati313@gmail.com

<sup>2</sup>Bachelor's student Mathematics Education Farhangian University, Tehran, IRAN  
mh.faraji2711@gmail.com

**Abstract.** The purpose of the current research is to analyze the content of the 12th grade calculus, based on William Rumi's technique. The research method in this study is a descriptive-survey type of content analysis according to the William Rumi method; The purpose of the research is to investigate the effectiveness of the book of calculus (2) of the twelfth grade of high school. The statistical population of the research is the 12th Book of Calculus (2017). The content of the textbook was examined in terms of the degree of student activity and involvement in three sections: text, practices and pictures. According to the studies, the engagement coefficient of the book text is 1.6, which shows the activeness of the text; Also, the engagement factor of the images was 1.1, which shows that the student must analyze the images to answer the relevant questions, and the engagement factor of the questions(practices) is 4, which indicates that the book's questions are written in an active manner. And most of the questions require the performance and mental activity of the student. The results of this research along with the proposed suggestions can help to improve the teaching and learning process of the mentioned textbook.

2010 Mathematics Subject Classification. 47A55, 39B52, 34K20, 39B82.

Keywords. Calculus 2, Content analysis, William Rumi technique.

Date: Received 18-2-2024 Revised 23-6-2024 Accepted 28-5-2024 Available Online 27-9-2023  
©Ferdowsi University of Mashhad.



## تحلیل محتوای حسابان ۲ پایه دوازدهم رشته ریاضی و فیزیک بر اساس روش ویلیام رومی

مهسا عزتی<sup>۱\*</sup> و حنا فرجی<sup>۲</sup>

<sup>۱,۲</sup>گروه ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران

mahsaezati313@gmail.com

mh.faraji2711@gmail.com

چکیده. هدف پژوهش حاضر تحلیل محتوای کتاب حسابان دوازدهم، بر اساس تکنیک ویلیام رومی است. روش تحقیق در این پژوهش، از نوع توصیفی-پیمایشی از نوع تحلیل محتوا به روش ویلیام رومی است؛ که هدف پژوهش، بررسی میزان فعال بودن کتاب حسابان ۲ دوازدهم دوره دوم متوسطه، هست. جامعه آماری پژوهش، کتاب حسابان دوازدهم (۱۳۹۷) است. محتوای کتاب درسی از نظر میزان فعال بودن و درگیر کردن دانش‌آموز در سه بخش متن، تمرین و تصاویر مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به بررسی‌های انجام‌شده، ضریب درگیری متن کتاب، 1.6 هست که فعال بودن متن را نشان می‌دهد؛ همچنین ضریب درگیری تصاویر، 1.1 به دست آمد که نشان می‌دهد دانش‌آموز باید تصاویر را تحلیل کند تا به سؤال‌های مربوطه پاسخ دهد و ضریب درگیری سؤال‌ها، ۴ هست که حاکی از این است که سؤالات کتاب به صورت کاملاً فعال نوشته شده و اکثر سؤالات نیازمند عملکرد و فعالیت ذهنی دانش‌آموز می‌باشند. نتایج این پژوهش همراه با پیشنهادهای مطرح‌شده، می‌توانند به بهبود فرآیند یاددهی و یادگیری کتاب درسی مذکور کمک کنند.

2010 Mathematics Subject Classification. 47A55, 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. تحلیل محتوا، حسابان ۲، تکنیک ویلیام رومی.

تاریخ: دریافت ۱۴۰۲/۱۱/۲۹ بازنگری ۱۴۰۳/۴/۳ پذیرش ۱۴۰۳/۳/۸ انتشار برخط ۱۴۰۲/۷/۵

نحوه ارجاع به این مقاله: م. عزتی، ح. فرجی، تحلیل محتوای حسابان ۲ پایه دوازدهم رشته ریاضی و فیزیک بر اساس روش

ویلیام رومی، به سوی علوم ریاضی، ۴ (۱۴۰۳)، شماره ۱، ۳۲-۴۱.

© دانشگاه فردوسی مشهد.

## ۱. پیش‌گفتار

کتاب درسی اصلی‌ترین منبع یادگیری دانش‌آموزان در نظام‌های آموزشی متمرکز مانند نظام آموزشی ایران است. لذا با تحلیل محتوای کتاب‌های درسی، نقاط ضعف آن‌ها آشکارتر شده و ضرورت تنظیم و تدوین برنامه‌ی استاندارد آموزشی، بیشتر احساس می‌شود تا با این کار دانش‌آموزان بتوانند به‌طور فعال با آموزش و یادگیری درگیر شوند. لازم به توضیح است که کشورهایی در آزمون‌های بین‌المللی موفق بوده‌اند که در زمینه‌ی تدوین استانداردهای آموزشی یا چارچوب برنامه درسی، پیشگام بوده‌اند [۱]. در برنامه درسی ایران اغلب اوقات کلاسی دانش‌آموزان به کتاب درسی اختصاص پیدا می‌کند و همه‌ی آموخته‌های دانش‌آموزان بر اساس کتاب درسی سنجیده می‌شود [۸]؛ به همین دلیل پژوهش و تحقیق در مورد محتوای کتاب درسی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. کشورهای موفق در آزمون تیمز، کشورهایی بوده‌اند که در زمینه‌ی تدوین استانداردهای آموزشی یا چارچوب برنامه درسی، پیشگام بوده‌اند [۱].

حافظه محور بودن و توجه بیش‌ازحد به نمره در کنار عدم پرورش قوه تفکر دانش‌آموز و مطرح کردن محتواهای کم‌اهمیت به‌جای مطالب مهم، از چالش‌های نظام آموزش و پرورش است [۶]. حافظه محور بودن آموزش‌ها، گرچه در نتایج آزمون‌ها تأثیر مثبت دارد، اما به‌هیچ‌وجه باعث تعمیق یادگیری نخواهد شد و در درازمدت در سطح یادگیری دانش‌آموزان، تأثیر منفی خواهد داشت.

«از نظر پیازه<sup>۱</sup>، دانستن اطلاعات بیشتر، تفکر کودک را پیشرفته‌تر نمی‌سازد؛ پیشرفت از نظر کیفی متفاوت است» [۲]. در [۶] بیان شده است که، به‌جای تکیه بر حافظه، اکتشاف و نوآوری را مورد توجه قرار دهید؛ به برنامه‌های درسی توجه بیشتری داشته باشید و به‌جای یادگیری طوطی‌وار، نوع عملکرد را ارزیابی کنید. کلوس کریپندورف<sup>۲</sup> و وبر<sup>۳</sup> [۷] بیان می‌کنند: «تحلیل محتوا عبارت است از تکنیک نظام‌مند تبدیل عبارات متن به طبقات خاص، بر اساس قوانین صریح کدگذاری به‌منظور تعیین تأکیدات افراد، گروه‌ها و پیام‌های مندرج در متن.»

از طریق تحلیل محتوا است که می‌توان به ویژگی‌های یک کتاب درسی پی برد و ضعف‌ها را در محتوای کتاب‌های درسی، شناسایی و معرفی نمود. از سوی دیگر، با توجه به این که نظام آموزش و پرورش ایران از نوع متمرکز است، اغلب وقت کلاس به کتاب درسی اختصاص پیدا می‌کند و همه آموخته‌های دانش‌آموزان بر اساس کتاب درسی سنجیده می‌شود؛ پس در کشور ما به لحاظ اهمیت و جایگاه کتاب درسی، تحلیل محتوا ضرورت بیشتری پیدا می‌کند [۴].

برخی بر این باورند که تأکید بر مهارت‌ها (مهارت تفکر، تصمیم‌گیری، حل مسئله و...) موجب توجه کمتری به محتوا می‌شود؛ اما این‌طور نیست، شاید صفحات و مطالب کمتری مطالعه شود اما دانش به‌دست‌آمده همان

<sup>1</sup>Piaget<sup>2</sup>Klaus Krippendorff<sup>3</sup>Weber

دانش است که موردنظر بوده است و بهتر و عمیق‌تر حاصل می‌شود. البته آنچه از طریق رویکرد خلاق حاصل می‌شود خیلی بیشتر از آن است که از طریق روش‌های مرسوم به دست می‌آید [۱۰].

گود<sup>۴</sup> [۹]، از عدم توجه جدی معلمان به تجزیه و تحلیل کتاب‌های درسی انتقاد کرده، می‌گوید: «به نظر می‌رسد معلم بیشترین وقت کلاسش را به کار با کتاب درسی اختصاص می‌دهد، ولی به ندرت اقدام به تجزیه و تحلیل مواد درسی می‌نماید، درحالی‌که این کاری ضروری است».

«رومی»<sup>۵</sup> معتقد است که محتوای کتاب‌های درسی، باید موضوعات را به شیوه اکتشافی مطرح نمایند؛ زیرا یادگیری حقیقی نتیجه فعالیت یادگیرنده است. چنانچه محتوا به گونه‌ای ارائه شود که روحیه کشف را در فراگیر به وجود آورد تا او خود به دنبال پاسخ سؤالاتش باشد؛ نتایجی را که به دست می‌آورد، فعالیت او را برای یادگیری بیشتر تقویت می‌کند. وی چنین محتوایی را «فعال» می‌نامد و در مقابل محتوایی که صرفاً با ارائه دانش و اطلاعات، حقایق و مفاهیم را معرفی و سپس نتایج و اصول کلی را مطرح می‌سازد، «محتوای غیرفعال» معرفی می‌کند [۳].

هدف اصلی در این مقاله این است که با روش تحلیل محتوای ویلیام رومی بسنجیم که آیا کتاب حسابان ۲ دوازدهم دوره دوم متوسطه به شیوه فعالی ارائه و تدوین و تنظیم شده است یا خیر؟ زیرا محتوای برنامه درسی باید به گونه‌ای طراحی و ارائه شود که فراگیران را نسبت به یادگیری برانگیزد و مقدمات اکتشاف و پژوهش و عمل فعالانه آنان را ایجاد کند.

کتاب حسابان دوازدهم چاپ ۱۳۹۷، فرصت کنکاش محتوایی با توجه به تکنیک ویلیام رومی نیافته است. پیش از این موحندیا در سال ۱۳۹۰ کتاب حسابان سوم ریاضی فیزیک دوره متوسطه چاپ ۱۳۸۹ را با توجه به حیطه شناختی بلوم تحلیل کرده بود.

همچنین موسی‌پور کتاب حسابان دوازدهم ریاضی فیزیک را با رویکرد مدل‌سازی و کاربردها بررسی کرده است.

تحلیل محتوای کتاب حسابان (۱) پایه یازدهم متوسطه دوم (رشته ریاضی و فیزیک) بر اساس تکنیک ویلیام رومی و حیطه شناختی بلوم توسط موسی‌پور انجام گرفته است.

در مقاله حاضر اولین بار کتاب حسابان ۲ دوازدهم ریاضی فیزیک چاپ ۱۳۹۷ با تکنیک ویلیام رومی تحلیل شده است.

در پژوهش حاضر از روش تحلیل محتوا با تکنیک ویلیام رومی، استفاده شده است. در این پژوهش واحد تحلیل «متن»، واحد ثبت «جمله» هست. در بخش تحلیل تصاویر نیز، واحد تحلیل «تصاویر و نمودار و جداول» هستند. در بخش سؤالات نیز، واحد تحلیل «سؤالات فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها و تمرین هر فصل» در نظر گرفته شده است. برای تحلیل متن کتاب، ۳۰ صفحه به صورت تصادفی از کل کتاب حسابان ۲ دوازدهم

<sup>4</sup>Good

<sup>5</sup>Romey

(۲۱ درصد حجم کتاب) انتخاب شد و ۱۵ تصویر و جدول و نمودار برای تحلیل تصاویر کتاب و ۱۵ تمرین به صورت تصادفی از کل تمارین کتاب برای تحلیل انتخاب شدند.

در تکنیک رومی، تحلیل بخش متن، با توجه به ده مقوله بررسی شده، که شامل چهار مقوله فعال و چهار مقوله غیرفعال و دو مقوله خنثی است. سؤالات با چهار مقوله که شامل دو مقوله فعال و دو مقوله غیرفعال هست و تصاویر با توجه به چهار مقوله روش رومی، که شامل یک مقوله فعال و یک مقوله غیرفعال و دو مقوله خنثی هست، بررسی شده است. در این مقاله، مجموع مقوله های فعال با کد  $m$  و مقوله های غیرفعال با کد  $n$  در نظر گرفته شده است. همچنین  $I$  نشانگر ضریب درگیری است که از تقسیم مجموع مقوله های فعال بر غیرفعال حاصل می شود.

به منظور سنجش پایانی نتایج تحلیل، متن و سؤالات و تصاویر تحلیل شده دوباره توسط کدگذار دیگر مورد بررسی قرار گرفتند و درصد توافق دو کدگذار در ارزیابی ها مطرح شد.

### -کدگذاری متن کتاب

$A$  : مفروضات یا مشاهدات غیر از دانش آموز

$B$  : بیان نتایج یا اصول کلی

$C$  : تعاریف

$D$  : سؤالاتی که در متن آورده شده و بلافاصله به وسیله مؤلف پاسخ داده شده اند.

$E$  : سؤالاتی که ایجاب می کند تا دانش آموز پاسخ های داده شده به مفروضات بالا را تجزیه و تحلیل کند.

$F$  : مسائل مربوط به آزمایش و تحلیل آن

$G$  : سؤالاتی که پاسخ آن ها در متن نیامده و برای جلب توجه مطرح شده اند.

$H$  : بیان نتایج به دست آمده

$I$  : سؤالات مربوط به معنی بیان

$J$  : جملاتی که در هیچ کدام از مقوله های فوق قرار نگیرند.

از مقوله های فوق، چهار مقوله اول غیرفعال و چهار مقوله بعدی فعال و دو مقوله آخر خنثی هستند. برای محاسبه ضریب درگیری مجموع مقوله های فعال را بر غیرفعال تقسیم می کنیم. به عقیده ویلیام رومی کتابی مناسب و به صورت فعال تدوین شده است که شاخص درگیری دانش آموز با محتوای آن کتاب، بزرگ تر از 0.4 و کوچک تر از 1.5 باشد.

### -کدگذاری تصاویر کتاب

$A$  : تصاویری که از آن ها برای تشریح موضوع خاصی استفاده شده است.

$B$  : تصاویری که از دانش آموز می خواهد تا با استفاده از موضوعات داده شده، فعالیت یا آزمایشی را انجام دهد.

*C* : تصاویری که برای تشریح شیوهی جمع‌آوری وسایل یک آزمایش آمده است.

*D* : تصاویری که در هیچ‌کدام از مقوله‌های فوق نگنجد.

در بین مقوله‌های فوق، مقوله اول غیرفعال، مقوله دوم فعال و دو مقوله آخر خنثی هستند.

### -کدگذاری تمارین کتاب

*A* : سؤالاتی که جواب آن‌ها مستقیم در کتاب مطرح شده است.

*B* : سؤالاتی که جواب آن‌ها مربوط به استناد تعاریف است.

*C* : سؤالاتی که دانش‌آموز برای پاسخگویی به آن‌ها باید از آموخته‌های خود در درس جدید استفاده کند.

*D* : سؤالاتی که در آن‌ها از دانش‌آموز خواسته شده تا مسئله به‌خصوص را حل کند.

از مقوله‌های فوق، دو مقوله اول غیرفعال و دو مقوله آخر فعال هستند.

حال با استفاده از سؤالات مطرح شده در زیر به بررسی این سه مؤلفه (متن، تمارین، تصاویر) می‌پردازیم:

۱. آیا با توجه به تکنیک ویلیام رومی، متن کتاب حسابان ۲ دوازدهم فعالیت محور هست؟

برای پاسخ به این سؤال، صفحاتی از کتاب به‌صورت تصادفی انتخاب شده و تمام جملات صفحات موردبررسی قرار گرفت. با توجه به جدول ۱، ضریب درگیری 1.6 به دست آمد. با توجه به ضریب درگیری محاسبه شده، متن کتاب حسابان ۲ دوازدهم به‌صورت فعال نوشته شده است. این عدد اندکی بیشتر از 1.5 هست. بنابراین می‌توان گفت متن کتاب به‌گونه‌ای است که از دانش‌آموز برای هر جمله تحلیل و فعالیت می‌خواهد.

۲. آیا تصاویر کتاب حسابان ۲ دوازدهم دانش‌آموز را درگیر می‌کند؟

برای پاسخ به این سؤال ۱۵ تصویر به‌صورت تصادفی انتخاب شده است. در جدول ۲ صفحات مربوط به هر تصویر درج شده و در انتهای جدول ضریب درگیری مربوطه به‌دست آمده است. با توجه به ضریب درگیری (1.1)، تصاویر کتاب حسابان دوازدهم دانش‌آموز را درگیر می‌کند و به‌صورت فعال نوشته شده است.

۳. آیا تمارین کتاب حسابان دوازدهم به شیوه فعال نوشته شده‌اند؟

جهت پاسخگویی به این پرسش، ۱۵ سؤال از تمارین و فعالیت‌ها و کاردکلاس‌های کتاب حسابان ۲ به‌صورت تصادفی انتخاب و همراه با شماره صفحه در جدول ۳ درج شده است. بعد از به دست آمدن فراوانی هرکد، ضریب درگیری از تقسیم مجموع مقوله‌های فعال بر غیرفعال محاسبه شد. با توجه به ضریب درگیری به‌دست آمده (۴)، مشخص می‌شود که سؤالات کتاب حسابان ۲، به‌صورت بسیار فعال نوشته شده است، به‌طوری‌که اکثر سؤالات مطرح شده در کتاب به تحلیل دانش‌آموز نیاز دارند.

### ۲. نتایج اصلی

ازآنجا که شرکت فعال یادگیرنده در امر آموزش یکی از اصول یادگیری در جریان یادگیری است و یکی از روش‌هایی که می‌تواند میزان مشارکت فعال یادگیرنده را در جریان یادگیری مشخص کند، روش ویلیام رومی

جدول ۱: تحلیل متن کتاب بر اساس الگوی ویلیام رومی

| <i>J</i> | <i>I</i> | <i>H</i> | <i>G</i> | <i>F</i> | <i>E</i> | <i>D</i> | <i>C</i> | <i>B</i> | <i>A</i> |                     |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------------------|
| ۱        | ۰        | ۰        | ۹        | ۰        | ۱        | ۰        | ۴        | ۳        | ۴        | صفحات ۸، ۹، ۱۴      |
| ۱        | ۰        | ۰        | ۷        | ۰        | ۴        | ۰        | ۲        | ۵        | ۷        | صفحات ۲۰، ۲۴، ۲۵    |
| ۲        | ۰        | ۰        | ۰        | ۰        | ۰        | ۵        | ۱        | ۷        | ۳        | صفحات ۳۵، ۳۹        |
| ۱        | ۰        | ۰        | ۲        | ۰        | ۷        | ۰        | ۴        | ۱۰       | ۰        | صفحات ۴۷، ۴۹        |
| ۱        | ۰        | ۰        | ۳        | ۰        | ۱        | ۱        | ۰        | ۶        | ۰        | صفحات ۵۱، ۵۵، ۵۷    |
| ۰        | ۰        | ۱        | ۲        | ۰        | ۰        | ۰        | ۴        | ۱        | ۰        | صفحات ۶۱، ۶۶        |
| ۲        | ۰        | ۰        | ۳        | ۰        | ۰        | ۰        | ۱        | ۷        | ۲        | صفحات ۷۲، ۷۳        |
| ۲        | ۰        | ۰        | ۱        | ۰        | ۰        | ۱        | ۳        | ۱۱       | ۰        | صفحات ۸۶، ۸۹        |
| ۱        | ۲        | ۰        | ۲        | ۰        | ۰        | ۴        | ۲        | ۷        | ۰        | صفحات ۹۶، ۹۷        |
| ۰        | ۰        | ۲        | ۶        | ۰        | ۱        | ۴        | ۰        | ۱        | ۹        | صفحات ۱۰۳، ۱۰۵، ۱۰۹ |
| ۱        | ۰        | ۰        | ۷        | ۰        | ۲        | ۰        | ۲        | ۱۲       | ۱        | صفحات ۱۱۲، ۱۱۴، ۱۱۶ |
| ۸        | ۰        | ۴        | ۱۸       | ۰        | ۰        | ۰        | ۰        | ۶        | ۰        | صفحات ۱۲۱، ۱۲۸، ۱۳۶ |
| ۲۰       | ۲        | ۷        | ۶۰       | ۰        | ۱۶       | ۱۵       | ۲۳       | ۷۰       | ۲۶       | مجموع               |

مجموع مقوله‌های فعال: ۱۳۴

مجموع مقوله‌های غیرفعال: ۸۳

مجموع مقوله‌های خنثی: ۲۲

$$I = \frac{m}{n} = \frac{134}{83} = 1.6$$

است؛ در این پژوهش به تحلیل محتوای کتاب حسابان دوازدهم بر اساس تکنیک ویلیام رومی پرداختیم. در این پژوهش، مشخص شد ضریب درگیری متن کتاب، 1.6 هست که نشانه فعال بودن متن کتاب حسابان دوازدهم است که به فراگیران توانایی تفکر و دقت و تحلیل می‌دهد. ضریب درگیری تصویرها، 1.1 به دست آمد که بیانگر فعال بودن تصویرهای کتاب حسابان دوازدهم است؛ به‌طوری‌که در غالب تصاویر دانش‌آموز ابتدا باید تصویر یا نمودار داده‌شده را تحلیل کند، سپس به سؤالات مربوطه پاسخ دهد. طبق نتایج به‌دست‌آمده در جدول ۳، ضریب درگیری سؤالات کتاب حسابان دوازدهم ۴ به دست آمد که طبق تکنیک ویلیام رومی بیانگر این است که سؤالات کتاب به شیوه بسیار فعال نوشته‌شده‌اند. با توجه به تغییرات رویکرد آموزشی و با توجه به فرایندهای مشارکتی و فعال بودن کتاب‌های آموزشی باید توجه شود که ارائه مطالب به روش فعال باید به‌صورت هوشمندانه و درست و به‌جا باشد؛ زیرا همان‌گونه که میزان درگیری پایین، کاهش سطح یادگیری را در پی دارد؛ میزان درگیری بیش‌ازحد معمول نیز، خستگی دانش‌آموز را در پی خواهد داشت. در این راستا

جدول ۲: تحلیل تصاویر کتاب بر اساس الگوی ویلیام رومی

| $D$ | $C$ | $B$ | $A$      |
|-----|-----|-----|----------|
|     |     | *   | صفحه ۱۱  |
|     |     |     | *        |
|     | *   |     | صفحه ۳۷  |
|     |     |     | *        |
|     |     | *   | صفحه ۴۳  |
|     |     |     | *        |
|     |     | *   | صفحه ۶۰  |
|     |     |     | *        |
|     |     | *   | صفحه ۷۵  |
|     |     |     | *        |
|     |     | *   | صفحه ۸۱  |
| *   |     |     |          |
|     |     |     | صفحه ۱۰۲ |
|     |     |     | *        |
|     |     |     | صفحه ۱۰۵ |
|     |     |     | *        |
|     |     |     | صفحه ۱۰۶ |
|     |     | *   |          |
|     |     |     | صفحه ۱۱۲ |
|     |     | *   |          |
|     |     |     | صفحه ۱۱۶ |
|     |     | *   |          |
|     |     |     | صفحه ۱۲۰ |
|     |     |     | *        |
|     |     |     | صفحه ۱۲۴ |
|     |     | *   |          |
|     |     |     | صفحه ۱۲۸ |
|     |     |     | *        |
|     |     |     | صفحه ۱۳۴ |

مجموع مقوله‌های فعال: ۷

مجموع مقوله‌های غیرفعال: ۶

مجموع مقوله‌های خنثی: ۲

$$I = \frac{m}{n} = \frac{7}{6} = 1.1$$

پیشنهادهای زیر ارائه می‌شود:

- تألیف کتاب‌های درسی با مشارکت معلمان باشد که درگیری کامل با آموزش آن کتاب‌ها دارند و از نتایج تحلیل محتوای کتاب‌های درسی استفاده شود.

- در تدوین کتاب درسی از ارائه سؤال‌هایی با حجم اطلاعات زیاد و خارج از توانایی دانش‌آموز خودداری شود.

- به معلمان پیشنهاد می‌شود در روند تدریس دانش‌آموزان را به چالش بکشند و ظرفیت‌های ذهنی وی را

## جدول ۳: تحلیل تمارین کتاب بر اساس الگوی ویلیام رومی

| <i>D</i>                 | <i>C</i> | <i>B</i> | <i>A</i>            |
|--------------------------|----------|----------|---------------------|
|                          | *        |          | صفحه ۴ سؤال ۱       |
|                          | *        |          | صفحه ۱۰ سؤال ۳      |
|                          | *        |          | صفحه ۲۶ فعالیت ۱    |
|                          | *        |          | صفحه ۳۷ کار در کلاس |
| *                        |          |          | صفحه ۴۴ سؤال ۲      |
|                          | *        |          | صفحه ۵۴ فعالیت ۱    |
| مجموع مقوله‌های فعال: ۱۲ |          | *        | صفحه ۵۶ سؤال ۲      |
|                          | *        |          | صفحه ۶۹ سؤال ۵      |
|                          | *        |          | صفحه ۸۳ سؤال ۹      |
|                          | *        |          | صفحه ۹۶ کار در کلاس |
|                          | *        |          | صفحه ۱۰۹ سؤال ۳     |
|                          |          | *        | صفحه ۱۲۸ سؤال ۵     |
|                          | *        |          | صفحه ۱۳۵ سؤال ۱     |
|                          |          | *        | صفحه ۱۳۹ سؤال ۲     |
|                          | *        |          | صفحه ۱۴۴ سؤال ۱     |
|                          |          |          |                     |

مجموع مقوله‌های غیرفعال: ۳

$$I = \frac{m}{n} = \frac{12}{3} = 4$$

فعال کنند تا دانش‌آموزان در حل و تحلیل سؤالات به نوآوری دست یابند و صرفاً مطالب به صورت آماده به دانش‌آموزان ارائه نشود.

– با توجه به جدول ۱، در این کتاب به سؤالات گروه *H* کم توجهی شده است. پیشنهاد می‌شود در طراحی سؤالات کتاب، به این بخش توجه ویژه‌ای شود.

## مراجع

۱. ع. بدریان و ط. رستگار، مطالعه تطبیقی استانداردهای آموزش علوم دوره آموزش عمومی ایران و کشورهای موفق در آزمون تیمز، ارائه شده در همایش نوآوری در برنامه درسی دوره ابتدایی، (۱۳۸۵).
۲. ا. بیابانگرد، روانشناسی تربیتی (آموزش و یادگیری)، نشر ویرایش، ۱۳۸۸.
۳. ن. حسن مرادی، تحلیل محتوای کتب درسی، انتشارات آبیژ، (۱۳۹۹).

۴. ز. کرمی، پ. اسدیگی و م. کرمی، تحلیل محتوای کتاب ریاضی ۱ پایه اول متوسطه بر اساس تکنیک ویلیام رومی و حیطه شناختی بلوم، فصلنامه پژوهش در برنامه ریزی درسی، (۱۳۹۲)، سال دهم، پیاپی ۳۷، ۲ (۱۰)، ۱۶۷-۱۷۹.
  ۵. ط. کمالی، تحلیل محتوای کتاب حسابان ۱ (ریاضی و فیزیک) پایه یازدهم دوره متوسطه دوم چاپ ۱۳۹۶ بر اساس تکنیک ویلیام رومی و حیطه شناختی بلوم، فصلنامه مطالعات روانشناسی و علوم تربیتی، بهار، شماره چهارم، (۱۳۹۸).
  ۶. و. گیبس و د. فاکس، بحران کاذب در آموزش علوم (ترجمه شورای گزینش ترجمه متون دفتر انتشارات کمک آموزشی، ۱۳۸۷)، نشریه جوانه، (۱۹۹۹).
  ۷. ی. معروفی و م. یوسفزاده، تحلیل محتوا در علوم انسانی (ویرایش دوم)، انتشارات سپهر دانش، (۱۳۸۹).
  ۸. م. موسی‌پور، تحلیل محتوای کتاب حسابان (۱) پایه یازدهم متوسطه دوم (ریاضی و فیزیک) بر اساس فن ویلیام رومی و حوزه شناختی بلوم، پویش در آموزش علوم پایه، (۱۳۹۶)، ۳ (۷)، ۸۲-۷۱.
  ۹. م. نوریان، راهنمای عملی تحلیل محتوای کتاب‌های درسی دوره ابتدایی، انتشارات شورا، (۱۳۹۰).
10. Ackerman, D. B. & Perkins, D. N. *Integrating Thinking and Learning Skills across the Curriculum*. In H. H. Jacobs (Eds.), *Interdisciplinary Curriculum: Design and Implementation* (pp. 25-38). Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development, (1989).



## A NEW MODEL FOR GAMMA FUNCTION IN NATURAL NUMBER

ROSTAM MOHAMADIAN\*

Department of Mathematics, Faculty of Mathematical and Computer Sciences, Shahid Chamran University of Ahwaz, Ahwaz, IRAN  
mohamadian\_r@scu.ac.ir

**Abstract.** In this article, first, with a simple technique, we obtain a well-known formula about the gamma function and some theorems of Laplace transforms. After that, we mention a new formula, which can be used to calculate some not so convenient improper integrals, and also with the help of it and the Gaussian integral, we obtain a new convergence result regarding Hermite polynomials. Then with the help of the same formula, we obtain a new model for the gamma function in natural numbers.

---

2010 Mathematics Subject Classification. 00A05, 33B15.

Keywords. Power series, Laplace transform, Gamma function, Gauss integral, Hermite polynomials.

Date: Received 6-7-2024 Revised 17-7-2024 Accepted 19-7-2024 Available Online 27-9-2023  
©Ferdowsi University of Mashhad.



## مدلی جدید برای تابع گاما در اعداد طبیعی

رستم محمدیان\*

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز

mohamadian\_r@scu.ac.ir

چکیده. در این مقاله ابتدا با تکنیکی ساده، یک فرمول شناخته شده درباره تابع گاما و چند قضیه از تبدیلات لاپلاس را به دست می آوریم. پس از آن به فرمولی اشاره می کنیم که به کمک آن می توان برخی از انتگرال های ناسره نه چندان راحت را محاسبه کرد و هم چنین به کمک آن و انتگرال گوس، نتیجه همگرایی جدیدی در خصوص چند جمله ای های هرمیت به دست می آوریم. سپس به کمک همان فرمول، مدل جدیدی برای تابع گاما در اعداد طبیعی به دست می آوریم.

### ۱. پیش گفتار

در ریاضی و دیگر شاخه های علوم از جمله فیزیک و مهندسی اهمیت تابع گاما، بتا، تبدیلات لاپلاس و مبحث همگرایی یا واگرایی سری ها و انتگرال های ناسره بر هیچ کس پوشیده نیست. در این مقاله ما با کمک سری های مکلورن و فرمولی دیده نشده، مطالبی را در خصوص این مفاهیم بیان می کنیم. مقاله به این صورت بخش بندی شده است که در بخش دوم که اندکی مقدماتی است با کمک تبدیل لاپلاس و سری هندسی، سری های مکلورن معروف را به دست آورده و با کمک سری دوجمله ای فرمولی مربوط به تابع گاما را ثابت می کنیم. در بخش سوم، قضایای مهم تبدیلات لاپلاس را فقط به کمک سری ها ثابت می کنیم. در بخش چهارم، با بهره گیری از

2010 Mathematics Subject Classification. 00A05, 33B15.

واژگان کلیدی. سری توانی، تبدیل لاپلاس، تابع گاما، انتگرال گوس، چند جمله ای های هرمیت..

تاریخ: دریافت ۱۴۰۳/۴/۱۶ بازنگری ۱۴۰۳/۴/۲۷ پذیرش ۱۴۰۳/۴/۲۹ انتشار برخط ۱۴۰۲/۷/۵

نحوه ارجاع به این مقاله: ر. محمدیان، مدلی جدید برای تابع گاما در اعداد طبیعی، به سوی علوم ریاضی، ۴ (۱۴۰۳)، شماره

۱، ۴۲-۶۴.

©دانشگاه فردوسی مشهد.

فرمولی، مقدار عددی برخی از انتگرال‌های ناسره نه‌چندان آسان را می‌یابیم. از آن جمله تعمیمی از تابع بتا و نتیجه همگرایی مهمی در خصوص چندجمله‌ای‌های هرمیت البته به کمک انتگرال گوس به دست می‌آوریم. پس از آن نمایش جدیدی برای تابع گاما به ازای اعداد طبیعی به دست می‌آوریم. در نهایت اندکی به بحث درباره یک سری عددی خاص می‌پردازیم. از آنجا که مطالب حالت عمومی دارند می‌توانید برای دیدن جزئیات به تمام مراجع نگاه کنید.

## ۲. سری‌های هندسی و دوجمله‌ای و لاپلاس

در این بخش با کمک سری هندسی و تبدیلات لاپلاس، سری‌های مکلورن معروف را به دست می‌آوریم. فرض بر آن است که تمام شرایط موردنیاز برقرار هستند بدون آن‌که به آن‌ها اشاره کنیم. از آن جمله فرض بر آن است که توابع موردبحث با بسط مکلورن خود در بازه معلوم برابر بوده و هر جا سخن از تبدیل لاپلاس به میان می‌آید تابع به‌طور تکه‌تکه پیوسته و از مرتبه نمایی است. همچنین لاپلاس و لاپلاس معکوس یک سری، برابر با لاپلاس یا لاپلاس معکوس تک‌تک جملات آن است.

مثال ۱.۲. با فرض  $0 < x < 1$  سری  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$  را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم  $x = \frac{1}{p}$  که  $p > 1$  در این صورت

$$\frac{1}{p-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{n+1}}$$

بنابراین

$$L^{-1}\left(\frac{1}{p-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L^{-1}\left(\frac{1}{p^{n+1}}\right).$$

در نتیجه

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

مثال ۲.۲. سری  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$  را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم  $x = \frac{1}{p}$  و  $p > 0$ . در این صورت

$$\frac{p^2}{p^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{p^{2n}}.$$

در نتیجه

$$\frac{1}{p^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{p^{2n+2}}.$$

بنابراین

$$L^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L^{-1}\left(\frac{1}{p^{2n+2}}\right).$$

در نتیجه

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

به طور کاملاً مشابه می توان سری های مکلاورن توابع  $\cos(x)$  و  $\sinh(x)$  و  $\cosh(x)$  را به دست آورد.

مثال ۳.۲. اگر  $L(f(x)) = \frac{p}{p^2+4}$ ، آنگاه  $f(x)$  را بیابید.

حل: فرض کنیم

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}.$$

بنابراین

$$L(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \frac{(2n)!}{p^{2n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \frac{(2n+1)!}{p^{2n+2}}. \quad (1.2)$$

از طرف دیگر با داشتن سری هندسی و با شرط  $p > 2$  داریم

$$L(f(x)) = \frac{1}{p(1 + \frac{4}{p^2})} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{p^{2n+1}}. \quad (2.2)$$

از (۱.۲) و (۲.۲) نتیجه می شود  $(-1)^n 4^n a_{2n} = (2n)! \cdot a_{2n}$  و  $a_{2n+1} = 0$ . که از آنجا خواهیم داشت  $a_{2n} = \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!}$ . بنابراین می توان نوشت:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2x)^{2n} = \cos(2x).$$

در ادامه با همان تکنیک گفته شده و با کمک سری دوجمله ای یک فرمول معروف مربوط به تابع گاما را به دست می آوریم. با فرض  $0 < x < 1$  سری دوجمله ای

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$$

را در نظر می گیریم.

فرض کنیم  $m = \frac{-1}{2}$ . در این صورت

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{-1}{2}}{n} x^n.$$

قرار می دهیم  $x = \frac{1}{p^2}$  در این صورت

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{-1}{2}}{n} \frac{1}{p^{2n}}$$

و در نتیجه

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{-1}{2}}{n} \frac{1}{p^{2n+1}}.$$

حال

$$L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{-1}{2}}{n} L^{-1}\left(\frac{1}{p^{2n+1}}\right)$$

پس

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{-1}{2}}{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}.$$

در نتیجه

$$\binom{\frac{-1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}.$$

و در نهایت داریم

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n)!} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

۳. برخی از قضایای لاپلاس

در این بخش با همان تکنیک، قضایای شناخته شده مربوط به تبدیل لاپلاس از آن جمله قضیه کنولوسیون و فرمولی مربوط به تابع بتا را با کمک سری های مکلورن به دست می آوریم. فرض بر آن است که تابع  $f(x)$  دارای سری مکلورن و همچنین تبدیل لاپلاس تابع  $f(x)$  موجود است. به علاوه داریم  $L(f(x)) = F(p)$  و همچنین شرایط جابجایی لاپلاس و سیگما فراهم است.

**قضیه ۱.۳** (مشتق تبدیل لاپلاس). اگر  $L(f(x)) = F(p)$ ، آنگاه  $L(x f(x)) = -F'(p)$ .

**اثبات.** فرض کنیم  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$  با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین خواهیم داشت:

$$L(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \frac{n!}{p^{n+1}} = F(p).$$

از طرف دیگر واضح است که:

$$x f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^{n+1},$$

و

$$F'(p) = - \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{n+1}{p^{n+2}}.$$

دوباره با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین خواهیم داشت:

$$L(xf(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \frac{(n+1)!}{p^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{n+1}{p^{n+2}} = -F'(p),$$

که همان نتیجه مطلوب است.

□

**قضیه ۲.۳** (تبدیل لاپلاس مشتق). اگر داشته باشیم  $L(f(x)) = F(p)$ ، آنگاه

$$L(f'(x)) = pF(p) - f(0).$$

*اثبات.* واضح است که  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1}$  با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین خواهیم داشت:

$$L(f'(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{p^n} = p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+1}}.$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$L(f'(x)) = p \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+1}} - \frac{f(0)}{p} \right) = pF(p) - f(0),$$

□

که همان نتیجه مطلوب است.

به‌طور مشابه با روال فوق می‌توان تبدیل لاپلاس مشتق مرتبه  $-n$  ام تابع، یعنی  $f^{(n)}(x)$  را به دست آورد. به‌عنوان نمونه می‌توان نشان داد

$$L(f''(x)) = p^2 L(f(x)) - pf(0) - f'(0).$$

**قضیه ۳.۳** (تبدیل لاپلاس انتگرال). اگر  $L(f(x)) = F(p)$ ، آنگاه  $L(\int_0^x f(x)dx) = \frac{F(p)}{p}$ .

*اثبات.* واضح است که

$$\int_0^x f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین خواهیم داشت:

$$L\left(\int_0^x f(x)dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+2}} = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+1}} = \frac{F(p)}{p},$$

که همان نتیجه مطلوب است.

□

قضیه ۴.۳ (انتگرال تبدیل لاپلاس). اگر  $L(f(x)) = F(p)$  آنگاه با فرض  $f(0) = 0$  داریم

$$\int_p^\infty F(p) dp = L\left(\frac{f(x)}{x}\right).$$

اثبات. واضح است که  $L\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{np^n}$  از طرف دیگر داریم  $F(p) = \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+1}}$  بنابراین

$$\int_p^b F(p) dp = \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{np^n} - \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{nb^n}$$

در نتیجه

$$\int_p^\infty F(p) dp = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_p^b F(p) dp = \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{np^n} = L\left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

□

و کار تمام است.

قضیه ۵.۳ (انتقال). اگر  $L(f(x)) = F(p)$  آنگاه  $L(e^{ax}f(x)) = F(p-a)$ .

اثبات.

$$L(e^{ax}f(x)) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} L(e^{ax}x^n) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \frac{n!}{(p-a)^{n+1}} = F(p-a).$$

□

به عبارت دیگر برای دانستن  $L(e^{ax}f(x))$  کافی است  $L(e^{ax}x^n)$  را داشته باشیم.

قضیه ۶.۳ (کنولوسیون). فرض کنیم  $f(x)$  و  $g(x)$  دو تابع با شرایط لازم باشند. در این صورت

$$L(f * g) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n \frac{1}{p^{n+2}} f^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0).$$

اثبات. آشکار است که

$$L(f(x)) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+1}} = F(p),$$

$$L(g(x)) = \sum_{n=0}^\infty \frac{g^{(n)}(0)}{p^{n+1}} = G(p).$$

بنابراین

$$L(f * g) = F(p)G(p) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n \frac{1}{p^{n+2}} f^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0).$$

□

به کمک فرمول فوق می‌توان مجموع برخی از سری‌های پیچیده را به دست آورد. برای راستی آزمایی، یک نمونه ساده در زیر ارائه می‌کنیم.

مثال ۷.۳. فرض کنیم  $f(x) = x$  و  $g(x) = \sin(x)$  در این صورت بنا بر فرمول کنولوسیون می‌دانیم

$$L(f * g) = \frac{1}{p^2(p^2 + 1)}.$$

اکنون با انجام محاسبات می‌توان دید که

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{p^{n+2}} f^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0) = \frac{1}{p^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^{2n}} = \frac{1}{p^4} \frac{p^2}{p^2 + 1} = \frac{1}{p^2(p^2 + 1)}.$$

در ادامه تعمیمی ساده از تابع بتا را به دست می‌آوریم. تابع زیر را در نظر می‌گیریم.

$$B_a(m, n) = \int_0^a x^{m-1} (a-x)^{n-1} dx$$

با تغییر متغیر  $x = at$  به راحتی می‌توان دید که

$$B_a(m, n) = B(m, n) a^{m+n-1} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} a^{m+n-1}$$

که در آن  $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$  تابع معروف بتاست. اکنون به کمک فرمول‌های این بخش این گزاره را نشان می‌دهیم.

مثال ۸.۳ (تعمیم تابع بتا). اگر از طرفین قضیه کنولوسیون لاپلاس معکوس بگیریم خواهیم داشت

$$f * g = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n+1)!} f^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0) x^{n+1}. \quad (۱.۳)$$

از طرف دیگر داریم

$$\begin{aligned} f * g &= \int_0^x f(t) g(x-t) dt = \int_0^x \left[ \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} (x-t)^n \right) \right] dt \\ &= \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} (x-t)^{n-k} \right) dt \\ &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} \right) \int_0^x t^k (x-t)^{n-k} dt. \end{aligned} \quad (۲.۳)$$

اکنون از روابط (۱.۳) و (۲.۳) نتیجه می‌شود

$$\int_0^x t^k (x-t)^{n-k} dt = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

با تغییر حروف می‌توان نوشت

$$\int_0^a x^{m-1}(a-x)^{n-1}dx = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}a^{m+n-1}.$$

۴. یافتن مقدار برخی از انتگرال‌ها به کمک فرمولی مهم

در این بخش با ساختن فرمولی به کمک سری‌های مک‌لورن و تبدیلات لاپلاس، دو هدف را دنبال می‌کنیم. یکی نشان دادن همگرایی و یافتن مقدار عددی برخی از انتگرال‌های مجازی به کمک سری‌هاست و دیگری نشان دادن همگرایی برخی از سری‌ها البته بدون دانستن جمله عمومی آن به‌طور شفاف به کمک انتگرال‌های مجازی. در شاخه‌هایی از ریاضی از جمله در آنالیز گاه می‌بینیم که انتگرال‌های مجازی نوع اول و سری‌های عددی نامتناهی هم‌رفتارند که از آن جمله می‌توان به آزمون انتگرال برای همگرایی سری‌ها اشاره کرد. فرمول اصلی این بخش که هم‌اینک آن را ارائه می‌کنیم نشان می‌دهد که علاوه بر هم‌رفتاری مقدار آن دو نیز باهم برابر است و این موضوع اهمیت بالایی در محاسبات دارد. برای نمونه از این دست، مرجع [۷]، قضیه ۵.۸.۳ را بنگرید. قضیه زیر که ابزار مفیدی در محاسبه انتگرال‌های ناسره برحسب سری‌هاست در واقع حالت کلی قضیه انتگرال تبدیل لاپلاس است که در بخش قبل به آن پرداختیم.

قضیه ۱.۴. فرض کنیم بسط مک‌لورن تابع  $f(x)$  روی بازه  $I$  موجود باشد. در این صورت با فرض آن‌که  $x \in I - \{0\}$  داریم

$$\int_0^\infty \frac{f(x) - f(0)}{x} e^{-px} dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{np^n}$$

اثبات. طبق فرض داریم  $f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ . بنابراین می‌توان نوشت

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^{n-1} = \frac{f(0)}{x} + \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^{n-1}.$$

اکنون با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین، با شرط وجود تبدیل لاپلاس و شرط وجود  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$  داریم

$$L\left(\frac{f(x) - f(0)}{x}\right) = \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \frac{(n-1)!}{p^n}.$$

درنتیجه می‌توان نوشت:

$$L\left(\frac{f(x) - f(0)}{x}\right) = \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{np^n}.$$

با توجه به تعریف لاپلاس خواهیم داشت:

$$\int_0^\infty \frac{f(x) - f(0)}{x} e^{-px} dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{np^n}. \quad (\text{فرمول اصلی})$$

□

در ادامه به کمک این فرمول، چند انتگرال و سری را حساب می‌کنیم. اما پیش از آن به آزمون نسبت برای همگرایی این سری اشاره می‌کنیم که در اینجا ارتباطی سه‌گانه میان حد و مشتق و انتگرال را بیان می‌کند.

**نکته ۲.۴** (آزمون نسبت). فرض کنیم برای هر عدد طبیعی  $n$  داشته باشیم  $f^{(n)}(0) \neq 0$  در این صورت برای  $p$  های مناسب می‌توان گفت که:

(الف) انتگرال همگراست اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(0)}{f^{(n)}(0)} \right| < p$

(ب) انتگرال واگراست اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(0)}{f^{(n)}(0)} \right| > p$

(پ) آزمون بی‌نتیجه است اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(0)}{f^{(n)}(0)} \right| = p$

**نکته ۳.۴**. فرمول اصلی را می‌توان در حالت دیگر و برای محاسبه انتگرال‌های دیگری به شرح زیر به دست آورد.

$$\int_0^\infty \frac{f(x) - f(0) - x f'(0)}{x^2} e^{-px} dx = \sum_{n=2}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n(n-1)p^{n-1}}.$$

به‌طور کلی می‌توان نوشت:

$$\int_0^\infty \frac{f(x) - \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}{x^{m+1}} e^{-px} dx = \sum_{n=m+1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n(n-1) \cdots (n-m)p^{n-m}}.$$

خاطر نشان کنیم که می‌توان در قضیه ۱.۴، بسط تیلر تابع را حول نقطه دلخواه  $c$  در نظر گرفت و صورت دیگری از این فرمول‌ها را به دست آورد.

به‌عنوان نمونه‌ای از نکته ۳.۴، انتگرال زیر را حساب می‌کنیم.

**مثال ۴.۴** فرض کنیم  $f(x) = 1 - \cos(x)$  در این صورت اگر از سری مکلورن  $\tan^{-1}(x)$  انتگرال بگیریم خواهیم داشت

$$x \tan^{-1}(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} x^{2n+2}.$$

با فرض  $x = \frac{1}{p}$  داریم

$$\frac{1}{p} \tan^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 1\right) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} \frac{1}{p^{2n+2}}.$$

بنابراین به‌راحتی دیده می‌شود که

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} \frac{1}{p^{2n+2}} = \sum_{n=2}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n(n-1)p^{n-1}}.$$

پس طبق فرمول فوق داریم:

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos(x)}{x^2} e^{-px} dx = \tan^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) - \frac{1}{2}p \ln\left(\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 1\right).$$

اکنون اگر وقتی که  $p \rightarrow 0$  از طرفین حد بگیریم خواهیم داشت

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

که نتیجه‌ای شناخته شده است.

اکنون به کمک فرمول اصلی، همگرایی چندین انتگرال را بررسی می‌کنیم.

مثال ۵.۴. فرض کنیم  $f(x) = \sin(x)$ . در این صورت داریم  $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$ . به عبارت دیگر

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ (-1)^k, & n = 2k + 1. \end{cases}$$

بنابراین طبق فرمول اصلی داریم

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} e^{-px} dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{np^n} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)p^{2n+1}} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{p}\right).$$

اگر قرار دهیم  $p = 1$ ، آنگاه

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} e^{-x} dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}.$$

همچنین نتیجه می‌شود

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{p \rightarrow 0^+} \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} e^{-px} = \lim_{p \rightarrow 0^+} \tan^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

مثال ۶.۴. فرض کنیم  $f(x) = \frac{x^{m+1}}{m!}$ . در این صورت داریم

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n \neq m+1, \\ m+1, & n = m+1. \end{cases}$$

بنابراین طبق فرمول اصلی داریم

$$L(x^m) = \int_0^\infty x^m e^{-px} dx = \frac{m!}{p^{m+1}}.$$

اگر قرار دهید  $p = 1$ ، آنگاه

$$\int_0^\infty x^m e^{-x} dx = m! = \Gamma(m+1).$$

مثال ۷.۴. فرض کنیم  $f(x) = \cos(x)$ . در این صورت  $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$ ، پس طبق فرمول اصلی داریم

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x) - 1}{x} e^{-px} dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2np^{2n}}.$$

از طرفی طبق سری هندسی داریم

$$\begin{aligned} \frac{p}{p^2 + 1} &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{p^{2n+1}} \\ \Rightarrow \frac{p}{p^2 + 1} &= \frac{1}{p} + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{p^{2n+1}} \\ \Rightarrow \int_1^p \frac{s}{s^2 + 1} ds &= \int_1^p \frac{1}{s} ds + \sum_{n=1}^\infty \int_1^p \frac{(-1)^n}{p^{2n+1}} dp \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p^2 + 1}{2}\right) &= \ln(p) + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2n} - \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2np^{2n}} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2np^{2n}} &= \ln(p) - \ln\left(\sqrt{\frac{p^2 + 1}{2}}\right) + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2n} = \ln\left(\frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{p^2 + 1}}\right) + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2n} \\ \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\cos(x) - 1}{x} e^{-px} dx &= \ln\left(\frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{p^2 + 1}}\right) + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2n} \\ &= \ln\left(\frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{p^2 + 1}}\right) + \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} \\ &= \ln\left(\frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{p^2 + 1}}\right) - \frac{1}{2} \ln 2 = \ln\left(\frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}}\right). \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x) - 1}{x} e^{-px} dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2np^{2n}} = \ln\left(\frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}}\right).$$

با فرض  $p = 1$  داریم

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x) - 1}{x} e^{-x} dx = -\frac{1}{2} \ln 2.$$

مثال ۸.۴. فرض کنیم  $f(x) = e^{-(a-1)x} - e^{-(b-1)x}$  و  $a, b > 0$  در این صورت به آسانی می توان دید که

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}((b-1) - (a-1)).$$

پس طبق فرمول اصلی داریم

$$\int_0^\infty \frac{e^{-(a-1)x} - e^{-(b-1)x}}{x} e^{-px} dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{np^n}.$$

با فرض  $p = 1$  داریم

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx &= \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} ((b-1) - (a-1)) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} (b-1) - \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} (a-1) \\ &= \ln(b) - \ln(a) = \ln\left(\frac{b}{a}\right). \end{aligned}$$

**مثال ۹.۴.** فرض کنیم  $f(x) = \cos(ax) - \cos(bx)$ . در این صورت  $f^{(2k)}(0) = (-1)^k(a^{2k} - b^{2k})$  و  $f^{(2k+1)}(0) = 0$  برای  $p > 0$  طبق فرمول اصلی داریم

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} e^{-px} dx &= \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{(a^{2n} - b^{2n})}{2np^{2n}} \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2n} \left(\frac{a}{p}\right)^{2n} - \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2n} \left(\frac{b}{p}\right)^{2n} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left( \left| \frac{p^2 + a^2}{p^2 + b^2} \right| \right). \end{aligned}$$

با حدگیری از طرفین وقتی که  $p \rightarrow 0$  داریم

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

نکته ۱۰.۴. اگر تابع  $g$  از هر مرتبه‌ای مشتق‌پذیر باشد و داشته باشیم  $f(x) = xg(x)$ ، آنگاه با توجه به قضیه لایبنیتز داریم

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= xg^{(n)}(x) + ng^{(n-1)}(x) \\ \rightarrow f^{(n)}(0) &= ng^{(n-1)}(0) \\ \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{np^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n-1)}(0)}{p^n} \\ \rightarrow \int_0^{\infty} g(x)e^{-px} dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n-1)}(0)}{p^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{p^{n+1}}. \end{aligned}$$

مثال ۱۱.۴. فرض کنیم  $g(x) = e^{-ax}$ . در این صورت طرف چپ فرمول فوق برابر است با  $\int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-px} dx = \frac{1}{p+a}$ . برای طرف دوم با توجه به این که  $g^{(n)}(0) = (-1)^n a^n$  داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{p^{n+1}} = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{a}{p}\right)^n = \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \frac{a}{p}} = \frac{1}{p+a}$$

که درستی آن را نشان می‌دهد.

نکته ۱۲.۴. اگر تابع  $g$  از هر مرتبه‌ای مشتق‌پذیر باشد و داشته باشیم  $f(x) = xg(x)e^x$ ، آنگاه می‌توان نشان داد

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} g^{(k-1)}(x).$$

بنابراین طبق فرمول اصلی می‌توان نوشت

$$\int_0^{\infty} g(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(0).$$

مثال ۱۳.۴. فرض کنیم  $g(x) = e^{-ax}$  که در آن داشته باشیم  $0 < a \leq 1$ . در این صورت طرف چپ فرمول فوق برابر است با  $\int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$ . برای طرف دوم با توجه به این که  $g^{(n)}(0) = (-1)^n a^n$  داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k a^k = \sum_{n=0}^{\infty} (1-a)^n = \frac{1}{a}$$

که درستی آن را نشان می‌دهد.

نکته ۱۴.۴. برای محاسبه انتگرال

$$I = \int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} e^{-px} dx$$

کافی است قرار دهیم  $g(x) = f(ax) - f(bx)$ . آنگاه مطابق فرمول اصلی داریم  $I = \sum_{n=1}^\infty \frac{g^{(n)}(0)}{np^n}$  اما آشکار است که  $g^{(n)}(0) = (a^n - b^n)f^{(n)}(0)$ . بنابراین  $I = \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{np^n} (a^n - b^n)$ . به عنوان نمونه و با شرط  $p > a, b$

$$I = \frac{p(a-b)}{(p-a)(p-b)}, \text{ آنگاه } f^{(n)}(0) = n! \text{ اگر } n=1$$

$$I = \ln\left(\frac{p-b}{p-a}\right), \text{ آنگاه } f^{(n)}(0) = 1! \text{ اگر } n=1$$

$$I = \ln\left(\frac{p+b}{p+a}\right), \text{ آنگاه } f^{(n)}(0) = (-1)^n n! \text{ اگر } n=1$$

نکته ۱۵.۴. فرض کنیم  $f(0) = 0$ . در این صورت به کمک فرمول اصلی و ضرب دو سری می توان تساوی زیر را نشان داد

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)f(y)}{xy} e^{-p(x+y)} dx dy = \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(0)f^{(n-k)}(0)}{p^{n+1}(k+1)(n-k)}.$$

برای ارائه نمونه دیگر ابتدا نکته زیر مورد نیاز است.

نکته ۱۶.۴. تساوی زیر برقرار است.

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} a_{2k+1}.$$

مثال ۱۷.۴. انتگرال زیر را حساب می کنیم.

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2xy} e^{-p(x+y)} dx dy.$$

درواقع انتگرال فوق چنین است

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin(x)\sin(y)}{xy} e^{-p(x+y)} dx dy.$$

که آشکار است که مقدار آن به ازای  $p = 1$  برابر با  $\frac{\pi^2}{16}$  است. ما در اینجا آن را به کمک فرمول فوق حساب می کنیم. بنابراین قرار می دهیم  $f(x) = \sin(x)$  و از نکته ۱۴.۴ استفاده می کنیم. چون  $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$  و  $f^{(2k)}(0) = 0$  با توجه به نکته ۱۵.۴ داریم

$$I = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{p^{n+1}} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{f^{(2k+1)}(0)f^{(n-2k)}(0)}{(2k+1)(n-2k)} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \frac{f^{(2k+2)}(0)f^{(n-2k-1)}(0)}{(2k+2)(n-2k-1)} \right).$$

اگر قرار دهیم  $n = 2m + 1, p = 1$ ، پس از انجام محاسبات لازم داریم

$$I = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{(-1)^{m-k}}{2(m-k)+1}$$

$$= \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \right) = \frac{\pi}{4} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16}.$$

برای  $p > 1$  دلخواه خواهیم داشت  $I = \left( \tan^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) \right)^2$ .

مثال ۱۸.۴ (انتگرال گوس). در اینجا انتگرال گوس را برحسب سری بیان کرده و به کمک آن نتیجه همگرایی برای چندجمله‌ای‌های هرمیت به دست می‌آوریم. برای این منظور تابع  $f(x) = xe^{ax}e^{-x^2}$  را که در آن  $a > 1$  فرض شده است در نظر می‌گیریم. یادآوری کنیم که

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}$$

چندجمله‌ای‌های هرمیت هستند. تابع مولد چندجمله‌ای‌های هرمیت به شرح زیر است.

$$e^{2tx-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} x^n$$

اگر قرار دهیم  $2t = a$ ، آنگاه

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n\left(\frac{a}{2}\right)}{n!} x^{n+1}.$$

در نتیجه به راحتی می‌توان دید که  $f^{(n)}(0) = nH_{n-1}\left(\frac{a}{2}\right)$ . بنابراین طبق فرمول اصلی داریم

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2+(a-p)x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n\left(\frac{a}{2}\right)}{p^{n+1}}$$

که در آن  $p \geq a$ ، اما می‌توان دید که

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2+(a-p)x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{(p-a)^2}{4}} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{p-a}{2}\right)\right)$$

که در آن

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

تابع خطا است. در نتیجه داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n\left(\frac{a}{2}\right)}{p^{n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{(p-a)^2}{4}} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{p-a}{2}\right)\right).$$

اگر قرار دهیم  $p = a$ ، آنگاه به نتیجه زیر می‌رسیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(\frac{p}{2})}{p^n} = \frac{p}{2} \sqrt{\pi}$$

و اگر فرض کنیم  $p = 2$ ، آنگاه خواهیم داشت

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(1)}{2^n} = \sqrt{\pi}$$

که نتیجه‌ی جالب و جدیدی درباره چندجمله‌ای‌های هرمیت است. با توجه به صورت‌های گوناگون برای  $H_n(1)$  می‌توان به نتایجی اشاره کرد. به عنوان نمونه با توجه به فرمول

$$H_n(1) = \frac{2^{n+1}e}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} - 2x\right) dx$$

نتیجه می‌شود

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} - 2x\right) dx = \frac{\pi}{2e}$$

یا با توجه به فرمول

$$H_n(1) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} (1+ix)^n dx$$

نتیجه می‌شود

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} (1+ix)^n dx = \pi.$$

با محاسبه هر دو انتگرال بالا به نتیجه زیر می‌رسیم

$$\sqrt{\pi} = 1 + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{5}{4} - \frac{1}{4} + \frac{23}{8} + \frac{29}{8} - \frac{103}{16} - \frac{335}{16} + \frac{257}{32} + \frac{3607}{32} \dots$$

در حالت کلی اگر تابع  $f_m(x) = xe^{2x-x^2} (H_m(x))^2$  را در نظر بگیریم و در فرمول اصلی  $p = 2$  قرار دهیم، آنگاه با توجه به رابطه

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} (H_m(x))^2 dx = 2^m m! \sqrt{\pi}$$

نتیجه می‌شود که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_m^{(n)}(0)}{n2^n} = 2^m m! \sqrt{\pi}.$$

با فرض  $m = 0$  داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(1)}{2^n} = \sqrt{\pi}$$

که همان نتیجه بالاست چرا که  $H_0(x) = 1$  و با فرض  $m = 1$  و پس از انجام محاسبات نتیجه می‌شود که

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)H_n(1)}{2^n} = 2\sqrt{\pi}.$$

۵. نمایش دیگری از تابع گاما

تابع گاما که اولین بار توسط اویلر در سال ۱۹۲۹ معرفی شد در تمام شاخه‌های علوم از جمله فیزیک و مهندسی کاربرد فراوان دارد. این تابع نمایش‌های مختلفی دارد که در ادامه آن‌ها را نشان می‌دهیم. در این بخش ما به کمک فرمول اصلی این نوشته، نمایش جدیدی برای آن البته برای مقادیر طبیعی به دست می‌آوریم. برای اطلاعات دقیق‌تر درباره تابع گاما مراجع [۲، ۶] را بنگرید.

(۱) نمایش اویلر:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^x}{1 + \frac{x}{n}}.$$

(۲) نمایش اویلر:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1)} n^x.$$

(۳) نمایش برنولی:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

(۴) نمایش وایراشتراس:

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{x}{n})^{-1} e^{\frac{x}{n}},$$

که در آن

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = - \int_0^{\infty} e^{-x} \ln(x) dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos(x^2) - \cos(x)}{x} dx \end{aligned}$$

ثابت اویلر-ماسکرونی نام دارد با مقدار تقریبی 0.577 برابر است. نمایش جدید: اکنون به نمایش خودمان می‌پردازیم. فرض کنیم  $f(x) = x^m e^{(p-1)x}$  که در آن  $m$  یک عدد طبیعی و  $p > 1$  یک عدد حقیقی است. در این صورت می‌توان نشان داد که

$$f^{(n)}(0) = n(n-1) \dots (n-m+1)(p-1)^{n-m}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{np^n} &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)(p-1)^{n-m}}{np^n} \\ &= \frac{1}{p^m} \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1) \dots (n-m+1) \left(\frac{p-1}{p}\right)^{n-m} \end{aligned} \quad (1.5)$$

از طرف دیگر با  $(m-1)$  بار مشتق گرفتن از طرفین سری هندسی خواهیم داشت

$$\frac{(m-1)!}{(1-x)} = \sum_{n=m-1}^{\infty} n(n-1) \dots (n-m+2)x^{n-m+1} = \sum_{n=m}^{\infty} (n-1) \dots (n-m+1)x^{n-m}$$

اگر در سری فوق قرار دهیم  $x = \frac{p-1}{p}$  آنگاه نتیجه می‌شود

$$(m-1)!p^m = \sum_{n=m}^{\infty} (n-1) \dots (n-m+1) \left(\frac{p-1}{p}\right)^{n-m} \quad (2.5)$$

اکنون از رابطه‌های (۱.۵) و (۲.۵) آشکار می‌شود که

$$\Gamma(m) = (m-1)! = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{np^n}.$$

درنتیجه داریم

$$\Gamma(m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^n} \frac{d^n}{dx^n} \left[ \left( x^m e^{(p-1)x} \right) \right]_{|x=0}.$$

۶. نکته‌هایی درباره سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

واضح است که سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$  همگراست اما تاکنون مجموع آن نامعلوم است. بنابراین این سری و مقدار مجموع آن موردتوجه ریاضیدانان است. در این بخش، ما طبق فرمولی که به دست آورده‌ایم اندکی درباره این سری صحبت می‌کنیم و آن را به صورت دیگری نشان می‌دهیم. اتحادی که در گزاره بعد نشان داده می‌شود ابتدا در سال ۱۶۹۷ توسط یوهان برنولی ریاضیدان سوئیسی ارائه شده است و به رویای دانشجوی سال دوم معروف است در مقایسه با اتحاد  $x^n + y^n = (x+y)^n$  که به رویای دانشجوی سال اول یا تازه‌وارد معروف است و می‌دانیم که در حالت کلی برقرار نیست. برای اطلاعات بیشتر به [۴، ۷] مراجعه شود.

گزاره ۱.۶. ثابت کنید

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

اثبات. برای اثبات ابتدا تغییر متغیر  $x = e^{-t}$  را به کار می‌بریم. در مرحله دوم از سری مکلورن تابع نمایی استفاده می‌کنیم. در مرحله سوم از قضیه ۵.۱.۳ همان مرجع کمک می‌گیریم که جابجایی انتگرال و سیگما را تضمین می‌کند. در مرحله چهارم اندیس  $n$  را یک واحد منتقل می‌کنیم. در مرحله پنجم تغییر متغیر  $nt = s$  را به کار می‌بریم. در مرحله آخر از این خاصیت تابع گاما کمک می‌گیریم که بیان می‌کند  $\Gamma(n) = (n-1)!$ . بنا بر فرآیند گفته شده می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^x} dx &= \int_0^{\infty} (e^{-t})^{-e^{-t}} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{te^{-t}} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n e^{-nt} \right] e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} t^n e^{-(n+1)t} dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-nt} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} n^{-n} \int_0^{\infty} s^{n-1} e^{-s} ds \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} n^{-n} \Gamma(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}. \end{aligned}$$

□

هم‌چنین می‌توان نشان داد

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^x} dx = \int_0^1 \frac{\ln(\frac{1}{x})}{x^x} dx.$$

اکنون تابع  $f(x) = xe^{xe^{-x}} e^x$  را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم  $g(x) = xe^{xe^{-x}}$  و  $h(x) = e^x$ . طبق فرمول اصلی داریم

$$\int_0^{\infty} e^{xe^{-x}} e^x e^{-px} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{np^n}$$

اما  $h^{(n)}(0) = 1$  و با اندکی محاسبات نتیجه زیر را به دست می‌آوریم.

$$g^{(n)}(0) = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} k(1-k)^{n-k}$$

که در آن  $n \geq 2$ . اکنون بنا بر قاعده لایبنیتز خواهیم داشت

$$f^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(0).$$

درنتیجه داریم

$$f^{(n)}(0) = n + \sum_{k=2}^n \sum_{r=2}^k \binom{n}{k} \binom{k}{r} r(1-r)^{k-r}.$$

با فرض  $p = 2$  و با توجه به گزاره ۱.۶ داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \int_0^{\infty} e^{xe^{-x}} e^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} f^{(n)}(0)$$

درنتیجه

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} &= \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n2^n} f^{(n)}(0) = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n2^n} \left[ n + \sum_{k=2}^n \sum_{r=2}^k \binom{n}{k} \binom{k}{r} r(1-r)^{k-r} \right] \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2}^n \sum_{r=2}^k \frac{1}{n2^n} \binom{n}{k} \binom{k}{r} r(1-r)^{k-r} \end{aligned}$$

درنهایت داریم

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^n} &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2}^n \sum_{r=2}^k \frac{1}{n2^n} \binom{n}{k} \binom{k}{r} r(1-r)^{k-r} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2}^n \sum_{r=2}^k \frac{1}{2^n} \binom{n-1}{n-k, k-r, r-1} (1-r)^{k-r} \end{aligned}$$

که بیان دیگری از این سری معروف است که شاید به یافتن مقدار مجموع آن کمک کند.

نکته ۲.۶. در انتها انتگرال معروف دیگری را به دست می‌آوریم.

$$\frac{1}{x^x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n \ln^n x}{n!}$$

در نتیجه

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^n \ln^n x dx$$

با توجه به گزاره ۱.۶ داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^n \ln^n x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

اکنون اگر قرار دهیم

$$\frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^n \ln^n x dx = \frac{1}{(n+1)^{n+1}},$$

آنگاه خواهیم داشت

$$\int_0^1 x^n \ln^n x dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

که نتیجه درستی است چرا که حالت خاصی از فرمول زیر است

$$\int_0^1 x^m \ln^n x dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

سپاس‌گزاری

نویسنده وظیفه اخلاقی خود می‌داند تا از داور محترم این مقاله، به‌خاطر نظرات و سازنده‌اشان که در غنی‌تر شدن محتوای مقاله نقشی شایسته داشت، تشکر و قدردانی نماید. همچنین بدینوسیله از حمایت مالی معاونت پژوهش و فناوری دانشگاه شهید چمران اهواز در قالب پژوهانه (GN : SCU.MM403 · 648) در انجام این تحقیق تشکر و قدردانی می‌گردد.

مراجع

1. A. Apelblat, *Application of Laplace transformation to evaluation of integrals*, J. Math. Anal. Appl. **186** (1994), 237–253.
2. E. Artin, *The Gamma Function*, Holt, Rinehart and Winston, 1964.
3. H. Bateman, A. Erdélyi, W. Magnus, and F. Oberhettinger, *Tables of integral transforms*, Vol. 1, McGraw Hill, New York, 1954.
4. J.M. Borwein, D.H. Bailey and R. Girgensohn, *Experimentation in mathematics: Computational paths to discovery*, AK Peters Ltd, 2004.
5. W.E. Boyce and Richard C. DiPrima, *Elementary differential equations and boundary value problems*, 10 edition, Wiley, 2012.
6. O.J. Farrell and B. Ross, *Solved problems in analysis*, Dover Publications Inc. New York, 1971.
7. O. Hijab, *Introduction to calculus and classical analysis*, Springer, 2007.

8. E. Kreyszig, *Advanced engineering mathematics*, Wiley, 1998.
9. W. A. Pribitkin, *Laplace's integral, the Gamma function, and beyond*, Amer. Math. Monthly, **109** (2002), no. 3, 235–245.
10. J. L. Schiff, *The Laplace transform: Theory and applications*, Springer Science and Business Media, 1999.
11. G.F. Simmons, *Differential equations with applications and historical notes*, 2nd Edition, McGraw-Hill, 1991.
12. D. Verma, *Relation between Beta and Gamma function By using Laplace transformation*, Researcher, **10**(2018) no. 7, 72–74.



## PRINCIPLES AND STANDARDS OF HIGH SCHOOL MATHEMATICS EDUCATION WITH EMPHASIS ON PROCEDURAL STANDARDS

NOUROOZ HASHEMI\*

Department of Mathematics Education, Farhangian University, Tehran, Iran  
h.nourooz@cfu.ac.ir

**Abstract.** Principles of mathematics education and content standards and (NCTM) abstract. The National Council of Mathematics Teachers of America and Canada has compiled a process for school mathematics that most countries, including Iran, have included in the planning of school mathematics courses. In Iran, the use of these standards in both content and process forms is clearly seen in the educational program of school mathematics courses in the field of preparing teaching resources and explaining the teaching methods of mathematics courses. Due to the importance of procedural standards and the fact that in the research of school mathematics education, especially in secondary school, they have been less discussed in comparison with content standards, this study is for the first time in a coherent way with the method of library research and collecting information from First-hand and important sources and documents and by categorizing and analyzing this information by the method of document analysis, it has defined and introduced the principles and standards of high school mathematics education, such as content and process, and considering the importance of process standards of this type The standard has been emphasized and explained. Also, the relationship of various process standards with each other and their importance in school mathematics education has been investigated and analyzed, and the new modeling process standard has been introduced and described. In addition, how to use them is provided for the use of professionals, teachers, students and students.

2020 Mathematics Subject Classification. 97C30, 97C70, 97D60.

Keywords. Principles of mathematics education, standards, process, secondary mathematics, mathematics education.

Date: Received 16-6-2024 Revised 18-8-2024 Accepted 2-9-2024 Available Online 26-9-2024  
©Ferdowsi University of Mashhad.



## اصول و استانداردهای آموزش ریاضی دوره‌ی متوسطه با تأکید بر استانداردهای فرآیندی

نوروز هاشمی\*

گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران

[h.nourooz@cfu.ac.ir](mailto:h.nourooz@cfu.ac.ir)

چکیده. شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا (NCTM) اصول آموزش ریاضی و استانداردهای محتوایی و فرآیندی برای ریاضیات مدرسه‌ای تدوین کرده است که اکثر کشورها از جمله کشور ایران آن را در برنامه‌ریزی دروس ریاضی آموزشی گنجانده‌اند. در ایران، در برنامه آموزشی دروس ریاضی مدرسه‌ای در ساحت تهیه‌ی منابع درسی و تبیین روش‌های تدریس دروس ریاضی استفاده از این استانداردها در دو قالب محتوایی و فرآیندی به‌روشنی دیده می‌شود. با توجه به اهمیت استانداردهای فرآیندی و اینکه در تحقیقات آموزش ریاضی مدرسه‌ای و به‌ویژه دوره‌ی متوسطه کمتر به آن‌ها در مقایسه با استانداردهای محتوایی پرداخته شده است، این مطالعه برای اولین بار به‌صورت منسجم با روش تحقیق کتابخانه‌ای و جمع‌آوری اطلاعات از منابع و اسناد دست‌اول و مهم و با دسته‌بندی، تجزیه و تحلیل این اطلاعات به روش تحلیل اسنادی، به تعریف و معرفی اصول و استانداردهای آموزش ریاضی دوره‌ی متوسطه از قبیل محتوایی و فرآیندی پرداخته است و با توجه به اهمیت استانداردهای فرآیندی، این نوع استاندارد را مورد تأکید و توضیح قرار داده است. همچنین ارتباط انواع استانداردهای فرآیندی با همدیگر و اهمیت آن‌ها در آموزش ریاضیات مدرسه‌ای مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است و استاندارد جدید فرآیندی مدل‌سازی معرفی و شرح داده شده است. به‌علاوه، چگونگی کاربرد آن‌ها برای استفاده‌ی متخصصان، معلمان، دانشجویان و دانش‌آموزان ارائه شده است.

2010 Mathematics Subject Classification. 97C30, 97C70, 97D60.

واژگان کلیدی. اصول آموزش ریاضی، استانداردها، فرآیندی، ریاضیات متوسطه، آموزش ریاضی.

تاریخ: دریافت ۱۴۰۳/۳/۲۷ بازنگری ۱۴۰۳/۵/۲۸ پذیرش ۱۴۰۳/۶/۱۲ انتشار برخط ۱۴۰۳/۷/۵

نحوه ارجاع به این مقاله: ن. هاشمی، اصول و استانداردهای آموزش ریاضی دوره‌ی متوسطه با تأکید بر استانداردهای فرآیندی،

به سوی علوم ریاضی، ۴ (۱۴۰۳)، شماره ۱، ۶۵-۸۲.

© دانشگاه فردوسی مشهد.

## ۱. پیش‌گفتار

ریاضیات در زندگی روزمره مهم است و به انسان امکان می‌دهد دنیای اطراف خود را به‌خوبی درک کند و زندگی خود را مدیریت کند. استفاده از ریاضیات بشر را قادر می‌سازد تا موقعیت‌های زندگی واقعی را مدل‌سازی کند و ارتباطات و پیش‌بینی‌های آگاهانه ایجاد کند. افراد را با مهارت‌هایی که برای تفسیر و تجزیه و تحلیل اطلاعات، ساده‌سازی و حل مشکلات، ارزیابی ریسک و تصمیم‌گیری آگاهانه نیاز دارند، مجهز می‌کند [۳۰]. ریاضیات نقش مهمی در زمینه‌هایی مانند علم یا فناوری ایفا می‌کند و برای تحقیق و توسعه در زمینه‌هایی مانند مهندسی، علوم محاسباتی، پزشکی و مالی حیاتی است. یادگیری ریاضیات به کودکان و جوانان دسترسی به برنامه درسی گسترده‌تر و فرصتی برای پیگیری مطالعات و علایق بیشتر می‌دهد. از آنجایی که ریاضیات غنی و محرک است، یادگیرندگان را در هر سنی با توجه به علایق و توانایی‌های آن‌ها جذب می‌کند [۴۰]. یادگیری ریاضیات استدلال منطقی، تجزیه و تحلیل، مهارت‌های حل مسئله، خلاقیت و توانایی تفکر به روش انتزاعی را توسعه می‌دهد. زبان ریاضیات از یک زبان جهانی از اعداد و نمادها استفاده می‌کند که به یادگیرندگان امکان می‌دهد ایده‌ها را به روشی مختصر، بدون ابهام و دقیق باهم مرتبط کنند. ناردی و کنوت<sup>۱</sup> [۳۷] بر این باورند که برای رویارویی با چالش‌های قرن بیست و یکم، هر جوان باید در استفاده از مهارت‌های ریاضی اعتماد داشته باشد. درک نقشی که ریاضیات تقریباً در تمام جنبه‌های زندگی ایفا می‌کند بسیار مهم است. این نیاز به ریاضیات برای ایفای نقشی جدایی‌ناپذیر در یادگیری مادام‌العمر را تقویت می‌کند و درک و فهم مفاهیم ریاضیات از اهمیت خاصی برخوردار می‌شود. از نظر شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا یا NCTM<sup>۲</sup>، برای درک مناسب از ریاضی و عمل در ریاضی به‌کارگیری ریاضی در حل مسائل، صرف آموزش موضوعات ریاضی کافی نیستند، بلکه طراحی برنامه آموزشی و تعیین حدودمرزها در مفاهیم و روش‌های آموزشی بسیار مهم و اساسی می‌باشند. اصول آموزش ریاضی از مهم‌ترین موضوعات زیربنایی است که به نظر می‌رسد سیاست‌های آموزش ریاضی بر اساس آن طرح‌ریزی می‌شود [۴۳]. همان‌طور که مشخص است، اصول قوانینی است که بدون اثبات و تجزیه و تحلیل پذیرفته می‌شود [۱۴]. اصول آموزش ریاضی ویژگی‌های خاص آموزش ریاضی باکیفیت قابل قبول را توصیف می‌کند [۲۱]. در سال ۲۰۰۰، NCTM اصول آموزش را مساوات<sup>۳</sup> (عدالت آموزشی)، برنامه درسی<sup>۴</sup>، تدریس<sup>۵</sup>، یادگیری<sup>۶</sup>، ارزیابی<sup>۷</sup> و فناوری<sup>۸</sup> اعلام کرد و این شش مورد را برای

<sup>۱</sup>Nardi and Knuth<sup>۲</sup>National Council of Teachers of Mathematics<sup>۳</sup>Equity<sup>۴</sup>Curriculum<sup>۵</sup>Teaching<sup>۶</sup>Learning<sup>۷</sup>Assessment<sup>۸</sup>Technology

آموزش ریاضیات در هر نقطه‌ای از جهان پایه‌ای و اساسی برشمرد. در جدول ۱، معنا و تعریف این اصول از دید شورای معلمان ریاضی آمریکا و کانادا ارائه شده است. با توجه به موارد اشاره شده در جدول بالا (جدول ۱)،

جدول ۱: اصول آموزش ریاضی

| تعریف و توضیح                                                                                                                                                                                                                       | اصل آموزش ریاضی         |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| تعالی در آموزش ریاضی مستلزم مساوات و حمایت قوی از تمام دانش‌آموزان است. یک برنامه درسی چیزی بیش‌تر از مجموعه فعالیت‌هاست. این برنامه باید منسجم باشد و بر ریاضیات مهمی متمرکز شود که به‌خوبی در سراسر پایه‌ها تحصیلی قرارگرفته است. | مساوات<br>برنامه‌ی درسی |
| تدریس مؤثر ریاضی مستلزم این درک است که دانش‌آموزان چه می‌دانند و نیاز به یادگیری چه چیزی دارند و سپس به چالش انداختن و حمایت آن‌ها برای خوب یادگیری آن‌هاست.                                                                        | تدریس                   |
| دانش‌آموزان باید ریاضی را با درک و فهم یاد بگیرند و فعالانه دانش جدید را بر اساس تجربه و دانش قبلی بسازند.                                                                                                                          | یادگیری                 |
| ارزیابی باید حامی یادگیری ریاضیات مهمی باشد که دانش‌آموز یاد گرفته است و اطلاعات مفید را هم به معلمان و هم به دانش‌آموزان بدهد.                                                                                                     | ارزیابی                 |
| در تدریس و یادگیری ریاضی، تکنولوژی حیاتی است. تکنولوژی بر ریاضیاتی که تدریس می‌شود تأثیر می‌گذارد و یادگیری دانش‌آموزان را ارتقاء می‌دهد.                                                                                           | تکنولوژی                |

این باور وجود دارد که اگر فعالیت‌های آموزشی مطابق با این اصول توسعه یابند، می‌توانند یادگیری مفاهیم و محتوای ریاضی را برای معلمان و دانش‌آموزان جذاب و قابل‌درک کنند تا آن‌ها از این اصول در برنامه‌ریزی و تدریس درس خود بهره ببرند. معلمان و آموزگاران ریاضی همیشه در تلاش هستند تا تأثیری را که بر یادگیری ریاضی دانش‌آموزان خود دارند، افزایش دهند که اصول آموزش ریاضی می‌توانند به آن‌ها در رسیدن به این هدف کمک نماید [۳۰]. بر اساس دیدگاه شورای معلمان ریاضی آمریکا، اصول آموزش ریاضی زمینه را برای تدوین استانداردهای آموزش ریاضی اعم از محتوایی و فرآیندی آماده کرده است [۷]. در عمل ریاضی، عوامل و مهارت‌های خاصی در کارند که آن‌ها را استانداردهای آموزش ریاضی می‌نامند [۲۰]. استانداردها بر دو نوع محتوایی و فرآیندی می‌باشند. استانداردهای محتوایی که به محتوا می‌پردازد اینکه چه مباحثی را باید بخوانند، هر مبحث را تا چه حدی گسترش دهند، چه مفاهیمی و تا چه مقداری در کتاب‌ها گنجانده شود. این استاندارد شامل اعداد و عملیات، جبر، هندسه، اندازه‌گیری، تحلیل داده‌ها و احتمال هست. استانداردهای محتوایی ریاضیاتی را که باید در هر پایه تدریس شود را مشخص می‌کنند [۹، ۱۱]. در جدول ۲، استانداردهای محتوایی از منظر اهداف و برنامه آموزشی آن‌ها به‌صورت کامل آمده است. استانداردهای محتوایی و اهداف آن‌ها که در جدول ۲ ارائه گردید و در بستر استانداردهای فرآیندی مورد استفاده قرار می‌گیرد. قابل‌ذکر است هرچند کریمی

## جدول ۲: استانداردهای محتوایی آموزش ریاضی

| اهداف آموزشی                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | استاندارد محتوایی      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| درک اعداد و روش‌های نمایش اعداد، فهمیدن روابط بین اعداد و دستگاه‌های اعداد، درک مفاهیم اعمال ریاضی و ارتباط بین آن‌ها و شمردن به‌طور روان و تخمین زدن معقولانه.                                                                                                                                                                            | اعداد و عملیات         |
| درک کردن نمونه‌ها، روابط و توابع، دانستن طرز نمایش و تحلیل ساختارها و موقعیت‌های ریاضی، استفاده از نمادهای جبری، استفاده از مدل‌های ریاضی برای نمایش و درک روابط کمی، تجزیه و تحلیل تغییرات در زمینه‌های متفاوت.                                                                                                                           | جبر                    |
| تحلیل شاخص‌ها و خواص اشکال هندسی دوبعدی و سه‌بعدی و چندبعدی و توسعه بحث‌های ریاضی درباره روابط هندسی، شناختن مکان‌ها و توصیف روابط مکانی با استفاده از هندسه مختصاتی و دیگر دستگاه‌های نمایش، به کاربردن انتقال و استفاده از تقارن برای تحلیل موقعیت‌های ریاضی، استفاده از تجسم و تصور ذهنی، استدلال مکانی و مدل‌سازی هندسی برای حل مسائل. | هندسه                  |
| درک ویژگی‌های قابل اندازه‌گیری در اشیاء، شناخت واحدها و دستگاه‌ها و روندهای اندازه‌گیری، استفاده از روش‌ها، ابزارها و فرمول‌های مناسب برای تعیین اندازه‌ها.                                                                                                                                                                                | اندازه‌گیری            |
| تنظیم پرسش‌هایی که می‌تواند بر اساس داده‌ها عنوان شود، جمع‌آوری و فراهم کردن و نمایش داده‌های مناسب برای پاسخ‌دهی به پرسش‌ها، انتخاب و استفاده از روش‌های آماری مناسب برای تجزیه و تحلیل داده‌ها.                                                                                                                                          | تحلیل داده‌ها و احتمال |
| در تدریس و یادگیری ریاضی، تکنولوژی حیاتی است. تکنولوژی بر ریاضیاتی که تدریس می‌شود تأثیر می‌گذارد و یادگیری دانش‌آموزان را ارتقاء می‌دهد.                                                                                                                                                                                                  | تکنولوژی               |

فردین پور و گویا [۲۰، ۲۱] به‌صورت مختصر به این استانداردهای فرآیندی اشاراتی کرده‌اند ولی این مقاله برای اولین اصول و استانداردهای آموزش ریاضی را به‌صورت کامل و یکپارچه ارائه کرده است.

## ۲. استانداردهای فرآیندی

شورای معلمان ریاضی آمریکا و کانادا بر این باور است که برنامه درسی مناسب باید بر حل مسئله، ایجاد ارتباط بین مباحث ریاضی، برقراری ارتباط با مفاهیم ریاضی با استفاده از زبان مناسب و ایجاد عدالت در یادگیری برای همه دانش‌آموزان متمرکز باشد. سال‌هاست که راهبردهای پیشنهادی NCTM در پی تغییر و بهبود الگوهای تدریس معلمان است و به‌جای دانش رویه‌ای تأکید زیادی بر درک مفهومی دارد. این شورا، شش استاندارد فرآیندی در آموزش ریاضی را در کتاب اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای توصیه می‌کند و همچنین بر لزوم به‌کارگیری آن‌ها در آموزش ریاضی تأکید می‌کند. استانداردهای فرآیندی روش‌های کسب

دانش محتوایی را مورد بحث قرار می‌دهند [۸]. همان‌گونه که در اصول و استانداردها تأکید شده است [۲۱]، استانداردهای فرآیندی، ماهیتی متفاوت از مباحث و موضوعات مختلف ریاضی دارند، ولی هر یک از آنها در فرآیند یادگیری ریاضی در همه‌ی پایه‌های تحصیلی مدرسه حاکم هستند. این استانداردها مشخص می‌کنند که به چه شیوه‌ای ریاضیات مورد نظر باید تدریس شود و چگونه دانش‌آموزان با انجام دادن ریاضیات می‌توانند آن را فراگیرند [۱۰]. شورای معلمان ریاضی آمریکا و کانادا استانداردهای فرآیندی را استدلال و اثبات، پیوند و ارتباطات، بازنمایی، گفتمان، حل مسئله و مدل‌سازی و کاربرد آن می‌داند که استاندارد مدل‌سازی استاندارد جدیدی است که به‌تازگی به استانداردهای فرآیندی آموزش ریاضی از طرف NCTM در سال ۲۰۲۰ اضافه شده است. به دلیل اهمیت استانداردهای فرآیندی در آموزش ریاضی، در این مقاله به توضیح و تشریح کامل آنها پرداخته شده است.

۱.۲. استدلال و اثبات. امام‌جمعه و دافعی [۴] بیان داشته‌اند شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا (NCTM) معتقد است که برنامه‌های آموزشی از پیش‌دبستانی تا پایه‌ی دوازدهم باید همه‌ی دانش‌آموزان را قادر سازد تا استدلال و اثبات را به‌عنوان جنبه‌های اساسی ریاضی، تشخیص دهند؛ حدسیه‌های ریاضی بسازند و راجع به‌درستی آنها، تحقیق کنند. ادعاها و اثبات‌های ریاضی بسازند و آنها را ارزیابی کنند؛ انواع مختلف استدلال و روش‌های اثباتی را انتخاب و استفاده کنند. یکی از ساده‌ترین و پرکاربردترین تعاریف اثبات عبارت است از یک استدلال معقول و منطقی از حقایق قابل قبول. نکته‌ای که در این تعریف باید به آن توجه کرد تفاوت اثبات و استدلال است. استدلال دلیل آوردن و استفاده از دانسته‌های قبلی برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است [۷]. استفاده از استدلالی که موضوع مورد نظر را به‌درستی نتیجه دهد اثبات می‌گویند. برگر، مکزی و هولمز<sup>۹</sup> [۲۸] بر این باورند با توجه به نظر آموزشگران ریاضی، نقش اثبات در ریاضی را می‌توان تأیید درستی یک عبارت؛ توضیح چرایی درستی یک عبارت؛ ایجاد ارتباطات با دانش ریاضی؛ کشف یا خلق جدیدی در ریاضی و نظام‌دار کردن عبارت‌ها در یک نظام اصل موضوعی دانست. به نظر می‌رسد که هیچ‌کس در جامعه‌ی ریاضی، با این ادعا مخالفتی ندارد که ریاضی یک علم استنتاجی است و مشخصه‌ی آن اثبات است. بر مبنای دیدگاه مشترک ریاضیدان‌ها، ریاضی با ایده‌ها و اصول موضوع اولیه شروع می‌شود و سپس به‌وسیله‌ی آنها، تمام ایده‌های بعدی تعریف می‌شوند. تمام قضیه‌هایی هم که اصل موضوع نیستند، از اصول موضوع و به‌وسیله‌ی قوانین مشخص استنباطی، اثبات می‌شوند [۱۷]. محققان اهمیت استدلال و اثبات را در ریاضیات مورد بحث قرار داده‌اند و در تحقیقات خود نشان می‌دهند که درک و فهم ریاضی بدون تأکید بر استدلال و اثبات، غیرممکن است. برخی از آنها معتقدند که بدون استدلال، فهم ریاضی تنها جنبه ابزاری و رویه‌ای پیدا می‌کند. همچنین، آنها در تحقیقات خود نشان می‌دهند دانشی که فاقد توجیه کردن است، به‌راحتی می‌تواند غیرمنطقی و غیرمستدل باشد. هنگامی که ریاضیات به‌عنوان علمی مستدل به‌جای مجموعه‌ای از رویه‌ها یاد گرفته می‌شود، دانش به‌دست‌آمده به‌راحتی می‌تواند بازسازی شود؛ حتی

<sup>9</sup>Berger, Mackenzie and Holmes

وقتی که حافظه، رویه‌ها را فراموش می‌کند. استدلال ریاضی به یادگیرندگان اجازه می‌دهد که بین دانش جدید و دانش قبلی اتصال برقرار کنند. درواقع، استدلال ریاضی به دانش‌آموزان کمک می‌کند فعالیت‌های ریاضی را به‌عنوان یک مجموعه‌ی منسجم و پیوسته ببینند و مفاهیمشان را به موقعیت‌های دیگر ارتباط دهند [۳۸]. ریاضیدانان معتقدند که استدلال از طریق مشاهده نمی‌تواند ثابت کند، زیرا چشم‌ها می‌توانند ما را منحرف کنند. اندازه‌گیری نمی‌تواند ثابت کند، زیرا اطمینان و اعتبار حاصل از نتیجه‌گیری، به دقت ابزار بستگی دارد. آزمایش نیز به‌طور قطع ثابت نمی‌کند، زیرا نتایج حاصل از آزمایش می‌تواند احتمالی باشد و پایدار نیست [۳۳]. البته در برخی موارد، بین ریاضیدانان نیز نظرات و دیدگاه‌های مختلفی در مورد نقش و اهداف اثبات و آنچه یک اثبات را می‌سازد، مشاهده می‌شود. همان‌گونه که اهمیت اثبات و استدلال‌های منطقی برای ریاضیدانان مشخص شده است، دانش‌آموزان و معلمان نیز باید اهمیت و معنای استدلال و اثبات ریاضی را در آموزش درک کنند [۱۳]. باید توجه داشت که اساس ریاضیات، استدلال است. درحالی‌که علم توسط مشاهده تأیید می‌شود، ریاضیات توسط استدلال منطقی مورد تأیید قرار می‌گیرد. بنابراین جوهره‌ی ریاضیات در اثبات‌ها نهفته است و باید به تفاوت بین مثال، حدسیه و اثبات، توجه کرد. نتایج ریاضی، تنها زمانی معتبر هستند که دقیقاً اثبات شوند [۱۶]. می‌توان درستی نتایج را در تعداد محدودی از حالت‌ها به‌طور مستقیم نشان داد ولی دانش‌آموزان باید بدانند که تمام آنچه به آن‌ها نشان داده شده است، تنها مربوط به همان حالت‌های خاص است و تا زمانی که آن نتیجه کاملاً به اثبات نرسیده است، تنها شاهدی است برای یک حدس. لایتنر<sup>۱۰</sup> چهارگام را در فرایند استدلال معرفی می‌کند که تقریباً مشابه مراحل حل مسئله به روش پولیا<sup>۱۱</sup> است؛ نخست موقعیتی سؤال‌برانگیز و دشوار پیدا می‌شود که مشخص نیست چگونه باید اقدام کرد. دوم، شخص تلاش می‌کند که راهبردی برای حل مسئله انتخاب کند (به یاد آورد، بسازد و یا کشف کند). سپس بررسی می‌کند که آیا راهبرد موردنظر، مسئله را حل می‌کند یا نه و اگر نه، به دنبال راهبرد دیگری خواهد بود. سوم، این مرحله که اجرای راهبرد نامیده می‌شود، می‌تواند از طریق استدلال‌های تأییدکننده حمایت شود؛ بدین‌صورت که شخص در پی آن است که آیا راهبرد موردنظر به کار می‌آید؟ وگرنه دوباره راهبرد دیگری انتخاب و اجرا می‌شود. چهارم، مرحله آخر یعنی نتیجه‌گیری، بعد از طی مراحل بالا یک نتیجه‌ی کلی به دست می‌آید [۵]. باکویی و همکاران [۵] مشخص کردند که لایتنر نیز بین دو نوع استدلال تمایز قائل می‌شود که عبارتند از استدلال تقلیدی؛ که از روی عادت و تکرار یاد گرفته می‌شود و دو نوع دارد از قبیل استدلال به یادسپاری؛ (مربوط به حافظه)، برای مثال، دانش‌آموزی که یک مسئله را با استفاده از یک جواب کامل و معین در کتاب درسی یا حل شده توسط معلم حل می‌کند و استدلال الگوریتمی؛ که در آن یک مسئله از طریق به کار بردن رویه‌ای معین حل می‌شود. دوم، استدلال خلاقانه؛ شامل دنباله‌ای از استدلال‌های جدید است که بر اساس اصول ریاضی هستند. تفاوت مهم بین استدلال تقلیدی و خلاقانه این است که نوع اول ضرورتاً شامل تفکر مفهومی و تحلیلی نیست، درحالی‌که

<sup>10</sup>Lithner<sup>11</sup>Polya

به گفته لایتنر، چنین فرایند تفکری برای استدلال خلاقانه ضروری است. پنج نوع فعالیت استدلالی را که عموماً در قلمرو پیش از اثبات به آن‌ها توجه می‌شود و دارای سلسله‌مراتب هستند، چنین مطرح می‌شوند؛ اول، شناخت و ساخت الگوها. اولین مهارت، شناخت و ساخت الگوها یا قوانین برای کشف مسائل معین است. دوم، توصیف الگوها؛ پس از تسلط بر مرحله اول، دانش‌آموزان شروع به توصیف الگوها از طریق قانون‌گذاری به صورت رسمی (استفاده از نمادهای جبری) یا غیررسمی (مثلاً توصیف روایتی) می‌کنند. سوم، حدسیه‌سازی که پس از تسلط بر مرحله‌ی دوم دانش‌آموزان حدسیه‌سازی می‌کنند. یعنی قادر هستند که الگو یا قانونی را بیان کنند که به‌طور کلی درست است؛ گرچه آن‌ها هنوز ضرورت اثبات کردن را نمی‌دانند. چهارم، استدلال استقرایی که ممکن است دانش‌آموزان با بررسی چند مثال و مورد خاص، درستی حدسشان را تأیید کنند و پنجم، بگویند که گزاره موردنظر همیشه درست است. استدلال استنتاجی، اثبات صوری، درک شهودی، استدلال تمثیلی، استدلال استقرایی، استدلال استنتاجی، بازگشتی و برهان خلف از موارد اثبات و استدلال در حل مسائل اثباتی و حتی حل‌کردنی است [۱۳].

۲.۲. **اتصالات و ارتباطات (ارتباطات مفهومی).** آزوبل<sup>۱۲</sup> [۲۷] بر این عقیده است که برای این‌که یادگیری معنادار اتفاق بیفتد سه شرط لازم است. ابتدا، یادگیرنده باید رابطه‌ای بین مفاهیمی که باید آموخته شود، احساس کند. دوم، یادگیرنده باید دارای دانش خاص مرتبط با مطالب جدید باشد تا بتواند ارتباط برقرار کند. سوم، یادگیرنده به‌صورت عملی بخواهد دانش جدید را به دانشی که قبلاً داشته مرتبط کند. درک ارتباطات و اتصالات در ریاضیات توسط دانش‌آموزان به‌منظور توانمند کردن برای توصیف موقعیت‌های پیچیده و کنترل دقیق وضعیت‌ها ضروری است. درواقع فهمیدن به‌عنوان اندازه کمی و کیفی اتصالاتی تعریف می‌شود که یک ایده با ایده‌های موجود فرد دارد [۲]. یکی از اهداف بسیار مهم که باید در فرآیند یادگیری ریاضی به آن دست‌یافت، توانایی برقراری ارتباط و اتصال بین خود موضوعات ریاضی و همچنین بین مفاهیم ریاضی با دیگر رشته‌ها توسط یادگیرندگان هست [۲۹]. شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا [۳۸] اعلام کرده است برنامه‌های آموزشی از پیش‌دبستانی تا کلاس دوازدهم باید به هر دانش‌آموز این امکان را بدهد که ارتباط بین ایده‌های ریاضی را بشناسد و از آن‌ها استفاده کند؛ درک کند که چگونه ایده‌های ریاضی به یکدیگر متصل می‌شوند تا یک کل منسجم ایجاد کنند و نهایتاً ریاضیات را در زمینه‌های خارج از آن بشناسد و به کار ببرد. ارتباطات مفهومی یعنی رابطه بین مفاهیم، روش‌ها، بازنمایی‌های چندگانه، موضوعات ریاضی و همچنین ارتباط ریاضی با سایر موضوعات. مفاهیم و ایده‌های ریاضی در ارتباط با یکدیگرند و شناخت این ارتباطات، درک و یادگیری ریاضیات را عمیق‌تر می‌سازد [۲۱]. تسهیل کردن برقراری ارتباط و اتصال در میان مباحث ریاضیات و میان مباحث ریاضی و دیگر حوزه‌های یادگیری برای ایجاد درک گسترده‌ای که می‌خواهیم کودکان به آن دست یابند، بسیار مهم است. با روشن شدن ارتباطات، بین ایده‌های مختلف ریاضی، کودکان در یادگیری ریاضی توانمندتر می‌شوند. برقراری ارتباط به‌طور اتفاقی و تصادفی رخ نمی‌دهد و بسیاری از دانش‌آموزان معمولاً به‌تنهایی

<sup>12</sup>Ausubel

نمی‌توانند ارتباطات مفهومی این روابط را تشخیص دهند، بلکه باید به‌وضوح آن‌ها را مشخص کرد. بنابراین معلمان باید برای روشن کردن این ارتباطات برنامه‌ریزی کنند. درواقع، مؤثرترین آموزش در صورتی اتفاق می‌افتد که دانش‌آموزان از دانش از قبل دانسته شده شروع کنند و از طریق تعامل با معلمان و دانش‌آموزان دیگر، این دانسته‌ها را مبنای کارشان قرار دهند. درنتیجه، برنامه‌ریزی برای رشد این ارتباطات، به‌طور مستقیم هم‌کارایی تدریس را افزایش می‌دهد و هم به بهبود یادگیری کودکان کمک می‌کند [۳۸]. یو<sup>۱۳</sup> [۴۴] برخی از شاخص‌های توانایی برقراری ارتباط و اتصال ریاضی را بیان می‌کند. این شاخص‌ها عبارتند از پیدا کردن رابطه بین بازنمایی‌های مختلف از مفاهیم و رویه‌ها، درک رابطه بین موضوعات ریاضی؛ استفاده از ریاضیات در سایر علوم و زندگی روزمره؛ درک مفهوم معادل یا روش مشابه؛ یافتن ارتباط بین یک رویه و رویه‌ی دیگر در نمایش معادل؛ به‌کاربردن اتصالات در میان موضوعات ریاضی و بین ریاضی و سایر موضوعات. برای مثال ایجاد ارتباط و اتصال بین مفاهیم ریاضی و علمی مانند فیزیک و جغرافیا و همچنین ارتباط و اتصال خود مفاهیم ریاضی به‌عنوان نمونه مفهوم حد با مفهوم انتگرال از مظاهر کاربرد این استاندارد در فرآیند آموزش ریاضی است.

۳.۲. بازنمایی (نمایش‌های ریاضی). بازنمایی درک بهتر یک مفهوم است که با استفاده از تمثیل یا چیز دیگر برای آن استفاده می‌شود. همچنین بازنمایی‌ها دانش‌آموزان را وادار می‌کنند که برای آموزش، یادگیری و تعمیم‌دادن یک مفهوم، از چند جهت به آن توجه کنند و ابعاد گسترده، کلی و اجزای مفهوم را شناسایی و رابطه بین عناصر را تعیین کنند [۱۸]. مهارت بازنمایی مربوط به نمایش داده‌ها و اطلاعات و آنچه در ذهن دانش‌آموز می‌گذرد، هست. این مهارت کمک بسیاری برای درک بهتر مطالب و برقراری ارتباط با دیگران می‌کند، یعنی نشان دادن یک مفهوم ریاضی با روش‌های مختلف. این مهارت مربوط به نمایش داده‌ها و آنچه در ذهن دانش‌آموز می‌گذرد، هست. برخی از روش‌های بازنمایی مفاهیم ریاضی عبارتند از بازنمایی دنیای واقعی، تصویری، کلامی، نمادین، ذهنی و فیزیکی [۱۸]. سراجی و سیفی بر این باورند که برنامه‌های آموزشی از پیش‌دبستانی تا کلاس دوازدهم باید به هر دانش‌آموز این امکان را بدهد تا مواردی مانند ایجاد و استفاده از نمایش برای سازمان‌دهی، ثبت، و ارتباط ایده‌های ریاضی؛ انتخاب، اعمال، و ترجمه از میان نمایش‌های ریاضی برای حل مسائل و همچنین از بازنمایی‌ها برای مدل‌سازی و تفسیر پدیده‌های فیزیکی، اجتماعی و ریاضی استفاده کند [۱۲]. بازنمایی‌ها دانش‌آموزان را وادار می‌کنند که برای آموزش، یادگیری و تعمیم دادن به مفهوم، از چند جهت به آن مراجعه کنند و ابعاد گسترده، کلی و اجزای مفهوم را شناسایی و رابطه‌ی بین عناصر را تعیین کنند. نمودارها، نقشه‌ها، جدول‌ها، نمادها و علائم و غیره همگی برای نمایش مفاهیم ریاضی هستند. از نمایش‌های ریاضی به‌عنوان ابزاری برای فهم و درک و تجزیه و تحلیل ایده‌های ریاضی و حل مسائل مختلف و توضیح موقعیت‌های مسئله‌گونه استفاده می‌شود. بنابراین دانش‌آموز هر شکل از صورت‌های نمایشی را باید تشخیص دهد و در جای مناسب به کار گیرد. وقتی چند بازنمایی به‌طور مرتبط به دانش‌آموزان ارائه

<sup>13</sup>Yue

می‌شود، نسبت به بازنمایی‌های منفرد، بیشتر باعث درک انتزاعی یادگیرندگان می‌شوند. ناتوانی در استفاده از بازنمایی‌های متفاوت و اتصال و ارتباط آن‌ها به یکدیگر، باعث به وجود آمدن مشکلاتی در فهم اشیای ریاضی می‌شود. مثال‌هایی وجود دارند که در آن‌ها به کمک یک بازنمایی گرافیکی، مسئله به سادگی می‌توانست حل شود، ولی دانش‌آموزان از بازنمایی عددی یا نمادین استفاده کرده بودند که با تجربه‌های قبلی آن‌ها سازگارتر و به میزان بیشتری، مورد تأکیدشان قرار گرفته بود [۲۲]. بازنمایی‌هایی که در یادگیری و حل مسائل ریاضی از آن‌ها استفاده می‌شوند عبارتند از بازنمایی ملموس (وضعیت‌های دنیای واقعی)، بازنمایی فیزیکی (ابزار دست‌ورزی که به تنهایی معنای خاصی ندارند و بر اساس اعمالی که انجام می‌دهند معنا پیدا می‌کنند)، بازنمایی تصویری (شکل‌ها و تصویرها)، بازنمایی گفتاری (زبان روزمره) و بازنمایی نوشتاری که از طریق آن کلمات و جملات معنای خاصی می‌گیرند [۲۶]. برای مثال در بازنمایی تصویری، دانش‌آموزان از مشاهده یا رسم یک شکل، نمودار یا تصویر، به‌طور شهودی برای فکر کردن درباره یک مفهوم ریاضی و ارتباط برقرار کردن با آن استفاده می‌کنند. قربانی [۱۸] سخت معتقد است بازنمایی و گفتمان در یادگیری ریاضی دو فرآیند به هم گره‌خورده می‌باشند. توجه ویژه و طرح‌ریزی‌هایی که معلمان برای گفتمان ریاضی انجام می‌دهند تا به دانش‌آموزان کمک کنند که بر یادگیری خویش بازنمایی داشته باشند می‌تواند تبدیل به یک بخش طبیعی از یادگیری ریاضی شود. حتی دانش‌آموزان دوره‌ی ابتدایی نیز می‌توانند توضیح دادن جواب یک مسئله و شرح دادن استراتژی‌هایی که بکار می‌برند را یاد بگیرند. می‌توان به دانش‌آموزان دوره‌ی اول متوسطه کمک کرد تا یاد بگیرند با صدای بلند فکر کنند و در تلاش برای پاسخ‌گویی به سؤال‌های معلم و هم‌کلاسی‌های خود استدلال‌های خود را بازنگری کنند. با چنین تجربیاتی دانش‌آموزان مهارت سازمان دادن و ثبت افکار ریاضی خود را به دست خواهند آورد [۳۱].

#### ۴.۲. گفتمان.

با توجه به اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای، استاندارد گفتمان را این‌گونه توصیف می‌کنند که گفتمان یک بخش ضروری از ریاضی و بخش مهمی از جریان یاددهی و یادگیری آن است [۲۵]. گفتمان وسیله‌ای است برای در میان گذاشتن اندیشه‌ها و شفاف‌شدن آنچه که یک فرد می‌داند. وقتی ایده‌ای یا پنداشتی بیان می‌شود تبدیل به موضوعی برای بحث کردن شده و در مورد آن تأمل و موشکافی می‌شود تا درنهایت آن پنداشت اصلاح شود. چنین فرآیندی به ساخته‌شدن مفاهیم ریاضی، شکل‌گیری معانی و تداوم اندیشه‌ها کمک می‌کند و به آن‌ها عمومیت می‌بخشد. دانش‌آموزان زمانی که در چالشی برای انتقال یافته‌های فکری خودشان و دیگران قرار دارند درباره‌ی ریاضی و استدلال ریاضی فکر می‌کنند و این کمکی برای منطقی‌تر شدن آن‌ها خواهد بود. گوش دادن یا خواندن توضیحات دیگران فرصتی برای دانش‌آموز است تا دانسته‌های خودشان را بسط دهند و درست استدلال کردن و چگونه متقاعد کردن دیگران را بیاموزند. گفت‌وگو درباره‌ی چگونگی پیدا شدن اندیشه‌ها و ایده‌های ریاضی موجب جلب توجه دانش‌آموزان به مبحث موردنظر خواهد شد [۳]. دافعی، نصر و مقدمی [۱۰] بیان داشته‌اند استاندارد گفتمان از چهار زیر استاندارد تشکیل شده است، اول، دانش‌آموزان افکار ریاضی خود را در ضمن گفتمان سازمان‌دهی کنند و آن‌ها را تثبیت کنند. دوم، دانش‌آموزان قادر باشند افکار

و استراتژی‌های دیگران را تجزیه و تحلیل و ارزشیابی کنند. سوم، دانش‌آموزان افکار ریاضی خود را مرتبط و یکپارچه و به‌طور شفاف و واضح به هم‌کلاسی‌ها و معلم‌ها و دیگران انتقال دهند. چهارم، دانش‌آموزان قادر باشند زبان ریاضی را به‌طور روشن و آشکار برای بیان ایده‌های ریاضی بکار ببرند. شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا [۳۸] معتقدند دانش‌آموزانی که درگیر بحث کردن برای توجیه یک راه‌حل هستند بخصوص وقتی با نظر مخالفی مواجه باشد و در تلاش برای متقاعد کردن هم‌کلاسی‌هایشان که احتمالاً نقطه نظرات متفاوتی دارند به درک و فهم بهتری از ریاضی نائل خواهند شد. سیلور، کیل پاتریک و شلسینگر<sup>۱۴</sup> [۴۱] تأکید می‌کنند وقتی دانش‌آموزی روش حل مسئله را ارائه می‌دهد و از استدلال خود در مقابل هم‌کلاسی‌ها و معلم خود دفاع می‌کند و یا هنگامی که با چیزی که در ذهن او یک معما شده است کلنجار می‌رود بصیرت عمیقی درباره‌ی افکارش به دست می‌آورد. گفتمان در ریاضی می‌تواند به دانش‌آموزان در یادگیری مفاهیم جدید ریاضی کمک کند. چون در این حالت آن‌ها در یک موقعیت واقعی حرکت می‌کنند، به‌طور شفاهی توضیح، تشریح و بیان علت می‌کنند، نمودارها و شکل‌ها را به خدمت می‌گیرند، می‌نویسند، و نمادهای ریاضی را به کار می‌گیرند تا به هدفی که دارند برسند. یعنی آن‌ها برای دفاع از ایده‌های خود و متقاعد کردن دیگران همه ابزارهای ریاضی را می‌شناسند و بکار می‌گیرند و در این میان بدفهمی‌های آن‌ها قابل شناسایی می‌شود. بازدهی دیگر این رویدادها این است که دانش‌آموزان به یاد می‌آورند که در مسئولیت یادگیری که در کلاس درس اتفاق می‌افتد با معلم خود شریک هستند. لامپرت<sup>۱۵</sup> [۳۴] معتقد است زمانی که تصورات و اندیشه‌هایی درباره‌ی ریاضی در جمعی مطرح می‌شود هم برای دانش‌آموزان مفید است، زیرا بخشی از بحث را به عهده‌دارند و هم برای معلم مفید است، همچنین می‌تواند با فرآیند یادگیری دانش‌آموزان بیشتر آشنا شود. معلمان باید محیطی در کلاس درس ایجاد کنند که دانش‌آموزان بتوانند آزادانه تصورات و اندیشه‌های خود را بیان کنند. دانش‌آموزان دوره‌ی ابتدایی نیز برای اینکه تصورات، پنداشت‌ها و اندیشه‌های خود را با یکدیگر در میان بگذارند به کمک معلم نیاز دارند تا این کار به روشی انجام شود که به اندازه‌ی کافی برای سایر دانش‌آموزان واضح و شفاف باشد. دانش‌آموزان سال‌های آخر دوره‌ی ابتدایی و اوایل دوره‌ی متوسطه باید به‌تدریج مسئولیت شرکت در بحث‌های کلاسی را بپذیرند و در مقابل یکدیگر مسئولیت‌پذیر باشند و توانایی آن‌ها در گوش کردن، به زبان ساده‌تر بیان کردن، سؤال پرسیدن و نظر دیگران را تفسیر کردن افزایش یابد. برای بعضی از دانش‌آموزان شرکت کردن در بحث‌های کلاسی چالش برانگیز و تا حدودی مشکل‌آفرین است. مثلاً برای دانش‌آموزان دوره‌ی اول متوسطه به چشم آمدن در فعالیت‌های گروهی اکراه‌آمیز است. دانش‌آموزان در این سن دوست ندارند معلم بداند که آن‌ها چه چیزی را بلد نیستند. بنابراین سعی می‌کنند از پرسیدن و سؤال کردن یا قرار گرفتن در موقعیتی که آن‌ها فکر می‌کنند می‌توانند به بلد نبودن آن‌ها تعبیر شود اجتناب کنند [۲۰، ۲۱]. با این حال معلم می‌تواند در ایجاد یک محیط خوب کلاسی برای بحث کردن موفق شود. زمانی که دانش‌آموزان از دبیرستان فارغ‌التحصیل می‌شوند، باید از

<sup>14</sup>Silver, Kilpatrick and Schlesinger

<sup>15</sup>Lampert

قابلیت‌های درونی صحبت کردن و بحث کردن برخوردار باشند و آن‌ها باید بحث‌های کامل و شفاف را ارائه کنند تا بتوانند در جامعه از خود دفاع کنند. شورای معلمان ریاضی آمریکا و کانادا [۳۸] بر این باور است زمانی که پنداشت‌ها ردوبدل می‌شوند و مورد انتقادهای متفکران قرار می‌گیرند، پالایش‌شده و توسعه می‌یابند. در حال حاضر، تغییرات در محل کار به‌طور فزاینده‌ای نیازمند کار گروهی، همکاری و گفت‌وگو است. ریاضی در دانشگاه‌ها به‌طور روزافزونی بر توانایی انتقال شفاف پنداشت‌های زبانی و نوشتاری تأکید دارد. در جهت آماده شدن برای آینده، دانش‌آموزان دبیرستانی، باید توانایی دادوستد و تدریس مؤثر پنداشت‌های ریاضی خود را با دیگران داشته باشند. تعامل با دیگران درواقع فرصتی برای دادوستد پنداشت‌ها و بازتاب بر آن‌هاست. بنابراین گفت‌وگو یک عنصر اساسی و پایه‌ای در یادگیری ریاضی است.

## ۵.۲. حل مسئله.

در سند منتشرشده NCTM در سال ۲۰۰۶ [۳۸]، درباره‌ی استاندارد حل مسئله این‌گونه بیان شده است که برنامه‌های آموزشی از پیش‌دبستانی تا پایه‌ی دوازدهم باید همه‌ی دانش‌آموزان را قادر سازد تا دانش ریاضی جدید خود را از طریق حل مسئله بسازند؛ مسائلی را که در ریاضیات یا موقعیت‌های دیگر به وجود می‌آیند را حل کنند؛ برای حل مسائل، یک گستره از راهبردهای متفاوت و متناسب را به‌کارگیرند؛ بر فرآیند حل مسئله‌ی ریاضی، تأمل و بازبینی داشته باشند؛ در سند راهنمای برنامه‌ی درسی ریاضی ایران نیز حل مسئله به‌عنوان یکی از مهارت‌های اساسی تفکر ریاضی موردتوجه قرارگرفته است [۱۵]. بااین‌وجود، هنوز در بسیاری از مدارس امروز در جریان تدریس و اجرای برنامه‌های درسی تأکید بر کسب دانش و معلومات از طریق یادگیری طوطی‌وار و حفظی است و معمولاً برای آموزش مهارت‌های تفکر از طریق فرآیند حل مسئله کوشش چندانی صورت نمی‌گیرد. حال آن‌که پولیا تسلط بر ریاضیات را توانایی و مهارت در حل مسئله و به معنای داشتن استقلال اندیشه، عقل سلیم و نیروی نوآفرینی دانسته است. مسئله از دیدگاه پولیا عبارت است از ضرورت جست‌وجوی آگاهانه‌ی وسیله‌ای مناسب، برای رسیدن به هدفی، که در بدو امر این وسیله غیرقابل‌دسترس هست. حل مسئله، به معنای پیدا کردن این وسیله است [۲۴]. شونفیلد [۴۲] ۱۶ مسئله را فعالیتی تعریف می‌کند که در آن دانش‌آموز، علاقمندانه درگیر است و تلاش دارد که راه‌حلی برای آن پیدا کند و وسیله‌ی ریاضی در دسترس و از قبل آماده‌ای که با آن به هدف برسد را ندارد. او دانش و رفتار لازم برای انجام حل مسئله را در چهار مرحله‌ی منابع، رهیافت‌ها، کنترل و نظام باورها بیان می‌دارد. شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا در سند اصول و استانداردها برای ریاضیات مدرسه‌ای در دوره‌ی متوسطه به‌طور مشابهی، حل مسئله را درگیر شدن در وظیفه، تکلیف و فعالیتی می‌داند که روش حل آن از پیش شناخته‌شده نیست، به این خاطر برای یافتن راه‌حل، دانش‌آموزان باید آن را از درون دانش خودشان بیرون بکشند و از مسیر این فرآیند آن‌ها اغلب درک و فهم‌های جدید ریاضی را رشد و توسعه خواهند داد. دانش‌آموزان باید فرصت‌های فراوان و متواتر برای صورت‌بندی کردن، گلاویزشدن و حل کردن مسائل پیچیده‌ای که نیازمند و مستلزم تلاش و کوشش است، داشته

<sup>16</sup>Schoenfeld

باشند و پس‌از آن ترغیب شوند که روی تفکرشان بازتاب و عکس‌العمل داشته باشند. با این تعاریف مسئله ریاضی مطرح‌شده برای یک دانش‌آموز، ممکن است برای دانش‌آموز دیگری مسئله نباشد. حل مسئله به روش پولیا شامل چهار مرحله است؛ فهمیدن مسئله، طرح یک نقشه، اجرای نقشه و بازگشت یا نگاه به عقب. در اولین مرحله یعنی «فهمیدن مسئله»، همان‌طور که پولیا می‌گوید باید به‌صورتی آشکار مشخص شود که چه چیزی خواسته شده است. طبق این الگو شاگرد باید در این مرحله بتواند بخش‌های اصلی مسئله، یعنی «مجهول»، «داده‌ها» و «شرط» مسئله را تعیین کند. شاید دقیقاً نتوان مشخص کرد که از چه زمانی وارد مرحله‌ی دوم یعنی «طرح نقشه» می‌شود [۱۷]. همواره ارتباط‌هایی بین فهم یک مسئله و طرح یک نقشه برای حل آن وجود دارد. به هر میزان که درک بهتری از مسئله حاصل شود، احتمال طرح نقشه‌ای برای حل آن بیشتر خواهد شد. شونفیلد [۴۲] برای تحلیل فعالیت حل مسئله در ریاضی، مدلی شامل چهار عامل را ارائه می‌دهد. این عوامل شامل منابع، رهیافت‌ها، کنترل و نظام باورها است. منابع، گنجینه‌ی دانش ریاضی فرد است که با آن مسئله و چگونگی اجرا و پیاده‌سازی راه‌حل را می‌فهمد. به عبارت دیگر دانش ریاضی که شخص در ارتباط با مسئله‌ی داده‌شده، دارا هست. البته همان‌گونه که شونفیلد اشاره می‌کند این منابع ممکن است معیوب و یا نادرست نیز باشند. رهیافت‌ها، پیشنهادهایی عمومی‌اند که به شخص کمک می‌کند تا مسئله را فهمیده و در حل آن پیشرفت کند. این سازوکارها شامل رسم شکل، انتخاب نمادهای مناسب، جستجوی مسائل مرتبط و... هست. کنترل به معنی انتخاب، نظارت، بازبینی و دنبال کردن راه‌حل‌های مناسب و یا اصلاح و ترمیم آن‌هاست. به تعبیری دیگر تصمیمات عمومی راجع به گزینش و به‌کارگیری منابع و رهیافت‌هاست. نظام باورهای فرد نیز شامل دیدگاه او نسبت به موضوع، محیط و خودش است [۴۲]. همچنین میسون، بورتون و استیسی [۳۶] ۱۷ چارچوب حل مسئله را با فرآیند تعمیم و تخصیص با مراحل ورود، حمله و مرور بیان می‌دارند و به معرفی فعالیت‌ها و اقدامات مؤثر در حل مسئله می‌پردازند. در مورد نقش و هدف حل مسئله در برنامه‌ی درسی سه دسته‌بندی مشخص شده است؛ تدریس برای حل مسئله که تدریس محتوای ریاضی برای کاربرد بعدی در حل مسائل ریاضی هست. در این نوع روش تدریس، معمولاً معلم محتوا و مفاهیم و الگوریتم‌های اولیه‌ی ریاضی را قبل از آنکه یادگیرندگان نیاز به آن‌ها را در حین حل مسئله احساس کنند، به آن‌ها ارائه می‌دهد سپس آن‌ها با دانستن آن مفاهیم و فرمول‌ها و روش‌ها به حل مسئله می‌پردازند. تدریس درباره‌ی حل مسئله، که تدریس استراتژی‌های رهیافتی برای رشد توانایی عمومی در حل مسائل است. در این نوع روش تدریس معلم رهیافت‌هایی نظیر آنچه پولیا برای حل مسئله پیشنهاد می‌کند، به دانش‌آموزان آموزش می‌دهد. تدریس از راه‌حل مسئله، که تدریس محتوای استاندارد ریاضی به‌وسیله‌ی ارائه مسائل غیر روتین دربردارنده‌ی این محتوا است و در این نوع روش تدریس معلم معمولاً مسئله‌ای از دنیای واقعی، که شامل مفهوم ریاضی در نظر گرفته شده برای تدریس است را مطرح می‌کند و دانش‌آموزان ضمن حل این مسئله، دانش ریاضی موردنظر را نیز فرامی‌گیرند [۲۴].

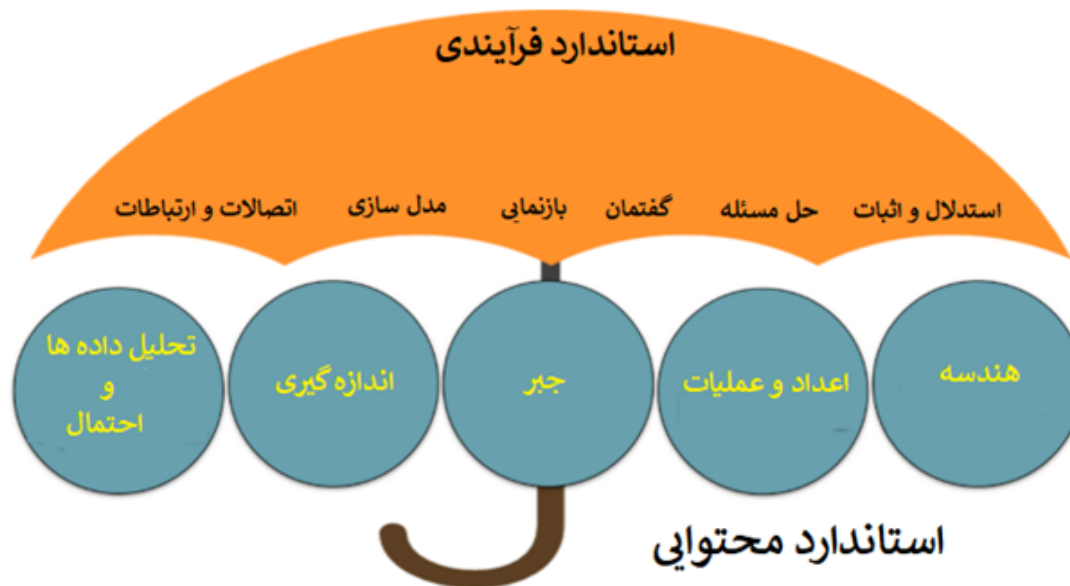
۶.۲. مدل‌سازی. مدل‌سازی ریاضی نمایش ساده و کلی جهان عینی به زبان ریاضی است. از میان مدل‌های گوناگونی که از یک پدیده می‌توان ساخت، بالاترین درجه ساده‌سازی متعلق به مدل‌های ریاضی است [۲۳]. مدل‌سازی ریاضی یک پدیده‌ی واقعی، این قابلیت را دارد تا توصیف، پیش‌بینی، ارزیابی و تصمیم‌گیری درباره‌ی آن پدیده را آسان‌تر نماید [۱۹]. بدیهی است که اگر فعالیت و محیط تصمیم‌گیری پیچیده نباشد، استفاده از مدل‌سازی ریاضی اهمیت چندانی ندارد. اما، اهمیت مدل‌سازی ریاضی زمانی مشخص می‌شود که تعداد متغیرهای تصمیم‌ساز، فعالیت و اهداف به‌طور سرسام‌آوری افزایش یابند [۱]. بنابراین، مدل‌سازی در ریاضیات، چگونگی انجام آن و بهره‌بردن از مواهب آن در زندگی روزمره و هنگام آموزش، برای یادگیرندگان، دانش‌آموزان و حتی معلمان ریاضیات در دوران مدرسه و دیگر مقاطع ارزشمند خواهد بود. انجمن ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا [۳۹] در سال ۲۰۲۰ بیان داشت یادگیری بکار بردن مفاهیم ریاضی فعالیتی است که با یادگیری مفاهیم ریاضی متفاوت است. درواقع مهارت‌هایی که باید برای موفق بودن در کاربرد علم ریاضی آموخت با مهارت‌های موردنیاز برای اثبات قضایا و حل معادلات ریاضی کاملاً متفاوت است. در مدل‌سازی ریاضی مسائل مختلفی که در دنیای واقعی وجود موردتوجه قرار می‌گیرد و هدف اصلی این است که هر مسئله از زندگی روزمره به‌صورت یک مسئله ریاضی تبدیل شود. این کار درواقع ماهیت اصلی مدل‌سازی ریاضی است [۶]. فرآیند مدل‌سازی ریاضی در یک نگاه کلی این مراحل را طی می‌کند؛ انتقال مسئله از دنیای واقعی به دنیای ریاضی، پیدا کردن جواب مسئله در دنیای ریاضی، تفسیر جواب و درنهایت بازگشت به مسئله در دنیای واقعی. لاوسون و ماریون [۳۵] ۱۸ ابراز داشته‌اند که معلمان که درحال توسعه ظرفیت دانش‌آموزان برای «مدل‌سازی با ریاضیات» هستند، به‌صراحت بین سناریوهای دنیای واقعی و نمایش‌های ریاضی آن سناریوها حرکت می‌کنند. کریمی فردین‌پور و گویا بیان کردند مدل‌سازی ریاضی به‌طور فزاینده‌ای نقش مهمی در بسیاری از علوم ایفا می‌کند. دلیل این امر شاید مزیت‌هایی است که یک مدل‌سازی ریاضی از آن‌ها برخوردار است. مهم‌ترین این مزیت‌ها عبارت است از ریاضی زبانی بسیار دقیق است. این مطلب کمک می‌کند تا ایده‌ها به‌صورت فرمول درآورده شده و فرض‌های مربوط شناسایی شوند و البته ریاضی زبانی است مختصر و مفید. ریاضی زبانی است که همواره همراه با قوانین تعریف‌شده برای به‌کارگیری است. کلیه قوانین ریاضی که در طول سالیان دراز به اثبات رسیده است در اختیار هست. کامپیوترها می‌توانند برای محاسبات عددی موردنیاز به نحو بسیار مؤثری به کار گرفته شوند [۲۱]. اکثر پدیده‌ها در دنیای واقعی بسیار پیچیده‌تر از آن هستند که بتوان به‌طور کامل مدل‌سازی شوند. ازاین‌رو، اولین سطح ورود به مدل‌سازی، شناسایی مهم‌ترین ویژگی‌های یک پدیده است. این‌ها در مدل گنجانده می‌شوند، بقیه حذف می‌شوند. سطح دوم، مربوط به میزان دست‌کاری ریاضی است که ارزشمند است. اگرچه ریاضیات پتانسیل اثبات نتایج کلی را دارد، اما این نتایج به شکل قابل‌تأملی به شکل معادلات مورد استفاده بستگی دارد. تغییرات کوچک در ساختار معادلات ممکن است نیاز به تغییرات عظیم در روش‌های ریاضی داشته باشد. استفاده از کامپیوترها برای مواجهه با معادلات مدل ممکن

<sup>18</sup>Lawson and Marion

است هرگز به نتایج ظریف و دقیقی منجر نشود، اما در برابر تغییرات بسیار قوی‌تر است. مدل‌سازی ریاضی را می‌توان به دلایل مختلف مورد استفاده قرار داد. این‌که یک نتیجه خاص چقدر درست به دست می‌آید، هم به وضعیت دانش در مورد یک پدیده واقعی و هم به‌خوبی انجام مدل‌سازی بستگی دارد [۳۵]. مدل‌سازی ریاضی فرآیند استفاده از ساختارهای مختلف ریاضی مانند نمودارها، معادلات، نمودارهای پراکنده، نمودارهای درختی و غیره برای نمایش موقعیت‌های دنیای واقعی است. مدل‌سازی یک مدل انتزاعی ارائه می‌دهد که یک مسئله را به ویژگی‌های اساسی آن کاهش می‌دهد. مدل‌های ریاضی به دلایل مختلفی مفید هستند. مهم‌تر از همه، مدل‌ها هسته ریاضی یک موقعیت را بدون اطلاعات اضافی نشان می‌دهند. به‌عنوان مثال، معادله  $a = b + 6$ ، تمام کلمات غیرضروری را از عبارت اصلی «کوروش ۶ سال از پیمان بزرگ‌تر است» حذف می‌کند [۳۲]. به نظر می‌رسد علی‌رغم اینکه استاندارد مدل‌سازی را در فرآیند استانداردهایی مانند حل مسئله، استدلال و اثبات می‌توان دید، اما خود مدل‌سازی یک استاندارد فرآیندی مستقل و مهم در آموزش ریاضی در دوره‌های مختلف آموزشی هست و توجه و استفاده از آن در فرآیند آموزش می‌تواند زمینه‌ی یادگیری مفاهیم مختلف ریاضی را مهیا سازد.

### ۳. نتیجه‌گیری

در این مطالعه، برای اولین بار سعی شده است که اصول و استانداردهای آموزش ریاضی در قالب یک مقاله منسجم علمی ارائه گردد. هرچند مطالعات مختلفی در داخل و خارج از کشور در این موضوع انجام شده است، ولی این مطالعات تنها به بخش یا بخش‌هایی از اصول و استانداردهای آموزش ریاضی پرداخته‌اند و به نظر می‌رسد انجام یک مطالعه‌ی کامل که تمام اصول و استانداردهای آموزش ریاضی اعم از محتوایی و فرآیندی را پوشش دهد لازم بود. همچنین لازم به ذکر است که استاندارد فرآیندی مدل‌سازی برای اولین بار در این مطالعه مورد اشاره و تشریح قرار گرفته است. اصول آموزش ریاضی از قبیل مساوات (عدالت آموزشی)، برنامه‌ی درسی، تدریس، یادگیری، ارزیابی و فناوری یک بستری است که شورای معلمان ریاضی آمریکا و کانادا (NCTM) برای ارتقاء آموزش و یادگیری ریاضی معرفی کرده‌اند. این اصول زمینه‌ای مناسب برای تدوین محتوای ریاضی و طراحی فرآیند آموزش مفاهیم آن مهیا کرده است که از آن به‌عنوان استانداردهای آموزش ریاضی نام‌برده شده است که مشتمل بر استانداردهای محتوایی و استانداردهای فرآیندی است. در ساحت و بستر اصول آموزش ریاضی، استانداردهای محتوایی که عبارتند از اعداد و عملیات، هندسه، جبر، اندازه‌گیری و تحلیل داده‌ها و احتمال تحت پوشش استانداردهای فرآیندی از قبیل استدلال و اثبات، حل مسئله، گفتمان، بازنمایی، اتصالات و ارتباطات و مدل‌سازی قرار گرفته‌اند. به‌بیان دیگر، استانداردهای محتوایی به‌وسیله استانداردهای فرآیندی از یاد دهنده به یادگیرنده منتقل می‌شوند و یادگیری آن‌ها بستگی به کیفیت استفاده از استاندارد فرآیندی دارد. در شکل ۳ چگونگی ارتباط استانداردهای محتوایی و فرآیندی ارائه شده است [۳۹].



شکل ۱: ارتباط استانداردهای محتوایی و فرآیندی

### مراجع

۱. ع. آذر، ا. نجفی و س. نجفی، مدل سازی ریاضی استوار، رویکردی نوین در بودجه ریزی عمومی ایران، پژوهش های مدیریت در ایران، ۱۵ (۱۳۹۰)، ۱-۱۹.
۲. م. اجدادی، م. اسلام پور و ف. کلاهدوز، ارزیابی مبتنی بر برقراری ارتباطات و اتصالات ریاضی گامی در جهت تحقق یادگیری معنادار و ایجاد انگیزه برای دانش آموزان، پنجمین کنفرانس ملی رویکردهای نوین در آموزش و پژوهش، ۲۷ آذرماه، مازندران، ایران، ۱۳۹۹.
۳. غ. احمدی، ا. ریحانی، و ن. نخستین روحی، تأثیر آموزش مبتنی بر گفتمان ریاضی بر توانایی استدلال ریاضی دانش آموزان دوره متوسط، روان شناسی مدرسه، ۴ (۱۳۹۴)، ۲۲-۳۷.
۴. س.م.ر. امام جمعه، و ح. دافعی مهارت های فرآیندی در برنامه درسی ریاضی دوره ی ابتدایی، نخستین همایش ملی برنامه ریزی و تحول نظام آموزشی، قم، ایران، ۱۳۹۴.
۵. ح. باکوئی، ع. اندی، م.ح. خلیل ارجمندی، م.ح. خلیلی، و س. بالویی، حل مسئله در آموزش ریاضی، چهارمین کنفرانس ملی رویکردهای نوین در آموزش و پژوهش، محمودآباد، ایران، ۱۳۹۸.
۶. م.ت. جهانپدیده، مقدمه ای بر مدل سازی ریاضی، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران، ۱۳۹۰.
۷. م. حسینی، ر. دستجردی، م.ر. اسدی یونسی و م. پاکدامن بررسی تأثیر آموزش مبتنی بر استانداردهای فرآیندی NCTM بر نگرش و پیشرفت تحصیلی دانش آموزان پایه پنجم در درس ریاضی، مطالعات آموزشی و آموزشگاهی، ۱۰ (۱۴۰۰)، ۱۹۵-۲۱۴.
۸. س.ا. رحمانی، ف. قربانی، ج. شافعی زاده، و ف. استوار، بررسی میزان استفاده از استانداردهای فرآیندی ریاضی در کتاب ریاضی پایه پنجم ابتدایی، دومین همایش ملی آموزش ریاضی ابتدایی، گرگان، ایران ۱۳۹۹.
۹. م. رضایی، مبانی آموزش ریاضی، انتشارات دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران، ۱۳۹۶.

۱۰. ح. دافعی، ص. نصر، صبا و پ. مقدمی، *گفتمان ریاضی؛ مهارتی اثربخش در آموزش ریاضیات دوره‌ی ابتدایی*؛ دومین همایش ملی آموزش ریاضی ابتدایی، گرگان، ایران، ۱۳۹۹.
۱۱. م. سادات و م. صادقی، *مبانی آموزش ریاضی: جهت استفاده دبیران ریاضی و دانشجو معلمان*، انتشارات گلبن، اصفهان، ایران، ۱۳۹۶.
۱۲. ف. سراجی و آ. سیفی، *بررسی نقش مهارت‌های یادگیری الکترونیکی بر رضایت و موفقیت تحصیلی دانشجویان مجازی، فناوری آموزش و یادگیری*، ۱ (۱۳۹۴)، ۲۱-۵۷.
۱۳. ر. سلطانلو، ف. کلاهدوز و ا. ریحان، *چگونه فرآیند حل مسئله‌ی معلمان بهبود یافت، دومین کنفرانس ملی رویکردهای نوین در آموزش و پژوهش*، محمودآباد، ایران، ۱۳۹۶.
۱۴. س.ح. علم‌الهدایی، *اصول آموزش ریاضی*، نشر نما، مشهد، ایران، ۱۳۹۵.
۱۵. ص. علی زاده و ع. تنهایی، *بررسی تأثیر روش تدریس مبتنی بر حل مساله بر پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان پایه هفتم شهرستان بیرجند در درس ریاضی*، کنفرانس آموزش ریاضی ایران، شیراز، ایران، ۱۳۹۵.
۱۶. س. غلام آزاد، *اعتبارسنجی برنامه درسی حوزه یادگیری ریاضیات*، دفتر برنامه ریزی و تألیف کتابهای درسی ابتدایی و متوسطه نظری، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش، ۱۳۹۶.
۱۷. س. غلام آزاد، ز. گویا و ع.ر. کیامنش، *تأملی در مؤلفه‌های برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای ایران*، نظریه و عمل در برنامه درسی، ۹ (۱۴۰۰)، ۱۷۷-۲۰۶.
۱۸. ز. قربانی سی سخت، *بررسی اثرا آموزش مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه روی درک دانش‌آموزان پایه چهارم ابتدایی از کسرها*، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، ۱۳۸۸.
۱۹. م. کاظمی، *مدلسازی ریاضی و کاربرد آن در مدیریت*، مجله دانش و توسعه، ۲ (۱۳۷۴)، ۱۵۵-۱۶۷.
۲۰. ی. کریمی فردین پور و ز. گویا، *اثبات و استدلال در ریاضیات مدرسه‌ای*، فصلنامه رشد آموزش ریاضی، شماره ۸۳ (۱۳۸۵).
۲۱. ی. کریمی فردین پور و ز. گویا، *اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای*، ۲۰۰۰، NCTM، فصلنامه رشد آموزش ریاضی، پیاپی ۸۷ (۱۳۸۶)، ۲۶-۳۰.
۲۲. ز. گویا و ح. سرشتی، *آموزش حسابان: مشکلات موجود و نقش تکنولوژی (قسمت اول)*، فصلنامه رشد آموزش ریاضی، ۸۴ (۱۳۸۵).
۲۳. س.۵. میرقادر و م. زندیه، *طراحی یک الگوریتم فرا ابتکاری جدید بر اساس رفتار توابع ریاضی  $\tanh, x\cos(x)$  چشم‌انداز مدیریت صنعتی*، ۱ (۱۳۹۰)، ۱۰۷-۱۲۳.
۲۴. ن. هاشمی، *استفاده از بازی در رفع اختلال یادگیری ریاضی در کودکان*، پژوهش در آموزش ریاضی، ۴ (۱۴۰۰)، ۵۷-۷۳.
۲۵. ع. ناهیدی، *تأثیر آموزش مبتنی بر گفتمان ریاضی بر حل مسائل کلامی*، پایان نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز، ۱۳۸۹.
۲۶. ف. نوروزی، ش. بخشعلی زاده و ز. قربانی سی سخت، *بازنمایی‌های چندگانه: فرآیندی مهم در یاددهی و یادگیری کسرها*، نشریه علمی پژوهشی فناوری آموزش، ۴ (۱۳۸۹)، ۲۳۹-۲۴۹.
27. D.P. Ausubel, *Educational Psychology: A Cognitive View*, Holt, Rinehart and Winston: New York, 1968.
28. N. Berger, E. Mackenzie, and K. Holmes, *Positive attitudes towards mathematics and science are mutually beneficial for student achievement: a latent profile analysis of TIMSS 2015*, Aust. Educ. Res. **47** (2020), no. 3, 409-444.
29. G. Bottle, *Teaching Mathematics in the Primary School*, Continuum, UK, 2005.

30. O. Buchbinder and S. McCrone, *Guiding Principles for Teaching Mathematics via Reasoning and Proving*, Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12), Feb 2022, Bozen-Bolzano, Italy, 2022.
31. R.W. Emerson and D. Anderson, *What mathematical images are in a typical mathematics textbook? Implications for students with visual impairments*, J. Vis. Impair. Blind. **112**(2018), 20–32.
32. M. Hill, *Best Practices for Mathematical Modeling*, Inspired Ideas, USA, 2018.
33. Y.H. Hu, J. Xing and L.P. Tu, *The effect of a problem-oriented teaching method on university mathematics learning*, EURASIA J. Math. Sci Tech. Ed. **14** (2018) 1695–1703.
34. Lampert, M. *When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching*, Am. Educ. Res. J. **27** (1990), 29–63.
35. D. Lawson and G. Marion, *An introduction to mathematical modelling*, Retrieved from website on August 2016 [http : //www.maths.bris.ac.uk/ madjl/course\\_text.pdf](http://www.maths.bris.ac.uk/~madjl/course_text.pdf), 2008.
36. J. Mason, L. Burton, and K. Stacey, *Thinking Mathematically*, Addison-Wesley, 2010.
37. E. Nardi, and E. Knuth, *Changing classroom culture, curricula, and instruction for proof and proving: How amenable to scaling up, practicable for curricular integration, and capable of producing long-lasting effects are current interventions?* Educ. Stud. Math. **96** (2017), 267–274.
38. National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics*, Retrieved from [www.nctm.org](http://www.nctm.org), 2006.
39. National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and Standards of School Mathematics*, Retrieved from [www.nctm.org](http://www.nctm.org), 2020
40. G. Polya, *How to Solve It*, Princeton University Press, USA, 1982.
41. E.A. Silver, J. Kilpatrick and B. Schlesinger, *Thinking Through Mathematics*, New York: College Board, 1995.
42. A.H. Schoenfeld, *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics* (Reprint), J. Educ. **196** (2016), 1–38.
43. J. Van de Walle, *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, Allyn and Bacon, USA, 2006.
44. H. Yue, *Concept Maps as Assessment Tools in Mathematics: Comparison with Clinical Interviews*, The University of Texas at El Paso, USA, 2008.



## QUADRATIC EQUATION $x^2 - x - 1 = 0$ AND LUCAS AND FIBONACCI SEQUENCES WITH EMPHASIS ON SEQUENCES IN SCHOOL TEXTBOOKS

HOJATOLLAH LAELI DASTJERDI\*

Department of Mathematics Education, Farhangian University, PO Box 889-14665, Tehran, Iran  
h.laeli@cfu.ac.ir

**Abstract.** In this article, we will examine some points related to sequences in school textbooks. By examining the school and university textbooks, it can be seen that the sequences are presented in the textbooks very briefly, which has caused students to face problems in the university. Because there are many topics such as limit, continuity, derivative and integral, existence of limit or continuity or not of some functions, and even other topics in discrete mathematics or geometry books to know the concept and characteristics of sequences. In addition, there are many sequences, each of which, depending on whether they are convergent or divergent, have interesting features that can be useful for teaching. In this article, considering the roots of an equation in the second dimension, we will introduce and examine the Lucas and Fibonacci sequences. In the following, we will discuss the characteristics of this biped and check their relationship with each other.

---

2020 Mathematics Subject Classification. 97C30, 97C70, 97D60.

Keywords. Equation, sequence, Lucas, Fibonacci, Matrix.

Date: Received 21-6-2024 Revised 13-8-2024 Accepted 24-9-2024 Available Online 26-9-2024  
©Ferdowsi University of Mashhad.



## معادله درجه دوم $x^2 - x - 1 = 0$ و دنباله‌های لوکاس و فیبوناچی با تأکید بر دنباله‌ها در کتب درسی مدرسه

حجت اله لعلی دستجردی\*

گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۸۸۹-۱۴۶۶۵، تهران، ایران

[h.laeli@cfu.ac.ir](mailto:h.laeli@cfu.ac.ir)

چکیده. در این مقاله به بررسی برخی نکات مربوط به دنباله‌ها در کتب درسی مدرسه می‌پردازیم. با بررسی کتاب‌های درسی مدرسه و دانشگاه مشاهده می‌شود که دنباله‌ها در کتاب‌های درسی به‌طور خیلی خلاصه ارائه شده‌اند که این باعث شده است در ادامه و در دانشگاه، دانشجویان با مشکل روبرو شوند، چراکه مباحث زیادی مانند حد، پیوستگی، مشتق و انتگرال، وجود حد یا پیوسته بودن یا نبودن بعضی از توابع و حتی مباحث دیگری چه در کتاب‌های ریاضیات گسسته و یا هندسه به دانستن مفهوم و ویژگی‌های دنباله‌ها بستگی دارد. علاوه بر این دنباله‌های زیادی وجود دارند که هرکدام با توجه به این‌که همگرا یا واگرا باشند ویژگی‌های جالبی دارند که می‌توانند برای آموزش مفید باشند. در این مقاله با توجه به ریشه‌های یک معادله درجه دوم به معرفی و بررسی دو دنباله لوکاس و فیبوناچی می‌پردازیم. در ادامه به ویژگی‌های این دو دنباله پرداخته و ارتباط آن‌ها با یکدیگر را بررسی می‌کنیم.

### ۱. پیشگفتار

یکی از مباحث مهم در ریاضیات بحث دنباله‌هاست. اعداد طبیعی، اعداد اول و... مثال‌هایی از دنباله‌ها هستند. آشنایی با دنباله‌ها برای دانش‌آموزان از ابتدای تحصیل در نظر گرفته شده است. با نگاهی به کتاب‌های

2010 Mathematics Subject Classification. 97C30, 97C70, 97D60.

واژگان کلیدی. معادله، دنباله، لوکاس، فیبوناچی، ماتریس.

تاریخ: دریافت ۱۴۰۳/۴/۱ بازنگری ۱۴۰۳/۵/۲۳ پذیرش ۱۴۰۳/۷/۳ انتشار برخط ۱۴۰۳/۷/۵

نحوه ارجاع به این مقاله: ح. دستجردی، معادله درجه دوم  $x^2 - x - 1 = 0$  و دنباله‌های لوکاس و فیبوناچی با تأکید بر دنباله

ها در کتب درسی مدرسه، به سوی علوم ریاضی، ۴ (۱۴۰۳)، شماره ۱، ۸۳-۹۵.

© دانشگاه فردوسی مشهد.

درسی جدید و قدیم به نظر می‌رسد که باید توجه بیشتری به این مبحث صورت گیرد. چراکه پایه و اساس خیلی از مطالب در ریاضیات، دنباله‌هاست. در ادامه به بررسی بعضی از مفاهیمی که در کتاب‌های درسی در مورد دنباله‌ها آمده است می‌پردازیم.

در کتاب ریاضیات گسسته دوره پیش‌دانشگاهی رشته ریاضی [۱] چاپ ۱۳۹۰ و در صفحه ۲۷ در قسمت استقرای ریاضی مثالی به صورت زیر ارائه شده است:

چند جمله‌ی اول دنباله‌ای موسوم به دنباله‌ی لوکا عبارتند از

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \dots$$

اگر جمله  $n$ ام را با  $L_n$  نمایش دهیم، این دنباله با رابطه به اصطلاح بازگشتی

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad n \geq 3,$$

و شرایط اولیه  $L_2 = 3, L_1 = 1$  به دست می‌آید. با استفاده از اصل استقرای قوی ریاضی ثابت می‌کنیم که به ازای هر عدد طبیعی  $n$

$$L_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n.$$

این مثال یک مثال کاملاً انتزاعی و ارائه آن بدون هیچ مقدمه و هیچ شناختی می‌تواند باعث بی‌انگیزگی دانش‌آموزان شود. البته این مثال در سال‌های بعد از کتاب درسی مدرسه حذف شده است. ذکر این نکته مهم است که جمله اول این دنباله عدد ۲ است که در کتاب درسی نوشته نشده است. نکته قابل تأمل این است که با نگاهی به کتاب‌های درسی مدرسه ملاحظه می‌شود که فقط درس سوم از فصل اول ریاضی دهم [۲] و فصل اول حسابان ۱ [۳] به دنباله‌ها اختصاص داده شده است. در ابتدا به تعریف الگو و سپس تعریف دنباله پرداخته شده است و در ادامه نیز دنباله حسابی و هندسی معرفی شده‌اند. البته یکی از بدفهمی‌هایی که در این درس برای دانش‌آموزان ممکن است اتفاق بیفتد، تعریف دنباله خطی است که در صفحه ۱۶ کتاب ریاضی دهم تعریف شده و عبارت  $an$  در تعریف الگوی خطی است که با موارد  $a_n$  در صفحات بعدی مثل ۱۹، ۱۴ و ۲۰ بدفهمی ایجاد می‌شود. در شکل ۱  $an$  و در شکل‌های ۲ و ۳  $a_n$  داده شده است. یکی دیگر از مواردی که در کتاب حساب، دیفرانسیل و انتگرال [۴] چاپ ۱۳۹۴ وجود داشت، تعریف حد با استفاده از دنباله‌ها است. در شکل‌های ۴ و ۵ تعریف حد با استفاده از دنباله‌ها نمایش داده شده است. همان‌طور که اشاره شد، این قسمت‌ها نیز در کتاب‌های جدید وجود ندارند. همچنین در این کتاب و در صفحه ۴۵، شکل ۶، دنباله‌ای که به عنوان یک دنباله‌ی مهم عدد نپر را معرفی می‌کند نیز در کتاب‌های جدید حذف شده است. در این مقاله به بررسی مشخصات دنباله لوکاس حذف شده از کتاب و دنباله فیبوناچی با استفاده از یک چندجمله‌ای درجه دو می‌پردازیم. همچنین ارتباط این دو دنباله را باهم بررسی می‌کنیم.

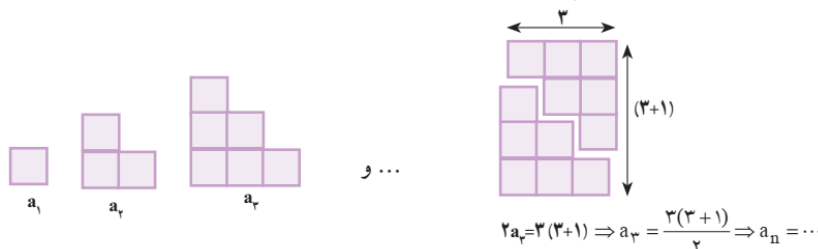
به طور کلی الگوهای را که جمله عمومی آنها به صورت  $t_n = an + b$  است، الگوهای خطی می نامیم که در آن  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

دیدیم که در یک الگوی خطی با جمله عمومی  $t_n = an + b$ ، میزان تغییر جملات متوالی برابر  $a$  بود. به عبارت دیگر، اختلاف هر دو جمله متوالی در این الگوی خطی برابر ضرب  $n$  است. به عنوان مثال در یک الگوی خطی با جمله عمومی  $t_n = -4n + 15$ ، هر جمله نسبت به جمله قبل از خودش ۴ واحد کاهش می یابد:

$$11, 7, 3, -1, -5, -9, \dots$$

شکل ۱: تعریف دنباله خطی در صفحه ۱۹ ریاضی دهم

(پ) شکل های الگوی صفحه قبل را به صورت زیر تبدیل می کنیم. با دقت در تصویر زیر سعی کنید حاصل  $a_n$  را بر حسب  $n$  به دست آورید.



شکل ۲: سؤال مربوط به صفحه ۲۰

در ادامه مقاله موارد زیر را خواهیم داشت: در بخش ۲، معادله های لوکاس و فیبوناچی معرفی خواهند شد. در بخش ۳، روابط ماتریسی بین این دو دنباله ارائه خواهد شد. در قسمت ۴، نتیجه گیری مقاله را خواهیم داشت.

۲. معادله درجه دوم  $x^2 - x - 1 = 0$  و دنباله های لوکاس و فیبوناچی

همان طور که می دانیم در کتاب ریاضی سال دهم، حل معادله درجه دوم آمده است و مطالب ارائه شده در این مقاله برای دانش آموز متوسطه سال دهم، به طور کامل قابل فهم بوده و فقط در پایان از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه استفاده شده است. در این صورت این مطالب می تواند به عنوان موضوعات پیشنهادی در کتب درسی مدرسه ای گنجانده شود.

معادله درجه دوم

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad (1.2)$$

| n: شماره شکل               | ۱       | ۲       | ۳        | ۴   | ... | n         | ... |
|----------------------------|---------|---------|----------|-----|-----|-----------|-----|
| $a_n$ : تعداد چوب کبریت‌ها | ۵       | ۸       | ۱۱       | ... | ... | ...       | ... |
| رابطه بین $a_n$ و n        | $a_1=5$ | $a_2=8$ | $a_3=11$ | ... | ... | $a_n=...$ | ... |

به عنوان مثال ملاحظه می‌شود که، «تعداد چوب کبریت‌های شکل اول برابر ۵ است» که این مطلب را به طور خلاصه به صورت  $a_1=5$  نشان داده‌ایم (می‌خوانیم:  $a$  اندیس ۱ برابر ۵). عبارت‌های  $a_1, a_2, a_3$  و متغیرهای اندیس‌دار  $a_n$  نامیده می‌شوند که مقادیر آنها به ترتیب ۵، ۸ و ۱۱ است. به این اعداد جملات الگو هم گفته می‌شود. پس در واقع، عدد ۵ جمله اول الگوست؛ ۸ جمله دوم آن و به همین ترتیب الی آخر.

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
| ۵     | ۸     | ۱۱    |

الف) با این نمادگذاری،  $a_n$  نشان دهنده چیست و مقدار آن چقدر است؟

ب)  $a_n$  به چه معناست؟

پ) آیا می‌توانید حاصل  $a_n$  را بر حسب  $n$  به دست آورید؟ برای این کار فعالیت بعد را انجام دهید.

شکل ۳: سؤال مربوط به صفحه ۱۴

**تعریف:** فرض کنیم  $D$  زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{R}$  و  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع باشد، در این صورت، گوئیم حد تابع  $f$  در  $a$ ، عدد حقیقی  $L$  است و می‌نویسیم،  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه  $f$  مانند  $\{a_n\}$  که به  $a$  همگراست ( $a_n \neq a$ )، دنباله  $\{f(a_n)\}$  به  $L$  همگرا باشد.

شکل ۴: تعریف صفحه ۷۱ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش‌دانشگاهی سال ۱۳۹۴

**تعریف ۱:** فرض کنیم تابع  $D$  زیر مجموعه‌ای از  $\mathbb{R}$  و  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع باشد، در این صورت، گوئیم حد تابع  $f$  در  $a$ ،  $+\infty$  است و می‌نویسیم  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ، هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه  $f$  مانند  $\{x_n\}$  که همگرا به  $a$  است و  $x_n \neq a$ ،  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty$ .

شکل ۵: تعریف صفحه ۱۰۶ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش‌دانشگاهی سال ۱۳۹۴

را در نظر بگیرید. این معادله دارای دو ریشه

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

## ۸-۱- یک دنباله مهم

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty} : 2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \left(\frac{6}{5}\right)^5, \dots$$

دنباله زیر را در نظر می گیریم  
این دنباله هم به لحاظ کاربردی و همچنین از جنبه نظری اهمیت فوق العاده دارد. چرا؟ ثابت می شود این دنباله همگراست و هرگاه حد آن را  $e$  بنامیم، یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

عدد حقیقی  $e$  به صورتی طبیعی، در بیشتر پدیده های خلقت ظاهر می شود. دو دسته از مهم ترین پدیده ها فرایندهای رشد و زوال هستند. در اولی کمیت مورد مطالعه (نسبت به زمان) رشد می کند و در پدیده دوم کمیت مورد بحث رو به زوال دارد. برای مثال: وقتی تعداد اندکی باکتری را در محیطی مناسب قرار می دهیم، به شدت رشد کرده و پس از زمان اندکی تعداد آنها ۲، ۳ و یا صد برابر می شود. در حالی که هرگاه مقداری ماده رادیواکتیو به مانند فلزهای اورانیوم، پلوتونیوم، و یا انشتانیوم را داشته باشیم، پس از مدتی مقدار آن کاهش یافته، یعنی بخشی از ماده زوال یافته و به عناصر دیگری مبدل می گردد. عدد  $e$  در چنین پدیده هایی نقشی اساسی دارد، به گونه ای که در محاسبات مربوط به رشد و زوال به صورتی طبیعی بروز می کند.  $e$  در اقتصاد نیز مطرح می شود. از این بابت لگاریتمی که پایه آن عدد  $e$  باشد لگاریتم طبیعی نامیده می شود.

شکل ۶: معرفی یک دنباله مهم در صفحه ۴۵

است. چون  $\alpha$  ریشه معادله (۱.۲) است، در این صورت در معادله صدق می کند و خواهیم داشت:

$$\alpha^2 = 1 + \alpha. \quad (2.2)$$

حال با توجه به اینکه  $\alpha^3 = \alpha^2 \alpha$  و با استفاده از رابطه (۲.۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \alpha^3 &= \alpha^2 \alpha \\ &= (1 + \alpha) \alpha \\ &= \alpha + \alpha^2 \\ &= \alpha + (1 + \alpha) = 1 + 2\alpha. \end{aligned} \quad (3.2)$$

با ادامه این روش می توان نشان داد که

$$\alpha^4 = 2 + 3\alpha, \quad \alpha^5 = 3 + 5\alpha. \quad (4.2)$$

با در نظر گرفتن موارد به دست آمده

$$\begin{aligned}\alpha &= 0 + \alpha, \\ \alpha^2 &= 1 + \alpha, \\ \alpha^3 &= 1 + 2\alpha, \\ \alpha^4 &= 2 + 3\alpha, \\ \alpha^5 &= 3 + 5\alpha,\end{aligned}\tag{۵.۲}$$

به دنبال پیدا کردن الگوی مورد نظر هستیم. برای پیدا کردن الگو به ازای  $n$  و این که  $\alpha^n$  به چه صورت خواهد بود، به معرفی دنباله فیبوناچی می پردازیم. این دنباله به صورت زیر است:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

رابطه بازگشتی این دنباله به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned}F_0 &= 0, \\ F_1 &= 1, \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n, \quad n \geq 0.\end{aligned}\tag{۶.۲}$$

این دنباله دارای ویژگی های بسیار جالبی است که در بسیاری از منابع بررسی شده است. برای پیدا کردن رابطه ای برای  $\alpha^n$ ، فرض می کنیم

$$\alpha^n = p + q\alpha.\tag{۷.۲}$$

حال با در نظر گرفتن و مقایسه دو رابطه (۵.۲) و (۷.۲) مشاهده می شود که عدد ۲ در  $\alpha^4$ ، همان  $F_3$  است و ضریب  $\alpha$  نیز  $F_4$  است. به همین صورت در  $\alpha^5$  عدد ۳ مقدار  $F_4$  است و ضریب  $\alpha$  برابر  $F_5$  است. پس با توجه به نکات گفته شده خواهیم داشت:

$$p = F_{n-1}, \quad q = F_n.$$

در این صورت داریم:

$$\alpha^n = F_{n-1} + F_n \alpha, \quad n \geq 1.\tag{۸.۲}$$

با روشی مشابه، برای ریشه دوم معادله نیز خواهیم داشت:

$$\beta^n = F_{n-1} + F_n \beta, \quad n \geq 1.\tag{۹.۲}$$

حال اگر روابط (۸.۲) و (۹.۲) را از هم کم کنیم خواهیم داشت:

$$\alpha^n - \beta^n = F_n(\alpha - \beta). \quad (10.2)$$

در این صورت دنباله  $F_n$  عبارت است از

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right). \quad (11.2)$$

حال می‌خواهیم مقدار

$$\frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta}, \quad (12.2)$$

را که خود دنباله‌ی جدیدی است، مشخص کنیم. می‌دانیم که  $\alpha + \beta = 1$ ,  $\alpha\beta = -1$ . اگر فرض کنیم

$$L_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta} = \alpha^n + \beta^n. \quad (13.2)$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$L_0 = 2,$$

$$L_1 = 1,$$

$$L_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta = 3,$$

$$L_3 = \alpha^3 + \beta^3 = 4,$$

$$L_4 = 7,$$

$$\vdots$$

$$(14.2)$$

در این صورت رابطه بازگشتی زیر را برای این دنباله تعریف می‌کنیم:

$$L_0 = 2,$$

$$L_1 = 1,$$

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \quad n \geq 1. \quad (15.2)$$

این دنباله را دنباله لوکاس<sup>۱</sup> می‌نامیم. البته رابطه (۱۵.۲) را می‌توان به صورت زیر نیز اثبات کرد:

---

Lucas<sup>۱</sup>

$$\begin{aligned}
L_{n+1} + L_n &= \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} + \alpha^n + \beta^n, \\
&= \alpha^n(\alpha + 1) + \beta^n(\beta + 1), \\
&= \alpha^n \alpha^2 + \beta^n \beta^2, \\
&= \alpha^{n+2} + \beta^{n+2}, \\
&= L_{n+2}, \quad n \geq 1.
\end{aligned} \tag{۱۶.۲}$$

که در این رابطه به دلیل این که  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - x - 1 = 0$  است، خواهیم داشت:

$$\alpha^2 = \alpha + 1, \quad \beta^2 = \beta + 1$$

همچنین اگر معادله تفاضلی

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \quad n \geq 1, \tag{۱۷.۲}$$

را در نظر بگیریم، این معادله دارای معادله مشخصه زیر است:

$$x^2 - x - 1 = 0. \tag{۱۸.۲}$$

که دارای دو ریشه  $\alpha$  و  $\beta$  است. پس جواب عمومی رابطه بازگشتی (۱۷.۲) به صورت زیر است:

$$L_{n+2} = c_1 \alpha^n + c_2 \beta^n, \quad n \geq 1. \tag{۱۹.۲}$$

که با در نظر گرفتن

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1,$$

ضرایب  $c_1 = 1$  و  $c_2 = 1$  به دست می‌آید. پس نتیجه زیر را برای دو دنباله لوکاس و فیبوناچی به صورت زیر خواهیم داشت که فرمول‌های باینِت<sup>۲</sup> نامیده می‌شوند:

$$\begin{aligned}
L_n &= \alpha^n + \beta^n, \\
F_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.
\end{aligned} \tag{۲۰.۲}$$

در ادامه به معرفی بعضی از روابط جالب بین دنباله لوکاس و فیبوناچی به صورت زیر می‌پردازیم [۸، ۷]:

$$\begin{aligned} L_n &= F_{n-1} + F_{n+1} = 2F_{n+1} - F_n, \\ F_{2n} &= L_n F_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{F_n} &= \sqrt{5}. \end{aligned} \quad (21.2)$$

یکی دیگر از روابطی که برای هر دو دنباله وجود دارد رابطه‌ی کزینی<sup>۲</sup> به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} L_n^2 - L_{n-1}L_{n+1} &= 5(-1)^n, \\ F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 &= (-1)^n. \end{aligned} \quad (22.2)$$

روابط جالب دیگری وجود دارد که خواننده علاقه‌مند می‌تواند برای مطالعه به منابع [۵، ۶] مراجعه کند.

### ۳. ارتباط ماتریسی دنباله‌های لوکاس و فیبوناچی

در ادامه به بررسی ماتریسی دنباله‌های فیبوناچی و لوکاس می‌پردازیم. روابط زیر را برای دو دنباله فیبوناچی و لوکاس داریم:

$$\begin{aligned} F_{n+1} + F_{n-1} &= L_n, \\ L_{n-1} + L_{n+1} &= 5F_n. \end{aligned} \quad (1.3)$$

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

رابطه (۱.۳) را به صورت معادله‌های ماتریسی زیر خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} \\ L_n \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

یا

$$5 \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} L_n \\ L_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (۴.۳)$$

حال قضیه زیر را برای  $Q^n$  به صورت زیر داریم.

**قضیه ۱.۳.** فرض کنید  $Q$  ماتریس تعریف شده در (۲.۳) باشد. در این صورت

$$Q^n = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} & \text{اگر } n \text{ زوج،} \\ \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} & \text{اگر } n \text{ فرد،} \end{cases}$$

در ادامه با استفاده از  $Q^n$ ، فرمول‌هایی که مشهور به فرمول‌های باینت هستند را با استفاده از روش ماتریسی به دست می‌آوریم [۷].

**قضیه ۲.۳.** فرض کنید  $n$  عدد طبیعی باشد. در این صورت روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} L_n &= \alpha^n + \beta^n, \\ F_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}. \end{aligned} \quad (۵.۳)$$

*اثبات.* ماتریس  $Q$  را در نظر بگیرید. چندجمله‌ای مشخصه این ماتریس عبارت است از

$$\lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0.$$

در این صورت مقادیر ویژه این ماتریس عبارت است از

$$\lambda_1 = \sqrt{5}\alpha, \quad \lambda_2 = \sqrt{5}\beta.$$

بردارهای ویژه متناظر با این دو مقدار ویژه نیز عبارتند از

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\beta \end{bmatrix} \quad (۶.۳)$$

و

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha \end{bmatrix} \quad (۷.۳)$$

که  $V_1$  بردار ویژه متناظر با  $\lambda_1$  و  $V_2$  بردار ویژه متناظر با  $\lambda_2$  هست و  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  و  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . در این صورت ماتریس  $Q$  قطری شدنی است و می‌توان نوشت:

$$V = U^{-1}QU$$

که در آن

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix}$$

و

$$V = \begin{bmatrix} \sqrt{5}\alpha & 0 \\ 0 & \sqrt{5}\beta \end{bmatrix}.$$

با توجه به ویژگی‌های ماتریس‌های متشابه داریم:

$$V^n = U^{-1}Q^nU, \quad Q^n = UV^nU^{-1}.$$

پس داریم:

$$Q^n = 5^{\frac{n-1}{2}} \begin{bmatrix} \alpha^{n+1} + (-\beta)^{n+1} & \alpha^n - (-\beta)^n \\ \alpha^n - (-\beta)^n & \alpha^{n-1} + (-\beta)^{n-1} \end{bmatrix}.$$

□

#### ۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله به معرفی یک معادله درجه دو و ارتباط آن با دنباله‌های لوکاس و فیبوناچی پرداختیم. در کتب درسی متوسطه به‌طور خیلی خلاصه به این مفهوم پرداخته شده است. در صورتی که می‌توان با اختصاص مفاهیم بیشتر و با توجه به ساده بودن و کاربردی بودن آن در تعریف حد، پیوستگی، مشتق و انتگرال دانش‌آموزان را در دوره متوسطه با این مفاهیم آشنا نمود.

#### مراجع

- [۱] ریاضیات گسسته دوره پیش دانشگاهی (کد کتاب ۲۹۶/۱)، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، چاپ هفدهم، ۱۳۹۰.
- [۲] ریاضی (۱) - پایه دهم دوره دوم متوسطه، ۱۱۰۲۱۱، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، چاپ هشتم، ۱۴۰۲.
- [۳] حسابان (۱) - پایه یازدهم دوره دوم متوسطه، ۱۱۱۲۱، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، چاپ هفتم، ۱۴۰۲.
- [۴] حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی (کد کتاب ۲۹۵/۱)، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، چاپ چهارم، ۱۳۹۴.

- [6] V. E. Hoggatt , *Fibonacci and Lucas Numbers*, Houghton Mifflin Company, Boston, 1969.
- [7] F. Kohen and D. Bozkurt, *On lucas numbers by the matrix method*, Hacet. J. Math. Stat., **39** (2010) 471–475.
- [8] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Wiley, Interscience, New York, 2001.



# Towards Mathematical Sciences

Volume 4, Issue 1, 2024



## Publisher

Ferdowsi University of Mashhad

## Director-in-Charge

Mohammad Sal Moslehian

## Editor-in-Chief

Fateme Helen Ghane

## Executive Manager

Mohammad Janfada

## Editorial Board

*Shirin Hejazian, Ferdowsi University of Mashhad*

*Masoud Ariannejad, University of Zanjan, Zanjan*

*Mohammad Janfada, Ferdowsi University of  
Mashhad*

*Arezou Habibirad, Ferdowsi University of Mashhad*

*Davod Khojasteh Salkuyeh, University of Guilan*

*Amir Daneshgar, Sharif University of Technology*

*Mahdi Doostparast, Ferdowsi University of Mashhad*

*Ali Dolati, Yazd University*

*Farzad Radmehr, Ferdowsi University of Mashhad*

*Habib Rajabi Mashhadi, Ferdowsi University of  
Mashhad*

*Bakhtiyar Shabani, Ferdowsi University of Mashhad*

*Ahmad Safapour, Vali-E-Asr University of Refsanjan*

*Massoumeh Fashandi, Ferdowsi University of  
Mashhad*

*Gholam Reza Mohtashami Borzadaran, Ferdowsi  
University of Mashhad*

*Ehsan Momtahn, Yasouj University*

*Ali Asghar Molavi, Hakim Sabzevari University*

*Madjid Mirzavaziri, Ferdowsi University of Mashhad*

## Advisory Board

*Faezeh Toutounian Mashhad, Ferdowsi University of  
Mashhad*

*Rahim Zare Nahandi, University of Tehran*

*Omid Ali Shehni Karamzadeh, Shahid Chamran  
University of Ahvaz*

*Mohammad Ghasem Vahidi Asl, Shahid Beheshti  
University*

*Bahman Honary, Ferdowsi University of Mashhad*

**All rights are reserved for Ferdowsi University of Mashhad.**

**Mailing Address:** TMSJ Office, Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran. P. O. Box 91775-1159.

**Website Address:** <https://tmsj.um.ac.ir>

**Email:** [tmsj@um.ac.ir](mailto:tmsj@um.ac.ir)

**Phone:** +98-51-38806222

**Fax:** +98-51-38807358



## فهرست مطالب

۱..... پیرامون ساختارهای فازی در آنالیز ریاضی.....

م. شهامت، ع. گنج بخش صنعتی، ا. یوسفی کیا، و ع. شهیدی کیا

۱۹..... مطالعه ای تطبیقی بر ارتباط بین آمار و علم داده .....

ا.ح. قطاری، ا. تبریزی، و ا. بهرامی سامانی

۳۲..... تحلیل محتوای حسابان ۲ پایه دوازدهم رشته ریاضی و فیزیک بر اساس روش ویلیام رومی.....

م. عزتی و ح. فرجی

۴۲..... مدلی جدید برای تابع گاما در اعداد طبیعی.....

ر. محمدیان

۶۵..... اصول و استانداردهای آموزش ریاضی دوره ی متوسطه با تأکید بر استانداردهای فرآیندی.....

ن. هاشمی

۸۳..... معادله درجه دوم  $x^2 - x - 1 = 0$  و دنباله های لوکاس و فیبوناچی با تأکید بر دنباله ها در کتب درسی مدرسه.....

ح. دستجردی