



دوره ۵، شماره ۱، پاییز ۱۴۰۴



به سوی علوم ریاضی

شاپا الکترونیک ۵۱۶۲-۲۷۸۳

tmsj.um.ac.ir



بسم الله الرحمن الرحيم

به سوی علوم ریاضی

دارای پروانه انتشار شماره ۸۶۳۹۶ به تاریخ ۱۳۹۹/۲/۱۵ از وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی، شاپا الکترونیک 2783-5162

دوره ۳، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۲

صاحب امتیاز: دانشگاه فردوسی مشهد

مدیر مسئول

محمد صال مصلحیان

سر دبیر

فاطمه هلن قانع

مدیر اجرایی

محمد جانفدا

اعضای هیات تحریریه

شیرین حجازیان، دانشگاه فردوسی مشهد

مسعود آرین نژاد، دانشگاه زنجان

محمد جانفدا، دانشگاه فردوسی مشهد

آرزو حبیبی راد، دانشگاه فردوسی مشهد

داود خجسته سالکویه، دانشگاه گیلان

امیر دانشگر، دانشگاه صنعتی شریف

مهدی دوست پرست، دانشگاه فردوسی مشهد

علی دولتی، دانشگاه یزد

فرزاد راد مهر، دانشگاه فردوسی مشهد

حبیب رجبی مشهدی، دانشگاه فردوسی مشهد

بختیار شعبانی ورکی، دانشگاه فردوسی مشهد

احمد صفاپور، دانشگاه ولیعصر رفسنجان

معصومه فشندی، دانشگاه فردوسی مشهد

غلامرضا محتشمی برزادران، دانشگاه فردوسی مشهد

احسان ممتحن، دانشگاه یاسوج

علی اصغر مولوی، دانشگاه حکیم سبزواری

مجید میرزا وزیری، دانشگاه فردوسی مشهد

اعضای مشورتی هیات تحریریه

فائزه توتونیان مشهد، دانشگاه فردوسی مشهد

رحیم زارع نهندی، دانشگاه تهران

امیدعلی شهنی کرم زاده، دانشگاه شهید چمران اهواز

محمد قاسم وحیدی اصل، دانشگاه شهید بهشتی

بهمن هنری، دانشگاه فردوسی مشهد

این نشریه به صورت دوفصلنامه (دو شماره در سال) منتشر می شود.

کلیه حقوق برای دانشگاه فردوسی مشهد محفوظ است

نشانی:

مجله‌ی به سوی علوم ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، ص.پ. ۱۱۵۹، مشهد ۹۱۷۷۵

ایمیل: tmsj@um.ac.ir

آدرس وبسایت: <https://tmsj.um.ac.ir>

فاکس: ۰۵۱-۳۸۸۰۷۳۵۸

تلفن: ۰۵۱-۳۸۸۰۶۲۳۴

مجله به سوی علوم ریاضی با هدف عمومی سازی ریاضیات، کمک به آشنایی جامعه به طور عام و جامعه دانشگاهی به طور خاص با جنبه‌های مختلف و کاربردهای ریاضی، آمار، و کامپیوتر و ارتباط آنها با سایر علوم در قالب چاپ مقالات علمی-ترویجی مرتبط می‌باشد.

این مجله مقالات در زمینه‌های ریاضی محض، ریاضی کاربردی، آمار و احتمال، علوم کامپیوتر، آموزش ریاضی، تاریخ و فلسفه ریاضی، کاربردهای ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر در سایر علوم، و نقدهای علمی را برای بررسی می‌پذیرد. همچنین ترجمه مقالاتی در موضوعات گفته شده نیز با شرایط خاص مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مقالات باید به گونه‌ای نوشته شوند که قابل فهم برای افرادی با اطلاعات پایه‌ای ریاضی در سطح کارشناسی یا دانشجویان تحصیلات تکمیلی باشند.

ارسال مقاله به این مجله به این معنی است که کلیه نویسندگان مقاله از این ارسال آگاه بوده، اصالت محتوای علمی آن را تأیید و با ارسال آن به مجله‌ی به سوی علوم ریاضی موافق بوده‌اند و به علاوه متعهد هستند که مقاله ارسالی به این مجله به طور همزمان در مراحل بررسی و یا چاپ در هیچ نشریه دیگری نیست. با ارسال مقاله به این مجله، همه نویسندگان متعهد می‌شوند که حقوق مالکیت فکری و اخلاق پژوهشی را رعایت نموده‌اند و کلیه حقوق استفاده از محتوا، جداول، تصاویر و ... را به ناشر واگذار کرده‌اند.

ارسال مقاله تنها از طریق لینک <https://tmsj.um.ac.ir> و به صورت الکترونیک امکان‌پذیر است. همچنین راهنمای نویسندگان و [فایل فشرده فرمت مجله](#) در این لینک قابل مشاهده است.

فهرست مطالب

چهار مرکز اصلی مثلث و مکان‌های هندسی.....۱

س. صالحی پور مهر

درباره چند جمله‌ای‌های متقارن دومتغیره و کاربرد آنها.....۱۰

ز. سعیدیان و ر. کهکشانی

از تصمیم‌سازی تا طرحواره‌سازی: تلفیق ساخت و ساز گرایی، تصمیم‌سازی و طرحواره‌های ذهنی در آموزش ریاضی
برای ارتقای تدریس و یادگیری ریاضی.....۲۴

ع. محمدی

تحلیل چالش‌های ساختاری آموزش ریاضی متوسطه در ایران با رویکرد سطوح سلسله‌مراتبی هم‌تعیینی تعلیم و
تربیت.....۳۸

ف. رضوانی فرد

ریاضیات - یک «علم شبه طبیعی» در آموزش مدرسه‌ای.....۵۸

م. افشاری و ح.ر. کاشفی

سازوکار مقاومت در برابر یادگیری؛ بازخوانی موانع معرفتی در ریاضیات پیشرفته.....۶۸

م. سبزی، م. نامداری و م.ع. سیاوشی



FOUR BASIC TRIANGLE CENTERS AND LOCI

SALEHI, SAEED¹

¹ University of Tabriz, Tabriz, Iran.
root@SaeedSalehi.ir

Abstract. Although various and interesting proofs have been presented for the concurrency of altitudes and medians of a triangle, in this paper we prove these two theorems by using the concept of geometric loci, by first showing that each altitude and each median of a triangle is a locus of some interesting points in the plane or inside the triangle, and then by using this, we give a proof of the concurrence of the three altitudes and the three medians. In the same way, we present proofs for the theorems of Carnot and Ceva.

2020 Mathematics Subject Classification. 51M04

Keywords. Concurrency, Locus, Altitude, Median, Carnot's and Ceva's Theorems.

Date: Received 01-07-2024 Revised 01-09-2024 Accepted 16-09-2024 Available Online 20-12-2025

©Ferdowsi University of Mashhad.



چهار مرکز اصلی مثلث و مکان‌های هندسی

سعید صالحی پور مهر

دانشگاه تبریز

root@SaeedSalehi.ir

چکیده. با اینکه اثبات‌های گوناگون و جالبی برای قضایای هم‌مرسی ارتفاع‌ها و میانه‌های مثلث وجود دارند، ولی به نظر نمی‌رسد که برهان‌هایی مبتنی بر مکان‌های هندسی برای این قضایا قبلاً ارائه شده باشند. در این مقاله، ما این دو قضیه را با استفاده از مکان‌های هندسی ثابت می‌کنیم بدین صورت که نخست نشان می‌دهیم هر ارتفاع و هر میانه مثلث یک مکان هندسی از نقاطی جالب در صفحه یا درون مثلث هست و سپس با استفاده از این مطلب، برهانی بر هم‌مرسی سه ارتفاع و سه میانه می‌آوریم. با همین روش، برهان‌هایی برای قضیه‌های کارنو و سوا ارائه می‌دهیم.

۱. پیش‌گفتار

سه خط را هم‌مرس نامیم، هرگاه در یک نقطه به هم برسند؛ نقطه اشتراک این سه خط را نقطه هم‌مرسی آنها می‌نامیم. (واژه‌ی «هم‌مرس» حاکی از این است که خط‌ها به هم‌دیگر می‌رسند؛ گاهی این را به اشتباه «هم‌رأس» می‌گویند.) از زیباترین و اعجاب‌انگیزترین قضایای هندسه، هم‌مرس بودن برخی خطوط خاص مثلث هستند — همانند نیم‌سازهای داخلی زوایا، عمودمنصف‌های اضلاع، ارتفاع‌ها و میانه‌ها. قضایای هم‌مرسی هر یک از این چهار دسته از خطوط، در صفحات ۵۶ الی ۵۹ کتاب هندسه سال اول دبیرستان نظام قدیم

2020 Mathematics Subject Classification. 51M04

واژگان کلیدی. هم‌مرسی، مکان هندسی، ارتفاع، میانه، قضیه کارنو، قضیه سوا.
تاریخ: دریافت ۱۴۰۳/۰۴/۱۱ بازنگری ۱۴۰۳/۰۶/۱۱ پذیرش ۱۴۰۳/۰۶/۲۶ انتشار برخط ۱۴۰۴/۰۹/۲۹
نحوه ارجاع به این مقاله: س. صالحی پور مهر، چهار مرکز اصلی مثلث و مکان‌های هندسی، به سوی علوم ریاضی، ۵ (۱۴۰۴)، شماره ۱، ۹-۱.

©دانشگاه فردوسی مشهد.

این مقاله، نسخه‌ای است ویژه‌ی خوانندگان ایرانی که بر مبنای یک مقاله‌ی انگلیسی نویسنده [6] تهیه شده است. همانند مقاله اصلی، این نوشته تقدیم می‌گردد به مرحوم آقای بهروز مشکین‌قلم (خرداد۱۳۲۳ — بهمن۱۳۹۱) دبیر ریاضی دبیرستان‌های تبریز.

دهه شصت خورشیدی اثبات شده بودند. در حقیقت، هم‌رس بودن نیمسازهای داخلی هر مثلث در قضیه ۴ مقاله ۴ کتاب اصول/قلیدس (صفحه ۸۸ مرجع [۲]) و هم‌رس بودن عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث در قضیه ۵ مقاله ۴ همان کتاب (صفحه ۸۹ مرجع [۲]) آمده بودند. با اینکه دو قضیه دیگر – هم‌رسی ارتفاع‌ها و میانه‌ها – در کتاب اصول/قلیدس پدیدار نگشته‌اند، گویا یونانیان باستان، از جمله ارشمیدس، از این قضایا آگاه بوده‌اند.

دو قضیه نخست معمولاً توسط مکان‌های هندسی ثابت می‌شوند: هر نیمساز داخلی، مکان هندسی همه نقاط داخل مثلث هست که از دو ضلع آن زاویه فاصله برابر دارند؛ و عمودمنصف هر ضلع، مکان هندسی نقاطی از صفحه هست که از دو رأس آن ضلع فاصله برابر دارند. پس، نقطه هم‌رسی نیمسازهای داخلی مثلث تنها نقطه‌ای در درون مثلث است که فاصله‌های برابر از سه ضلع دارد و مرکز دایره محاطی داخلی، یا به اختصار مرکز داخلی (*incenter*)، آن مثلث نام دارد. همچنین، نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث، یگانه نقطه در صفحه است که از سه رأس مثلث به یک فاصله می‌باشد؛ این نقطه مرکز دایره محیطی، یا به طور مختصر مرکز محیطی (*circumcenter*)، آن مثلث نامیده می‌شود.

با اینکه اثبات‌های گوناگون و جالبی برای قضایای هم‌رسی ارتفاع‌ها و میانه‌های مثلث وجود دارند، ولی به نظر می‌رسد که تاکنون هیچ اثباتی برای این قضایا با استفاده از مکان‌های هندسی ارائه نشده‌اند.^۱ در این مقاله، ما این دو قضیه را با استفاده از مکان‌های هندسی ثابت می‌کنیم بدین صورت که نخست نشان می‌دهیم هر ارتفاع و هر میانه مثلث یک مکان هندسی از نقاطی جالب در صفحه یا درون مثلث هست، و سپس با استفاده از این مطلب، برهانی بر هم‌رسی سه ارتفاع و سه میانه می‌آوریم.

۲. ارتفاع‌ها و قضیه کارنو

برای دو نقطه متمایز P و Q در صفحه، پاره‌خط بین این دو نقطه را با نماد $\overline{PQ}$ ، طول این پاره‌خط را با عبارت $|PQ|$ ، و خط (از دو طرف بی‌نهایت) شامل این دو نقطه را با $\overleftrightarrow{PQ}$ نمایش می‌دهیم.

لم ۱۰۲ (تفاضل مربعات فواصل نقاط یکتاست). اگر دو نقطه P و Q روی $\overleftrightarrow{BC}$ چنان واقع باشند که تفاضل مربعات فواصل آنها از B و C برابر باشند، یعنی $|BQ|^2 - |CQ|^2 = |BP|^2 - |CP|^2$ ، آنگاه $P = Q$.

برهان. طبق فرض، B و C متمایزند و داریم

$$|BP|^2 - |CP|^2 = |BQ|^2 - |CQ|^2. \quad (۱۰۲)$$

چندین حالت را بسته به موقعیت‌های P و Q نسبت به B و C در نظر می‌گیریم:

(الف) هر دو نقطه P و Q در خارج پاره‌خط $\overline{BC}$ و در یک طرف آن روی $\overleftrightarrow{BC}$ قرار داشته باشند، مثلاً نقطه C درون پاره‌خط‌های $\overline{BP}$ و $\overline{BQ}$ باشد. از تساوی‌های $|BP| = |BC| + |CP|$ و $|BQ| = |BC| + |CQ|$ داریم $|BQ| - |CQ| = |BP| - |CP|$ و با بکار بردن اتحاد مزدوج در تساوی (۱۰۲) به دست می‌آوریم:

^۱شاهدی بر این ادعا می‌تواند مقاله جالب [4] باشد که دوازده برهان برای هم‌رسی ارتفاع‌های یک مثلث را فهرست کرده در حالیکه هیچ کدام، از مکان‌های هندسی بهره نبرده‌اند. شایان توجه است که برهان نخست آن مقاله از گاوس، برهان دوم از نیوتن، و برهان سوم از ابوسهیل کوهی دانشمند ایرانی سده چهارم هجری است. در مورد هم‌رسی میانه‌های یک مثلث نیز وضع به همین منوال است، مثلاً مقاله [5] یک برهان جدید برای این قضیه ارائه می‌کند بدون استفاده از مکان‌های هندسی. طبق نظر داور محترم، جای تأمل است که چرا برهان‌های نتیجه‌های ۳.۲ و ۳.۳ قبلاً جایی منتشر نشده‌اند و می‌توانند جدید محسوب شوند در حالیکه قضایای ۲.۲ و ۲.۳ از دیرباز شناخته شده هستند. قابل ذکر است برهان‌های گزاره‌های ۵.۲ و ۵.۳ (قضایای کارنو و سوا) که از مفهوم مکان هندسی سود می‌جویند تفاوت زیادی با اثبات‌های کلاسیک ندارند.

$|BP| + |CP| = |BQ| + |CQ|$. اگر طرفین دو تساوی فوق را یکبار جمع و یکبار تفریق کنیم، نتیجه می‌گیریم

که $|BP| = |BQ|$ و $|CP| = |CQ|$. بنابراین، $P = Q$.

(ب) یکی از نقاط P و Q خارج از $\overline{BC}$ و دیگری در درون آن قرار داشته باشد، مثلاً C درون $\overline{BP}$ باشد و Q درون $\overline{BC}$.

داریم $|BP| = |CP| + |BC|$ و $|BQ| = |BC| - |CQ|$ ، پس مقدار $|BP|^2 - |CP|^2$ بزرگتر از $|BC|^2$

است، ولی مقدار $|BQ|^2 - |CQ|^2$ کوچکتر از $|BC|^2$ است؛ در نتیجه با هم برابر نیستند. بنابراین، در این حالت،

تساوی (۱.۲) امکان ندارد.

(ج) هر دو نقطه P و Q درون پاره‌خط $\overline{BC}$ باشند. از $|BP| + |CP| = |BQ| + |CQ| (= |BC|)$ و یکبار بردن

اتحاد مزدوج در (۱.۲)، به دست می‌آوریم $|BP| - |CP| = |BQ| - |CQ|$. مشابه حالت (الف) با جمع و تفریق

طرفین دو تساوی اخیر نتیجه می‌گیریم که $|BP| = |BQ|$ و $|CP| = |CQ|$. پس داریم $P = Q$.

(د) هر دو نقطه P و Q در خارج از پاره‌خط $\overline{BC}$ و دو طرف آن، در جهات مختلف، قرار داشته باشند، مثلاً B درون

$\overline{CP}$ باشد و C درون $\overline{BQ}$. در این صورت، چون $|BP| < |CP|$ ، مقدار $|BP|^2 - |CP|^2$ منفی است، و چون

$|BQ| > |CQ|$ ، مقدار $|BQ|^2 - |CQ|^2$ مثبت است. بنابراین، (۱.۲) ناممکن است.

□

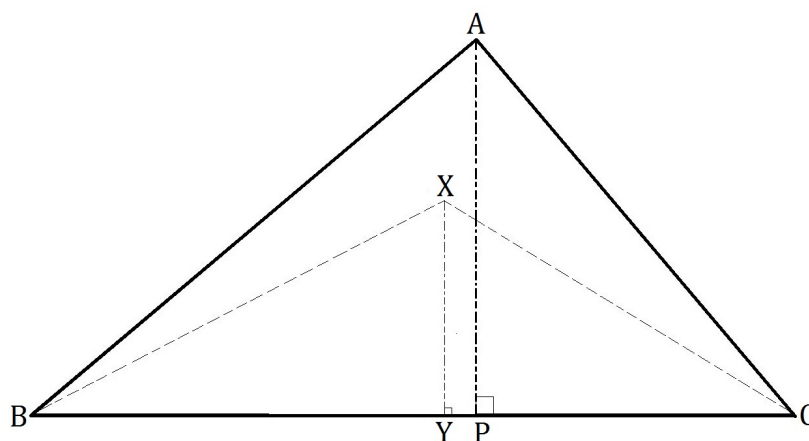
قضیه زیر تاریخی کهن دارد (برای مثال، مکان هندسی ۱۲ در صفحات ۱۹ و ۲۰ مرجع [۱] را ببینید).

قضیه ۲.۲ (هر ارتفاع، یک مکان هندسی است). در مثلث ABC ، هرگاه $\overline{AP}$ ارتفاع وارده از A باشد، آنگاه $\overleftrightarrow{AP}$ مکان هندسی

همه نقاط X در صفحه است که تفاضل مربعات فواصل نقطه X از رئوس B و C برابر مقدار ثابت تفاضل مربعات فواصل نقطه

A از B و C باشد؛ یعنی

$$|XB|^2 - |XC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2.$$



شکل ۱: هر ارتفاع، یک مکان هندسی است

برهان. طبق قضیه فیثاغورس، در دو مثلث قائم ABP و APC شکل ۱ تساوی‌های زیر برقرارند:

$$|AB|^2 = |BP|^2 + |AP|^2 \text{ و } |AC|^2 = |PC|^2 + |AP|^2$$

با تفاضل طرفین این دو تساوی به دست می‌آوریم:

$$|AB|^2 - |AC|^2 = |BP|^2 - |PC|^2. \quad (۲.۲)$$

(الف) اگر نقطه X روی $\overleftrightarrow{AP}$ قرار داشته باشد، آنگاه مشابهاً، $|XB|^2 - |XC|^2 = |BP|^2 - |PC|^2$ برقرار است. بنابراین، از دو تساوی اخیر به حکم مطلوب می‌رسیم:

$$|XB|^2 - |XC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2 \quad (۳.۲)$$

(ب) حال فرض کنید، برعکس، تساوی بالا (۳.۲) برای یک نقطه از X در صفحه مثلث ABC برقرار باشد. از نقطه X عمودی بر $\overleftrightarrow{BC}$ رسم می‌کنیم تا آنرا در Y قطع کند. بنابر آنچه که در ابتدای برهان گفته شد، خواهیم داشت:

$$|XB|^2 - |XC|^2 = |BY|^2 - |YC|^2 \quad (۴.۲)$$

بالاخره از تساوی‌های (۲.۲) و (۳.۲) و (۴.۲) به دست می‌آوریم:

$$|BY|^2 - |YC|^2 = |BP|^2 - |PC|^2.$$

حال، از لم ۱.۲ نتیجه می‌شود که $Y = P$. بنابراین نقطه X روی $\overleftrightarrow{AP}$ قرار دارد.

□

نتیجه ۳.۲ (همرسی ارتفاع‌ها). سه ارتفاع هر مثلث هم‌مرس هستند.

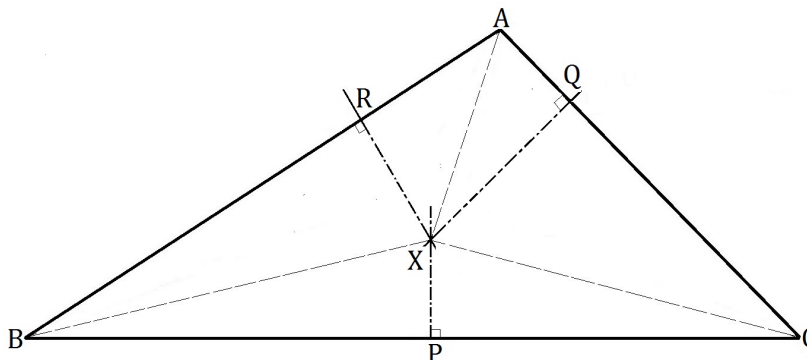
برهان. اگر $\mathbb{H}$ محل تلاقی ارتفاع‌های وارده از رئوس B و C باشد (چون معلوم خواهد شد که این نقطه مهمی است آنرا با قلمی متفاوت نمایش دادیم)، آنگاه طبق قضیه ۲.۲، چون $\mathbb{H}$ روی ارتفاع وارده از B قرار دارد، تساوی زیر برقرار است: $|\mathbb{H}A|^2 - |\mathbb{H}B|^2 = |\mathbb{H}C|^2 - |\mathbb{H}A|^2$ و چون $\mathbb{H}$ بر روی ارتفاع وارده از رأس C هم قرار دارد، مشابهاً داریم $|\mathbb{H}B|^2 - |\mathbb{H}C|^2 = |AB|^2 - |AC|^2$ از جمع دو تساوی بالا، $|\mathbb{H}B|^2 - |\mathbb{H}C|^2 = |AB|^2 - |AC|^2$ نتیجه می‌شود. بنابراین، باز هم طبق قضیه ۲.۲، $\mathbb{H}$ روی ارتفاع وارده از رأس A قرار دارد. پس سه ارتفاع مثلث در نقطه $\mathbb{H}$ هم‌مرس هستند. □

نقطه هم‌رسی سه ارتفاع مثلث را معمولاً مرکز تعامد یا مرکز ارتفاعی (*orthocenter*) آن مثلث می‌نامند. پیش از اثبات هم‌رسی میانه‌های مثلث، قضیه کارنو را، که به افتخار لازار کارنو (۱۸۲۳–۱۷۵۳ م) ریاضیدان فرانسوی نام‌گذاری شده، بیان و آنرا هم با استفاده از مکان‌های هندسی ثابت می‌کنیم (قضیه ۳ بخش ۲ در صفحات ۳۷ و ۱۲۹ مرجع [۲]).

لم ۴.۲ (هر خط عمود، یک مکان هندسی است). اگر P نقطه‌ای روی خط $\overleftrightarrow{BC}$ باشد، آنگاه خط عمود بر $\overleftrightarrow{BC}$ از نقطه P ، مکان هندسی نقاط X از صفحه است که $|XB|^2 - |XC|^2 = |BP|^2 - |CP|^2$.

برهان. در قضیه ۲.۲ ثابت کردیم که تساوی زیر برای هر نقطه X روی خط عمود بر $\overleftrightarrow{BC}$ که از P بگذرد برقرار است: $|XB|^2 - |XC|^2 = |BP|^2 - |CP|^2$. حال، برعکس، اگر تساوی بالا برای یک نقطه X در صفحه برقرار باشد، از X عمودی بر $\overleftrightarrow{BC}$ رسم می‌کنیم تا آنرا در Y قطع کند. داریم $|XB|^2 - |XC|^2 = |BY|^2 - |CY|^2$. در نتیجه، $|BY|^2 - |CY|^2 = |BP|^2 - |CP|^2$. از لم ۱.۲ نتیجه می‌گیریم که $Y = P$. بنابراین، X روی خطی است که از P می‌گذرد و بر $\overleftrightarrow{BC}$ عمود است. □

گزاره ۵.۲ (قضیه کارنو). در صفحه مثلث ABC ، نقاط P ، Q و R را به ترتیب روی $\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ در نظر می‌گیریم. خطوط عمود از این نقاط بر روی اضلاع متناظر هم‌رس هستند اگر و تنها اگر

$$(|AQ|^2 - |QC|^2) + (|CP|^2 - |PB|^2) + (|BR|^2 - |RA|^2) = 0.$$


شکل ۲: قضیه کارنو

برهان. اگر X محل تلاقی عمودهای وارد بر $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ از نقاط R و Q باشد (شکل ۲ را ببینید)، آنگاه طبق لم ۴.۲ داریم: $|XA|^2 - |XC|^2 = |QA|^2 - |QC|^2$ و $|XB|^2 - |XA|^2 = |RB|^2 - |RA|^2$. با جمع این دو تساوی به دست می‌آوریم: $|XB|^2 - |XC|^2 = (|AQ|^2 - |QC|^2) + (|BR|^2 - |RA|^2)$. حال، بنا بر لم ۴.۲، نقطه X روی خط عمود بر $\overrightarrow{BC}$ رسم شده از نقطه P قرار دارد اگر و تنها اگر

$$|XB|^2 - |XC|^2 = |PB|^2 - |PC|^2 \text{ اگر و تنها اگر}$$

$$|BP|^2 - |PC|^2 = (|AQ|^2 - |QC|^2) + (|BR|^2 - |RA|^2)$$

$$(|AQ|^2 - |QC|^2) + (|CP|^2 - |PB|^2) + (|BR|^2 - |RA|^2) = 0$$

□

یعنی، سه عمود هم‌رس هستند اگر و تنها اگر تساوی بالا برقرار باشد.

۳. میانه‌ها و قضیه سوا

در ادامه، به هم‌رسی میانه‌ها و نیز اثبات قضیه سوا توسط مکان‌های هندسی می‌پردازیم. مساحت مثلث PQR را با نماد S_{PQR} نمایش می‌دهیم.

لم ۱.۳ (نسبت مساحت‌های مثلث‌ها). اگر نقطه P روی ضلع $\overrightarrow{BC}$ در مثلث ABC و X نقطه‌ای روی پاره‌خط $\overrightarrow{AP}$ باشد، آنگاه

$$\frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} = \frac{|BP|}{|PC|}$$

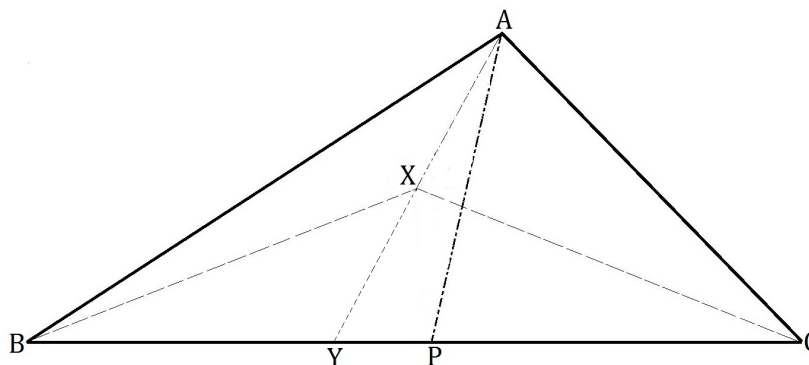
برهان. از آنجا که دو مثلث ABP و APC دارای رأس مشترک و قاعده‌های هم‌خط هستند، رابطه $\frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{|BP|}{|PC|}$ برقرار است؛ مشابهاً داریم $\frac{S_{XBP}}{S_{XPC}} = \frac{|BP|}{|PC|}$. حال، از قانون تفاضل صورت‌ها بر تفاضل مخرجها (قضیه ۱۹ مقاله ۵ کتاب اصول اقلیدس در

□

$$\frac{|BP|}{|PC|} = \frac{S_{ABP} - S_{XBP}}{S_{APC} - S_{XPC}} = \frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} \text{ داریم [۳] را ببینید}$$

قضیه زیر از دوران باستان شناخته شده است (تمرین‌های ۶۸ و ۶۹ صفحه ۳۵ مرجع [۱] را ببینید).

قضیه ۲.۳ (هر میانه، یک مکان هندسی است). میانه $\overline{AM}$ در مثلث ABC ، مکان هندسی نقاط X داخل این مثلث است که مثلث‌های XAB و XAC مساحت‌های برابر دارند، یعنی $S_{AXB} = S_{AXC}$ (شکل ۳ را ببینید، با فرض $P = M$).



شکل ۳: هر میانه، یک مکان هندسی است

برهان. (الف) اگر X روی میانه $\overline{AM}$ باشد، طبق لم ۱.۳ داریم: $\frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} = \frac{|BM|}{|MC|}$ ، پس $S_{AXB} = S_{AXC}$.
 (ب) برعکس، اگر برای نقطه X درون مثلث، رابطه بالا برقرار باشد، یعنی $S_{AXB} = S_{AXC}$ ، خط $\overrightarrow{AX}$ را امتداد می‌دهیم تا ضلع $\overline{BC}$ را در Y قطع کند (شکل ۳). دوباره از لم ۱.۳ خواهیم داشت: $\frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} = \frac{|BY|}{|YC|}$ ، پس $|BY| = |YC|$ ، بنابراین $Y = M$. در نتیجه، X روی میانه $\overline{AM}$ است.

□

نتیجه ۳.۳ (همرسی میانه‌ها). سه میانه هر مثلث هم‌رس هستند.

برهان. اگر میانه‌های رسم شده از B و C یکدیگر را در نقطه G قطع کنند، آنگاه طبق قضیه ۲.۳، چون G روی میانه رسم شده از B هست، داریم $S_{BGA} = S_{BGC}$ و چون روی میانه رسم شده از C هم هست، پس $S_{CGA} = S_{CGB}$. بنابراین، $S_{AGB} = S_{AGC}$ و باز هم از قضیه ۲.۳ نتیجه می‌شود که G روی میانه رسم شده از A نیز قرار دارد. پس، سه میانه در نقطه G هم‌رس هستند.

□

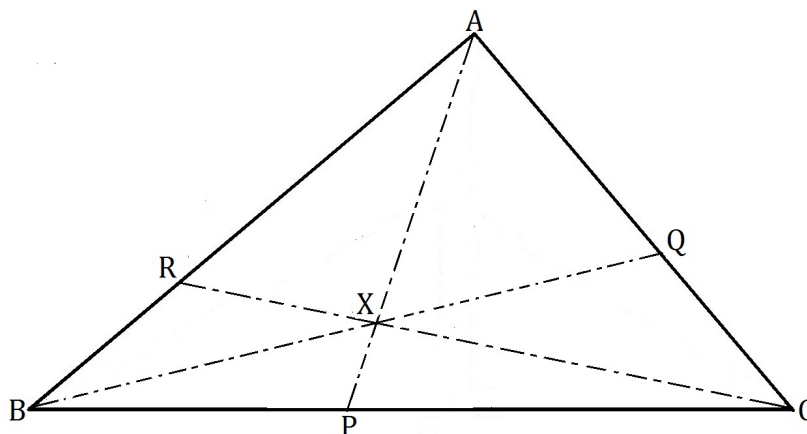
نقطه هم‌رسی سه میانه یک مثلث (به دلیلی که با کمی تأمل در مورد جسم فیزیکی همگنی که شکل مثلث دارد، معلوم می‌شود) به مرکز ثقل هندسی یا به طور مختصر مرکز ثقل (*centroid*) آن مثلث معروف است. حالا، قضیه سوا را، که به افتخار جیووانی سوا (۱۷۳۴–۱۶۴۷م) ریاضیدان ایتالیایی نام‌گذاری شده، بیان و آنرا با استفاده از مکان‌های هندسی ثابت می‌کنیم (مسأله ۴۴ بخش ۲ در صفحات ۴۳ و ۱۳۶ مرجع [۲] را ببینید). منظور از پاره‌خط سوا، هر پاره‌خطی است که یک رأس مثلث را به یک نقطه درون ضلع مقابل آن وصل می‌کند (مانند میانه یا نیمساز داخلی).

لم ۴.۳ (هر پاره‌خط سوا، یک مکان هندسی است). در مثلث ABC ، اگر P نقطه‌ای روی ضلع $\overline{BC}$ باشد، آنگاه پاره‌خط سوا $\overline{AP}$ مکان هندسی نقاط X درون مثلث است که $\frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} = \frac{|BP|}{|PC|}$.

برهان. نیمی از این مطلب در لم ۱.۳ ثابت شده است: اگر X روی $\overline{AP}$ قرار داشته باشد، آنگاه $\frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} = \frac{|BP|}{|PC|}$. برعکس، نشان می‌دهیم که اگر رابطه $\frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} = \frac{|BP|}{|PC|}$ برای نقطه X درون مثلث ABC برقرار باشد، آنگاه نقطه X روی $\overline{AP}$ قرار دارد (شکل بالا).

را ببینید). خط $\overrightarrow{AX}$ را امتداد دهید تا $\overline{BC}$ را در Y قطع کند. از لم ۱.۳ داریم $\frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} = \frac{|BY|}{|YC|}$ ، در نتیجه $\frac{|BP|}{|PC|} = \frac{|BY|}{|YC|}$. حال، از این رابطه و تساوی $|BP| + |PC| = |BY| + |YC| (= |BC|)$ نتیجه می‌شود که $|BP| = |BY|$ و $|PC| = |YC|$ ، $|BP| = |BY|$ ، پس داریم $P = Y$. بنابراین، X روی $\overline{AP}$ قرار دارد. $\square$

گزاره ۵.۳ (قضیه سوا). در مثلث ABC ، سه پاره‌خط سوايي $\overline{AP}$ و $\overline{BQ}$ و $\overline{CR}$ هم‌رس هستند اگر و تنها اگر $\frac{|AQ|}{|QC|} \cdot \frac{|CP|}{|PB|} \cdot \frac{|BR|}{|RA|} = 1$.



شکل ۴: قضیه سوا

برهان. فرض کنید $\overline{BQ}$ و $\overline{CR}$ همدیگر را در X قطع می‌کنند (شکل ۴). با دو بار استفاده از لم ۱.۳، داریم $\frac{S_{BXA}}{S_{BXC}} = \frac{|AQ|}{|QC|}$ و $\frac{S_{CXB}}{S_{CXA}} = \frac{|BR|}{|RA|}$. با ضرب طرفین این دو تساوی به دست می‌آوریم: $\frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} = \frac{|AQ|}{|QC|} \cdot \frac{|BR|}{|RA|}$. حال، بنا بر لم ۲.۳، نقطه X روی $\overline{AP}$ قرار دارد اگر و تنها اگر $\frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} = \frac{|BP|}{|PC|}$ ، اگر و تنها اگر $\frac{|AQ|}{|QC|} \cdot \frac{|BR|}{|RA|} = \frac{|BP|}{|PC|}$. در نتیجه، $\overline{AP}$ ، $\overline{BQ}$ و $\overline{CR}$ هم‌رسند اگر و تنها اگر $\frac{|AQ|}{|QC|} \cdot \frac{|CP|}{|PB|} \cdot \frac{|BR|}{|RA|} = 1$. $\square$

۴. جمع‌بندی

در پایان، تلاشی مختصر برای یک جمع‌بندی از چهار مرکز اصلی مثلث توسط مکان‌های هندسی را خواهیم داشت. عبارت «چهار مرکز اصلی مثلث» در عنوان این مقاله، به تبعیت از چهار عمل اصلی در ریاضیات (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) و چهار نیروی اصلی در فیزیک (گرانش، الکترومغناطیس، اتمی ضعیف و اتمی قوی) آورده شده، و اصطلاحی استاندارد در متون علمی نیست. برای یکسان‌سازی مکان‌های هندسی، توابعی به صورت $\varphi(\overline{PQ}, X)$ را بررسی می‌کنیم که مقداری را برای نقطه X نسبت به پاره‌خط $\overline{PQ}$ یا خط $\overrightarrow{PQ}$ (با فرض $P \neq Q$) معین می‌کنند.

(۱) اولین تابع به صورت $d(\overline{PQ}, X)$ می‌باشد که برابر است با فاصله نقطه X از خط $\overrightarrow{PQ}$. نقطه X درون مثلث ABC ، روی نیمساز داخلی زاویه $\angle A$ قرار دارد اگر و تنها اگر $d(\overline{AB}, X) = d(\overline{AC}, X)$. پس، مرکز داخلی مثلث ABC ، تنها نقطه I درون آن است که $d(\overline{AB}, I) = d(\overline{BC}, I) = d(\overline{CA}, I)$.

از $\frac{|BP|}{|PC|} = \frac{|BY|}{|YC|}$ داریم $\frac{|BP|}{|PC|} + 1 = \frac{|BY|}{|YC|} + 1$ ، پس $\frac{|BC|}{|PC|} = \frac{|BC|}{|YC|}$ ، بنابراین $|PC| = |YC|$. از اینجا هم نتیجه می‌گیریم که $|BC| - |PC| = |BC| - |YC|$ ، بنابراین $|BP| = |BY|$.

(۲) دومین تابع را به این صورت در نظر می‌گیریم: $f(\overline{PQ}, X) = |PX|^2 + |QX|^2$. نقطه X در صفحه، روی عمودمنصف ضلع $\overline{BC}$ قرار دارد اگر و تنها اگر $f(\overline{AB}, X) = f(\overline{AC}, X)$ ، که معادل است با تساوی $|BX| = |CX|$. پس، مرکز محیطی مثلث ABC ، یگانه نقطه $\mathbb{O}$ در صفحه است که برای آن داریم: $f(\overline{AB}, \mathbb{O}) = f(\overline{BC}, \mathbb{O}) = f(\overline{CA}, \mathbb{O})$.

(۳) سومین تابع: $h(\overline{PQ}, X) = |PX|^2 + |QX|^2 - |PQ|^2$. توجه می‌کنیم که تساوی زیر برقرار است: $h(\overline{PQ}, X) = f(\overline{PQ}, X) - |PQ|^2$. نقطه X در صفحه مثلث ABC ، روی خط ارتفاع وارده از رأس A قرار دارد اگر و تنها اگر داشته باشیم $h(\overline{AB}, X) = h(\overline{AC}, X)$. توجه داریم که این تساوی، معادل رابطه زیر است (رجوع کنید به قضیه ۲.۲): $|BX|^2 - |CX|^2 = |AB|^2 - |AC|^2$. پس مرکز ارتفاعی مثلث ABC ، تنها نقطه $\mathbb{H}$ در صفحه است که $h(\overline{AB}, \mathbb{H}) = h(\overline{BC}, \mathbb{H}) = h(\overline{CA}, \mathbb{H})$.

(۴) چهارمین تابع برابر است با $g(\overline{PQ}, X) = S_{PQX}$ ، یعنی مساحت مثلث PQX . توجه داریم که تساوی $g(\overline{PQ}, X) = d(\overline{PQ}, X) \cdot \frac{1}{2} |PQ|$ برقرار است. نقطه X درون مثلث ABC ، بر روی میانه وارده از رأس A قرار دارد اگر و تنها اگر $g(\overline{AB}, X) = g(\overline{AC}, X)$. پس، مرکز ثقل مثلث ABC ، تنها نقطه $\mathbb{G}$ درون آن است که $g(\overline{AB}, \mathbb{G}) = g(\overline{BC}, \mathbb{G}) = g(\overline{CA}, \mathbb{G})$.

تشکر و قدردانی. مراتب سپاس‌گزاری عمیق خود را به جناب آقای دکتر کاوه لاجوردی به خاطر ویرایش متن و توصیه‌های بسیار مؤثرشان در بهبود این مقاله تقدیم می‌نمایم.

مراجع

۱. آلتشیلر-کورت، ناتان، هندسه مسطحه: مقدمه‌ای بر هندسه نوین مثلث و دایره، ترجمه محمود دیانی، انتشارات فاطمی، ۱۳۷۶.
۲. شاریگین، ایگور فنودوروویچ، مسأله‌هایی در هندسه مسطحه، ترجمه ارشک حمیدی، انتشارات مبتکران، ۱۳۷۵.
۳. هیث، تامس لیتل، اصول اقلیدس: سیزده مقاله، ترجمه محمدهادی شفیعیها، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۷.
4. H. Mowaffaq and H. Martini, *Concurrency of the Altitudes of a triangle*, Math. Semesterber. **60** (2013) no. 2, 249–260.
5. H., Mowaffaq and P. Walker, *Why Must the Triangle's Medians Be Concurrent?*, Math. Gaz. **85** (2001) no. 504, 482–483.
6. S., Salehi, *Proving concurrency by loci*, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. **56** (2025) no. 4, 800–808.



ON THE BIVARIATE SYMMETRIC POLYNOMIALS AND THEIR APPLICATION

ZEINAB SAEIDIAN^{1*} AND REZA KAHKESHANI ²

^{1,2}Department of Mathematics, University of Kashan, Kashan, Iran.

saeidian@kashanu.ac.ir

kahkeshanireza@kashanu.ac.ir

Abstract. In this paper, we first introduce and investigate the symmetric polynomials and then, the features and underlying theorems are expressed.

In addition, we discuss applications of these polynomials in solving equations, systems of equations, inequalities, inverse equations, and divisibility.

The main objective of this research is to explain the prominent role of bivariate symmetric polynomials in different fields and provide practical examples to understand these issues better.

2020 Mathematics Subject Classification. 47A55, 39B52, 34K20, 39B82

Keywords. Symmetric polynomial, System of equations, Inverse equation, Divisibility

Date: Received 26-05-2025 Revised 07-11-2025 Accepted 23-11-2025 Available Online 20-12-2025

©Ferdowsi University of Mashhad.



درباره چندجمله‌ای‌های متقارن دومتغیره و کاربرد آنها

رضا کهکشانی^۱ و زینب سعیدیان^{۲*}

^{۱,۲} دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان

kahkeshanireza@kashanu.ac.ir

saeidian@kashanu.ac.ir

چکیده. در این مقاله، ابتدا به معرفی و بررسی چندجمله‌ای‌های متقارن دومتغیره پرداخته و سپس، ویژگی‌ها و قضیه بنیادین مربوطه بیان می‌شوند. علاوه بر این، کاربردهایی از این چندجمله‌ای‌ها را در حل معادلات، دستگاه‌های معادلات، نامساوی‌ها، معادلات معکوسه و بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها مورد بحث قرار می‌دهیم. هدف اصلی این پژوهش، تبیین نقش برجسته چندجمله‌ای‌های متقارن دومتغیره در زمینه‌های مختلف و ارائه مثال‌هایی کاربردی برای درک بهتر این مفاهیم است.

2010 Mathematics Subject Classification. 47A55, 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. چندجمله‌ای متقارن، دستگاه معادلات، معادله معکوسه، بخش‌پذیری.
تاریخ: دریافت ۱۴۰۴/۰۳/۰۵ بازنگری ۱۴۰۴/۰۸/۱۶ پذیرش ۱۴۰۴/۰۹/۰۲ انتشار برخط ۱۴۰۴/۰۹/۲۹
نحوه ارجاع به این مقاله: ر. کهکشانی و ز. سعیدیان، درباره چندجمله‌ای‌های متقارن دومتغیره و کاربرد آنها، به سوی علوم ریاضی، ۵ (۱۴۰۴)، شماره ۱، ۲۳-۱۰.

©دانشگاه فردوسی مشهد.

* نویسنده مسئول

۱. مقدمه

با استفاده از مفهوم تقارن در چندجمله‌ای‌ها می‌توان به حل بسیاری از مسائل مرتبط با جبر مقدماتی مانند دستگاه‌های معادلات، معادلات گنگ و نامساوی‌ها نائل گشت. در ابتدا، صورت کلی دستگاه معادلات خطی شامل n معادله و n مجهول، یعنی دستگاه

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (1.1)$$

را در نظر می‌گیریم. در اینجا، $x_1, x_2, \dots, x_n$ مجهولات، $a_1, a_2, \dots, a_n$ ضرایب و $b_1, b_2, \dots, b_n$ جملات ثابت هستند. منظور از جواب برای چنین دستگاهی اختصاص مقادیری به متغیرها است به طوری که تمامی معادلات دستگاه به ازای آنها برقرار باشند. در این صورت، سه حالت رخ می‌دهد: (الف) دستگاه دارای بی‌نهایت جواب است، (ب) دستگاه دارای جواب یکتا است، (ج) دستگاه فاقد جواب است [۲]. مجموعه همه جواب‌های ممکن برای این دستگاه را مجموعه جواب آن می‌نامند.

ساده‌ترین روش برای حل دستگاه (۱.۱) حذف متوالی متغیرها است. در این روش، ابتدا متغیری مانند x_n را از یک معادله، مثلاً معادله نخست، به دست آورده و در دیگر معادلات قرار می‌دهیم. بدین طریق به یک دستگاه معادلات خطی با $n-1$ معادله و $n-1$ مجهول می‌رسیم. با تکرار این فرایند می‌توان به یک معادله خطی تک-متغیره دست یافت که با حل آن x_1 و سپس، با جایگزینی‌های مکرر، جواب نهایی دستگاه مشخص می‌شود. به کارگیری این روش برای دستگاه‌های غیرخطی همیشه به سادگی صورت نمی‌پذیرد و اغلب منجر به معادله‌ای از درجه بالاتر می‌شود. به عنوان نمونه، در یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی دلخواه، اگر یک معادله از درجه n و معادله دیگر از درجه m باشد، آنگاه پس از حذف یک مجهول ممکن است به معادله‌ای از درجه mn برسیم. از آنجا که بنا به قضیه آبل-روفینی [۳] هیچ جوابی برای معادلات درجه پنجم و بالاتر بر حسب رادیکال‌ها وجود ندارد، برای حل دستگاه غیرخطی داده شده باید به دنبال راه‌حلی ابتکاری باشیم.

روشی مناسب برای حل دستگاه‌های معادلات با درجه بالا، استفاده از مفهومی به نام تقارن در چندجمله‌ای‌ها است. با توجه به آنکه این روش در حالت کلی قابل اجرا نیست، اما با استفاده از آن می‌توان به حل بسیاری از دستگاه‌های معادلات و معادلات گنگ، اثبات اتحادها و نامساوی‌ها و نیز تجزیه یک عبارت پرداخت. یک مزیت مهم در این روش آن است که برخلاف روش حذفی، ما را به معادله‌ای از درجه پایین‌تر رهنمون می‌سازد. مرجع اصلی ما برای این مقاله، کتاب [۱] است.

تعریف ۱.۱. چندجمله‌ای دومتغیره $P(x, y)$ را متقارن گوییم هرگاه در این چندجمله‌ای، با تبدیل x و y به یکدیگر تغییری حاصل نشود و به عبارت دیگر، داشته باشیم $P(x, y) = P(y, x)$.

چندجمله‌ای‌های متقارن $\sigma = x + y$ و $\tau = xy$ ، که ساده‌ترین نوع چندجمله‌ای‌های متقارن دومتغیره هستند، را مقدماتی می‌نامیم. به ازای هر عدد طبیعی n ، مجموع توان‌های متشابه عبارت است از چندجمله‌ای متقارن $s_n = x^n + y^n$.

۲. قضیه بنیادین

چندجمله‌ای دومتغیره دلخواه $P(\sigma, \tau)$ از σ و τ ، که لزوماً متقارن نیست، را در نظر می‌گیریم. با نوشتن σ و τ بر حسب x و y به چندجمله‌ای متقارن $f(x, y)$ می‌رسیم. در واقع، $f(x, y) = P(x + y, xy)$. به عنوان نمونه، اگر $P(\sigma, \tau) = \sigma^2 - \sigma\tau$ ، آنگاه

$$f(x, y) = (x + y)^2 - (x + y)xy = x^2 + y^2 + 2xy - x^2y - xy^2.$$

چنان که دیده می‌شود این یک روش ساده برای به‌دست آوردن چندجمله‌ای‌های متقارن است. حال، یک سؤال پیش می‌آید. آیا عکس این مطلب برقرار است و می‌توان هر چندجمله‌ای متقارن را بدین روش به‌دست آورد؟ به‌طور مثال، نخستین چهار جمله دنباله $\{s_n\}_{n \geq 1}$ را می‌توان بر حسب σ و τ نوشت:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma, & s_2 &= \sigma^2 - 2\tau \\ s_3 &= \sigma^3 - 3\sigma\tau, & s_4 &= (\sigma^2 - 2\tau)^2 - 2\tau^2. \end{aligned}$$

قضیه ۱.۲ نشان می‌دهد که پاسخ این پرسش مثبت است.

قضیه ۱.۲. برای هر چندجمله‌ای متقارن دومتغیره $f(x, y)$ ، چندجمله‌ای $P(\sigma, \tau)$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(x, y) = P(\sigma, \tau)$. به دیگر بیان، هر چندجمله‌ای متقارن $f(x, y)$ از x و y را می‌توان بر حسب σ و τ نوشت.

برهان. در ابتدا، حکم را برای مجموع توان‌های متشابه ثابت نموده و نشان می‌دهیم که s_n را می‌توان به‌صورت یک چندجمله‌ای بر حسب σ و τ نوشت. این امر با استقرای قوی روی n صورت می‌گیرد. حکم برای $n = 1$ واضح است چون $s_1 = x + y = \sigma$. از طرفی، تساوی

$$(x + y)(x^{n-1} + y^{n-1}) = x^n + y^n + xy(x^{n-2} + y^{n-2})$$

نتیجه می‌دهد $s_n = \sigma s_{n-1} - \tau s_{n-2}$. لذا، اگر حکم برای مقادیر طبیعی کوچک‌تر از n برقرار باشد، آنگاه حکم به ازای n نیز برقرار است.

اینک، چندجمله‌ای متقارن دومتغیره دلخواه $f(x, y)$ را در نظر می‌گیریم. از آنجا که f متقارن است، این چندجمله‌ای پس از بسط دارای دو نوع جمله می‌باشد و در واقع، f را می‌توان به صورت مجموعی از جملات $ax^k y^l$ و $bx^l y^k$ نوشت، که در آن $k > l$. چون $ax^k y^k = a\tau^k$ و $bx^k y^l + bx^l y^k = bx^l y^l (x^{k-l} + y^{k-l}) = b\tau^l s_{k-l}$ ، f را می‌توان به‌صورت یک چندجمله‌ای بر حسب σ ، τ و عناصر دنباله $\{s_n\}_{n \geq 1}$ بیان نمود. بنابراین، حکم نتیجه می‌شود. $\square$

تابع مولد دنباله $\{s_n\}_{n \geq 1}$ عبارت است از $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n$. از طرفی، بنا به اثبات قضیه ۱.۲، برای این دنباله رابطه بازگشتی خطی همگن مرتبه دوم

$$s_n = \sigma s_{n-1} - \tau s_{n-2} \quad (n \geq 3), \quad s_1 = \sigma, \quad s_2 = \sigma^2 - 2\tau, \quad (1.2)$$

برقرار است. با استفاده از [۴] به‌دست می‌آید

$$f(x) = \frac{\sigma x - 2\tau x^2}{1 - \sigma x + \tau x^2} = (\sigma x - 2\tau x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma x - \tau x^2)^n.$$

با محاسبه ضریب x^n در دو طرف تساوی و سپس ساده کردن، دستور عمومی

$$s_n = n \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^i (n-i-1)!}{i!(n-2i)!} \sigma^{n-2i} \tau^i$$

نتیجه می‌شود. برهان قضیه ۱.۲ الگوریتمی برای محاسبه هر چندجمله‌ای متقارن $f(x, y)$ بر حسب σ و τ ارائه می‌دهد. به عنوان نمونه، برای چندجمله‌ای متقارن

$$f(x, y) = x^4 - 5x^3 y^2 + 7x^3 y + 6x^2 y^2 - 5x^2 y^3 + 7xy^3 + y^4,$$

می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x^4 + y^4) - 5(x^3y^2 + x^2y^3) + 7(x^3y + xy^3) + 6x^2y^2 \\ &= s_4 - 5\tau^2 s_1 + 7\tau s_2 + 6\tau^2 \\ &= (\sigma^2 - 2\tau)^2 - 2\tau^2 - 5\tau^2\sigma + 7\tau(\sigma^2 - 2\tau) + 6\tau^2 \\ &= \sigma^4 + 3\sigma^2\tau - 5\sigma\tau^2 - 6\tau^2. \end{aligned}$$

قضیه ۲.۲ نشان می‌دهد اگر چندجمله‌ای متقارن f با هر روش دیگری، به جز روش بیان شده در اثبات قضیه ۱.۲، بر حسب σ و τ بیان شود، آنگاه حاصل یکسان است. در ادامه ترتیب زیر، موسوم به ترتیب قاموسی، روی تک‌جمله‌ای‌های دومتغیره مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$ax^m y^n \geq bx^k y^l \iff m \geq k \quad \text{و} \quad (m = k \rightarrow n \geq l).$$

قضیه ۲.۲. (یکتایی تبدیل) اگر چندجمله‌ای‌های دومتغیره φ و ψ به گونه‌ای باشند که $\varphi(\sigma, \tau) = \psi(\sigma, \tau)$ آنگاه می‌توان گفت $\varphi(x, y) = \psi(x, y)$.

برهان. با استفاده از تعریف و تساوی $\sigma^i \tau^j = (x + y)^i (xy)^j$ به سادگی دیده می‌شود که بزرگ‌ترین تک‌جمله‌ای نسبت به ترتیب قاموسی در چندجمله‌ای دومتغیره $\varphi(x, y)$ برابر $x^m y^n$ است اگر و تنها اگر بزرگ‌ترین تک‌جمله‌ای در بسط $\varphi(\sigma, \tau)$ برابر با $x^{m+n} y^n$ باشد. در واقع، برای یافتن بزرگ‌ترین تک‌جمله‌ای در بسط $\varphi(\sigma, \tau)$ کافی است جملات $\sigma^i \tau^j$ را طوری انتخاب نماییم که در آنها $i + j$ بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد و سپس، از میان آنها جمله‌ای را با بیشترین مقدار j برگزینیم. واضح است که برای هر چندجمله‌ای ناصفر $\varphi(\sigma, \tau)$ بزرگ‌ترین جمله وجود دارد و یکتا است. بنابراین، اگر چندجمله‌ای $\varphi(x, y)$ موجود باشد به طوری که $\varphi(\sigma, \tau) = 0$ ، آنگاه $\varphi(x, y) = 0$.

حال، فرض می‌کنیم $\varphi(x, y)$ و $\psi(x, y)$ دو چندجمله‌ای هستند به طوری که $\varphi(\sigma, \tau) = \psi(\sigma, \tau)$. در این صورت، $\varphi(\sigma, \tau) - \psi(\sigma, \tau)$ برابر با صفر است و بنا به بحث بالا، $\varphi(x, y) - \psi(x, y) = 0$. لذا، حکم حاصل می‌شود. $\square$

علت برقراری قضیه ۲.۲ آن است که عبارات $\sigma = x + y$ و $\tau = xy$ تحت هیچ رابطه جبری با یکدیگر مرتبط نیستند. در غیر این صورت، حکم ممکن است برقرار نباشد. به عنوان نمونه، با در نظر گرفتن $\tau_1 = x^2 + y^2 + 2xy$ و چندجمله‌ای‌های $\varphi(x, y) = x^2 + xy$ و $\psi(x, y) = y + xy$ داریم $\varphi(x, y) \neq \psi(x, y)$ ولی $\varphi(\sigma, \tau_1) = \psi(\sigma, \tau_1)$.

۳. کاربردها

در این بخش، به کاربردهایی از چندجمله‌ای‌های متقارن دومتغیره در حل مسائلی از جبر مقدماتی می‌پردازیم. توجه شود که جواب‌های معادله درجه دوم $az^2 + bz + c = 0$ عبارتند از $z = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$. در اینجا، $\Delta = b^2 - 4ac$ مبین نام دارد. پیداست که اگر $\Delta < 0$ ، آنگاه جواب‌ها اعداد مختلط غیرحقیقی هستند و در غیر این صورت، معادله دارای جواب‌های حقیقی است.

۱.۳. **دستگاه‌های معادلات متقارن دومتغیره.** در برخی از این دستگاه‌ها، سمت چپ تساوی‌ها عباراتی متقارن نسبت به x و y هستند. بنا به قضیه ۱.۲، این عبارات را می‌توان بر حسب σ و τ نوشت. این امر مفید واقع می‌شود زیرا به جای عبارت xy ، که از درجه دوم است، متغیر τ از درجه اول قرار می‌گیرد. از این رو، با اعمال جانشینی‌های $\sigma = x + y$ و $\tau = xy$ عبارات مذکور معمولاً به معادلاتی از درجات کمتر تبدیل می‌شوند. سپس، در صورت به دست آوردن σ و τ به مقادیر x و y دست می‌یابیم. در واقع، x و y ریشه‌های معادله $z^2 - \sigma z + \tau = 0$ هستند زیرا $z^2 - \sigma z + \tau = (z - x)(z - y)$.

مثال ۱.۳. دستگاه

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + xy(x + y) = 15, \\ x^2 y^2 (x^2 + y^2) = 20, \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. مطابق آنچه بیان شد، حل این دستگاه به شرح ذیل است:

$$\begin{aligned} \begin{cases} s_3 + \tau s_1 = 15, \\ \tau^2 s_2 = 20, \end{cases} &\longrightarrow \begin{cases} \sigma(\sigma^2 - 2\tau) = 15, \\ \tau^2(\sigma^2 - 2\tau) = 20, \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم دو معادله}} \sigma = \frac{3}{4}\tau^2 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در معادله دوم}} \\ 9\tau^6 - 32\tau^3 - 320 = 0 &\longrightarrow \tau = 2, -\sqrt[3]{40/9} \longrightarrow \begin{cases} \sigma = 3, \\ \tau = 2, \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \sigma = \sqrt[3]{25/3}, \\ \tau = -\sqrt[3]{40/9}, \end{cases} \\ \longrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt[3]{25} + \sqrt[6]{5}\sqrt{13}}{2\sqrt[3]{3}}, \\ y = \frac{\sqrt[3]{25} - \sqrt[6]{5}\sqrt{13}}{2\sqrt[3]{3}}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt[3]{25} - \sqrt[6]{5}\sqrt{13}}{2\sqrt[3]{3}}, \\ y = \frac{\sqrt[3]{25} + \sqrt[6]{5}\sqrt{13}}{2\sqrt[3]{3}}. \end{cases} \end{aligned}$$

مثال ۲.۳. دستگاه

$$\begin{cases} x^4 = 3x^2 - y^2, \\ y^4 = 3y^2 - x^2, \end{cases}$$

مفروض است. در اینجا، هر معادله به تنهایی متقارن نیست اما با در نظر گرفتن مجموع و تفاضل آنها می‌توان به معادلاتی متقارن دست یافت:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 2(x^2 + y^2), \\ x^4 - y^4 = 4(x^2 - y^2). \end{cases}$$

اگر $x^2 = y^2$ ، آنگاه با جای‌گذاری در دستگاه جواب‌های

$$(x, y) = (0, 0), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}),$$

حاصل می‌شود. در غیر این صورت، با تقسیم معادله دوم بر $x^2 - y^2$ می‌توان نوشت

$$\begin{cases} s_4 = 8, \\ s_2 = 4, \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (\sigma^2 - 2\tau)^2 - 2\tau^2 = 8, \\ \sigma^2 - 2\tau = 4, \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \tau = 2, \\ \sigma = \pm 2\sqrt{2}, \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \tau = -2, \\ \sigma = 0, \end{cases}$$

که از اینجا همان جواب‌های تکراری بالا به دست می‌آید.

۲.۳. استفاده از متغیرهای کمکی. گاهی اوقات یک دستگاه متشکل از معادلاتی است که نسبت به x و y متقارن نیستند یا بر حسب عناصر دنباله $\{s_n\}_{n \geq 1}$ قابل بیان نمی‌باشند، اما با در نظر گرفتن متغیرهایی جدید می‌توان به معادلاتی متقارن دست یافت.

مثال ۳.۳. دستگاه

$$\begin{cases} \sqrt{y} + \sqrt[4]{x^3 - 1} = 5, \\ x^3 + y^2 = 98, \end{cases}$$

داده شده است. با در نظر گرفتن متغیرهای $u = \sqrt[4]{x^3 - 1}$ و $v = \sqrt{y}$ می‌توان گفت

$$\begin{aligned} \begin{cases} u + v = 5, \\ u^4 + v^4 = 97, \end{cases} &\longrightarrow \begin{cases} \sigma = 5, \\ (\sigma^2 - 2\tau)^2 - 2\tau^2 = 97, \end{cases} \\ &\longrightarrow \begin{cases} \sigma = 5, \\ \sigma = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma = 5, \\ \tau = 44, \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3, \\ y = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

گاهی اوقات نیز یک معادله تک مجهولی را می‌توان با استفاده از متغیرهای جدید به دستگاهی از معادلات متقارن تبدیل نمود.

مثال ۴.۳. معادله $x\sqrt[3]{37-x^3}(x+\sqrt[3]{37-x^3})=-12$ را در نظر می‌گیریم. با قرار دادن $y = \sqrt[3]{37-x^3}$ داریم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^3 + y^3 = 37, \\ xy(x+y) = -12, \end{cases} &\longrightarrow \begin{cases} \sigma^3 - 3\sigma\tau = 37, \\ \sigma\tau = -12, \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sigma = 1, \\ \tau = -12, \end{cases} \\ &\longrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ y = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

۳.۳. برخی مسائل مرتبط با معادلات درجه دوم. در برخی مسائل، به محاسبه عباراتی شامل ریشه‌های یک معادله درجه دوم مفروض نیازمندیم. چنین مسائلی را نیز می‌توان به کمک چندجمله‌ای‌های متقارن حل نمود.

مثال ۵.۳. می‌خواهیم معادله درجه دومی تشکیل دهیم که ریشه‌های آن مکعب ریشه‌های معادله $x^2 + 7x + 9 = 0$ باشند. اگر ریشه‌های معادله اخیر x_1 و x_2 باشند، آنگاه $\sigma = x_1 + x_2 = -7$ و $\tau = x_1x_2 = 9$. از طرفی، باید p و q را طوری بیابیم که $z^2 + pz + q = (z - x_1^3)(z - x_2^3)$ از این رو،

$$p = x_1^3 + x_2^3 = \sigma^3 - 3\sigma\tau = -154,$$

$$q = x_1^3x_2^3 = \tau^3 = 729,$$

و $z^2 - 154z + 729 = 0$ همان معادله خواسته شده است.

مثال ۶.۳. معادله $x^2 - 9x + 16 = 0$ و ریشه‌های α و β از آن مفروض هستند. روشن است که $\alpha, \beta > 0$. می‌خواهیم حاصل عبارت $A = \sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}$ را بیابیم. قرار می‌دهیم $u = \sqrt[4]{\beta}$ و $v = \sqrt[4]{\alpha}$. در این صورت،

$$\begin{cases} u^4 + v^4 = 9, \\ u^4v^4 = 16, \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (\sigma^2 - 2\tau)^2 - 2\tau^2 = 9, \\ \tau^4 = 16, \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sigma = \sqrt{4 + \sqrt{17}}, \\ \tau = 2, \end{cases}.$$

حال، $A = \sigma = \sqrt{4 + \sqrt{17}}$.

۴.۳. نامساوی‌ها. با استفاده از چندجمله‌ای‌های متقارن می‌توان به اثبات بسیاری از نامساوی‌ها پرداخت. قضیه زیر در این راستا مفید واقع می‌شود.

قضیه ۷.۳. [۱] دو عدد $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$ و دستگاه

$$\begin{cases} x + y = \sigma, \\ xy = \tau, \end{cases}$$

مفروض است. جواب‌های x و y از این دستگاه اعداد حقیقی هستند اگر و تنها اگر $\sigma^2 - 4\tau \geq 0$. به علاوه، اگر $x = y$ و تنها اگر $\sigma^2 - 4\tau = 0$. همچنین، x و y دو جواب حقیقی نامنفی برای دستگاه هستند اگر و تنها اگر $\sigma, \tau \geq 0$ و $\sigma^2 - 4\tau \geq 0$.

در حالت کلی، فرض می‌کنیم چندجمله‌ای متقارن $f(x, y)$ به ازای مقادیری همچون $x, y \in \mathbb{R}$ یا $x, y \geq 0$ داده شده است. به منظور یافتن کرانی پایین برای مقادیر f ، ابتدا چندجمله‌ای $f(x, y)$ را برحسب σ و τ نوشته و قرار می‌دهیم $z = \sigma^2 - 4\tau \geq 0$. سپس، به طور معمول با جانشینی $\tau = (\sigma^2 - z)/4$ در چندجمله‌ای حاصل، آن را بر حسب σ و z می‌نویسیم. حال، با توجه به شرایط مسئله برای σ و نامنفی بودن z ، به یک کران پایین برای f دست می‌یابیم.

مثال ۸.۳. (الف) نشان می‌دهیم برای هر دو مقدار حقیقی x و y ، $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$ ، با توجه به مطالب بالا،

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 - x^3y - xy^3 &= (x^4 + y^4) - xy(x^2 + y^2) \\ &= (\sigma^2 - 2\tau)^2 - 2\tau^2 - \tau(\sigma^2 - 2\tau) = \sigma^4 - 5\sigma^2\tau + 4\tau^2 \\ &= \sigma^4 - 5\sigma^2 \frac{\sigma^2 - z}{4} + \frac{(\sigma^2 - z)^2}{4} = \frac{3}{4}\sigma^2 z + \frac{1}{4}z^2 \geq 0. \end{aligned}$$

(ب) نشان می‌دهیم برای مقادیر نامنفی x و y ، $(x^3 + y^3)/2 \geq ((x+y)/2)^3$. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + y^3}{2} - \left(\frac{x+y}{2}\right)^3 &= \frac{4(x^3 + y^3) - (x+y)^3}{8} \\ &= \frac{4(\sigma^3 - 3\sigma\tau) - \sigma^3}{8} = \frac{3\sigma^3 - 12\sigma\tau}{8} \\ &= \frac{3\sigma^3 - 3\sigma(\sigma^2 - z)}{8} = \frac{3\sigma z}{8} \geq 0. \end{aligned}$$

(ج) نشان می‌دهیم اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند که $x + y = 1$ آنگاه $(x + 1/x)^2 + (y + 1/y)^2 \geq 25/2$.

با توجه به مفروضات، $\sigma = 1$ ، $z = 1 - 4\tau \geq 0$ ، $0 \leq \tau \leq 1/4$ ، حال،

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{25}{2} &= x^2 + y^2 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} - \frac{17}{2} \\ &= \sigma^2 - 2\tau + \frac{\sigma^2 - 2\tau}{\tau^2} - \frac{17}{2} = \frac{-4\tau^3 - 15\tau^2 - 4\tau + 2}{2\tau^2}. \end{aligned}$$

لذا، برای اثبات نامساوی داده شده، کافی است ثابت کنیم $4\tau^3 + 15\tau^2 + 4\tau \leq 2$. روشن است که بیشترین مقدار $4\tau^3 + 15\tau^2 + 4\tau$ به ازای $\tau = 1/4$ حاصل می‌شود، که برابر است با ۲.

۵.۳. معادلات معکوسه. با استفاده از چندجمله‌ای‌های متقارن می‌توان برای حل برخی معادلات از درجات بالا اقدام نمود. این

امر برای معادلات معکوسه بر اساس روش بیان شده در برهان قضیه ۱۱.۳ صورت می‌گیرد.

تعریف ۹.۳. چندجمله‌ای $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ ، که در آن $a_n \neq 0$ ، را معکوسه گوئیم هرگاه ضرایب این چندجمله‌ای از طرفین دو به دو برابر باشند. به عبارت دیگر، $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ معکوسه است هرگاه به ازای هر $0 \leq i \leq n$ داشته باشیم $a_i = a_{n-i}$. معادله $f(z) = 0$ یک معادله معکوسه نامیده می‌شود هرگاه f خود یک چندجمله‌ای معکوسه باشد.

با استفاده از تعریف، دیده می‌شود که چندجمله‌ای $f(z)$ از درجه n یک چندجمله‌ای معکوسه است اگر و تنها اگر $z^n f(1/z) = f(z)$. گزاره ۱۰.۳ نشان می‌دهد که خارج قسمت دو چندجمله‌ای معکوسه خود یک چندجمله‌ای معکوسه است.

گزاره ۱۰.۳. فرض می‌کنیم $f(z)$ و $g(z)$ دو چندجمله‌ای معکوسه هستند به طوری که $f(z) \mid g(z)$. در این صورت، $h(z) = g(z)/f(z)$ نیز یک چندجمله‌ای معکوسه است.

برهان. فرض می‌کنیم چندجمله‌ای‌های معکوسه $f(z)$ و $g(z)$ به ترتیب از درجات m و n هستند. از این رو، می‌توان نوشت $z^m f(1/z) = f(z)$ و $z^n g(1/z) = g(z)$. چون $f(z) \mid g(z)$ ، چندجمله‌ای $h(z) = g(z)/f(z)$ از درجه $m - n$ وجود دارد به طوری که

$$z^{m-n} h(1/z) = \frac{z^m f(1/z)}{z^n f(1/z)} = \frac{f(z)}{g(z)} = h(z).$$

بنابراین، $h(z)$ یک چندجمله‌ای معکوسه است. $\square$

قضیه ۱۱.۳. گیریم $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ یک چندجمله‌ای معکوسه از درجه n باشد. اگر $n = 2k$ آنگاه $f(z) = z^k h(\sigma)$ ، که در آن $\sigma = z + 1/z$ و h یک چندجمله‌ای از درجه k است. اگر $n = 2k + 1$ ، آنگاه $f(z) = (z + 1) h(\sigma)$ و خارج قسمت یک چندجمله‌ای معکوسه از درجه $2k$ است.

برهان. چندجمله‌ای معکوسه $f(z) = a_{2k} z^{2k} + \dots + a_1 z + a_0$ از درجه $2k$ را در نظر می‌گیریم. بنا به تعریف، به ازای هر $0 \leq i \leq 2k$ داریم $a_i = a_{2k-i}$. در این صورت،

$$\begin{aligned} f(z) &= z^k \left(a_{2k} z^k + a_{2k-1} z^{k-1} + \dots + a_{k+1} z + a_k + \frac{a_{k-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{k-1}} + \frac{a_0}{z^k} \right) \\ &= z^k \left(a_{2k} \left(z^k + \frac{1}{z^k} \right) + a_{2k-1} \left(z^{k-1} + \frac{1}{z^{k-1}} \right) + \dots + a_{k+1} \left(z + \frac{1}{z} \right) + a_k \right). \end{aligned}$$

از طرف دیگر، با قرار دادن z و $1/z$ به ترتیب به جای x و y در بخش ۲، رابطه بازگشتی خطی همگن مرتبه دوم

$$S_n = \sigma S_{n-1} - S_{n-2} \quad (n \geq 3), \quad S_1 = \sigma, \quad S_2 = \sigma^2 - 2 \quad (۱.۳)$$

برای دنباله $\{S_n\}_{n \geq 1}$ حاصل می‌شود، که در آن $S_n = z^n + 1/z^n$. از اینجا دیده می‌شود که S_n یک چندجمله‌ای بر حسب σ از درجه n است. به علاوه، برای هر $n \geq 1$ داریم

$$S_n = n \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^i (n-i-1)!}{i! (n-2i)!} \sigma^{n-2i}.$$

لذا، قسمت اول حکم ثابت می‌شود.

فرض می‌کنیم $f(z) = a_{2k+1} z^{2k+1} + \dots + a_1 z + a_0$ یک چندجمله‌ای معکوسه از درجه $2k + 1$ است. از این رو، برای هر $0 \leq i \leq 2k + 1$ داریم $a_i = a_{2k+1-i}$. پس،

$$f(z) = a_0 (z^{2k+1} + 1) + a_1 (z^{2k} + z) + \dots + a_k (z^{k+1} + z^k).$$

پیداست که $f(-1) = 0$. این نتیجه می‌دهد $f(z) \mid z + 1$. از آنجا که $z + 1$ نیز یک چندجمله‌ای معکوسه است، اثبات قسمت دوم حکم با استفاده از گزاره ۱۰.۳ به دست می‌آید. $\square$

توجه شود که برای به‌دست آوردن S_n ، کافی است در دستور s_n بر حسب σ و τ جای‌گذاری $\tau = 1$ اعمال شود. به عنوان نمونه، نخستین چهار جمله دنباله $\{S_n\}_{n \geq 1}$ بر حسب σ عبارتند از

$$\begin{aligned} S_1 &= \sigma, & S_2 &= \sigma^2 - 2, \\ S_3 &= \sigma^3 - 3\sigma, & S_4 &= \sigma^4 - 4\sigma^2 + 2. \end{aligned}$$

مثال ۱۲.۳. (الف) معادله معکوسه $6z^6 - 5z^5 + 2z^4 + 5z^3 + 2z^2 - 5z + 6 = 0$ را در نظر گرفته و می‌خواهیم ریشه‌های آن را بیابیم. بنا به برهان قضیه ۱۱.۳، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} z^3 \left(6 \left(z^3 + \frac{1}{z^3} \right) - 5 \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + 2 \left(z + \frac{1}{z} \right) + 5 \right) &= 0, \\ \rightarrow 6S_3 - 5S_2 + 2S_1 + 5 &= 0 \rightarrow 6\sigma^3 - 5\sigma^2 - 16\sigma + 15 = 0 \rightarrow \sigma = 1, \frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, \\ \rightarrow z + \frac{1}{z} &= 1, \frac{2}{3}, -\frac{5}{3} \rightarrow z^2 - z + 1 = 0, 3z^2 - 2z + 3 = 0, 3z^2 + 5z + 3 = 0, \\ \rightarrow z &= \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 \pm 2i\sqrt{2}}{3}, \frac{-5 \pm i\sqrt{11}}{6}. \end{aligned}$$

(ب) معادله معکوسه $z^5 - 4z^4 + 3z^3 + 3z^2 - 4z + 1 = 0$ داده شده است. هدف یافتن ریشه‌های این معادله است. بنا به برهان قضیه ۱۱.۳، -1 یک ریشه این معادله است و با تقسیم چندجمله‌ای معکوسه متناظر بر $z + 1$ به معادله معکوسه $z^4 - 5z^3 + 8z^2 - 5z + 1 = 0 = 0$ می‌رسیم. لذا،

$$\begin{aligned} z^2 \left(\left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) - 5 \left(z + \frac{1}{z} \right) + 8 \right) &= 0 \rightarrow S_2 - 5S_1 + 8 = 0 \rightarrow \sigma^2 - 5\sigma + 6 = 0 \\ \rightarrow \sigma &= 2, 3 \rightarrow z + \frac{1}{z} = 2, 3 \rightarrow z^2 - 2z + 1 = 0, z^2 - 3z + 1 = 0 \\ \rightarrow z &= 1, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

همان طور که پیش‌تر اشاره شد، حل معادلات درجه پنجم و بالاتر بر حسب رادیکال‌ها امکان‌پذیر نیست. با این حال، گزاره ۱۳.۳ نشان می‌دهد چنین امری برای رده‌هایی از معادلات امکان‌پذیر است.

گزاره ۱۳.۳. (الف) همه ریشه‌های معادله معکوسه درجه چهارم $az^4 + bz^3 + cz^2 + bz + a = 0$ ، که در آن $a \neq 0$ ، را می‌توان به کمک چهار عمل اصلی حساب و جذرگرفتن به‌دست آورد.

(ب) همه ریشه‌های معادله معکوسه درجه پنجم $az^5 + bz^4 + cz^3 + cz^2 + bz + a = 0$ ، که در آن $a \neq 0$ ، را می‌توان به کمک چهار عمل اصلی حساب و جذرگرفتن به‌دست آورد.

(ج) اگر یک ریشه معادله معکوسه درجه ششم $az^6 + bz^5 + cz^4 + dz^3 + cz^2 + bz + a = 0$ ، که در آن $a \neq 0$ ، مشخص باشد، آنگاه دیگر جواب‌ها را می‌توان به کمک چهار عمل اصلی حساب و ریشه گرفتن به‌دست آورد.

(د) اگر یک ریشه معادله معکوسه درجه هفتم $az^7 + bz^6 + cz^5 + dz^4 + dz^3 + cz^2 + bz + a = 0$ ، که در آن $a \neq 0$ ، مشخص باشد، آنگاه دیگر جواب‌ها را می‌توان به کمک چهار عمل اصلی حساب و ریشه گرفتن به‌دست آورد.

برهان. (الف) بنا به روش بیان شده،

$$\begin{aligned} z^2 \left(a \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + b \left(z + \frac{1}{z} \right) + c \right) &= 0 \longrightarrow aS_2 + bS_1 + c = 0 \\ \longrightarrow a\sigma^2 + b\sigma + (c - 2a) &= 0 \longrightarrow \sigma = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 8a^2 - 4ac}}{2a} \\ \longrightarrow 2az^2 + \left(b \pm \sqrt{b^2 + 8a^2 - 4ac} \right) z + 2a &= 0. \end{aligned}$$

از آنجا که حل معادله درجه دوم اخیر تنها با استفاده از چهار عمل اصلی حساب و جذرگرفتن امکان پذیر است، حکم به دست می آید.
(ب) بنا به قضیه ۱۱.۳، می توان نوشت $az^5 + bz^4 + cz^3 + cz^2 + bz + a = (z + 1)g(z)$ که در آن $g(z)$ یک چندجمله ای معکوسه درجه چهارم است. حال، از (الف) نتیجه می شود که حل معادله $g(z) = 0$ به کمک چهار عمل اصلی حساب و جذرگرفتن ممکن است. لذا، حکم حاصل می شود.
(ج) می توان گفت

$$\begin{aligned} z^3 \left(a \left(z^3 + \frac{1}{z^3} \right) + b \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + c \left(z + \frac{1}{z} \right) + d \right) &= 0 \\ \longrightarrow aS_3 + bS_2 + cS_1 + d = 0 \longrightarrow a\sigma^3 + b\sigma^2 + (c - 3a)\sigma + d - 2b &= 0, \end{aligned}$$

که از اینجا سه مقدار برای σ با استفاده از چهار عمل اصلی حساب و ریشه گرفتن به دست می آید. سپس، به ازای هر مقدار به دست آمده σ با معادله $z + 1/z = \sigma$ ، چهار عمل اصلی حساب و جذرگرفتن به دو مقدار برای z می رسیم. لذا، حکم نتیجه می شود.
(د) گیریم معادله معکوسه درجه هفتم مفروض دارای ریشه ای مانند λ باشد به طوری که $\lambda \neq -1$. از طرفی، -1 نیز یک ریشه این معادله معکوسه است و

$$az^7 + bz^6 + cz^5 + dz^4 + dz^3 + cz^2 + bz + a = (z + 1)g(z),$$

که در آن $g(z)$ یک چندجمله ای معکوسه درجه ششم است. اینک، چون $g(\lambda) = 0$ ، حکم از (ج) نتیجه می شود. $\square$

۶.۳. تجزیه چندجمله ای های متقارن. برای تجزیه یک چندجمله ای متقارن دومتغیره $f(x, y)$ به صورت حاصل ضربی از عوامل، یک راهبرد کلی آن است که ابتدا f را بر حسب σ و τ نوشته و سپس، به تجزیه عبارت جدید بپردازیم. در این بخش، با استفاده از راهبرد مذکور، چندجمله ای های متقارن دومتغیره درجه چهارم را مورد بررسی قرار می دهیم. بدین منظور، می نویسیم

$$\begin{aligned} f(x, y) &= ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + bxy^3 + ay^4 \\ &\quad + dx^3 + ex^2y + exy^2 + dy^3 + fx^2 + gxy + fy^2 + hx + hy + k \\ &= as_4 + b\tau s_2 + c\tau^2 + ds_3 + e\tau\sigma + fs_2 + g\tau + h\sigma + k \\ &= (2a - 2b + c)\tau^2 - (4a\sigma^2 - b\sigma^2 + 3d\sigma - e\sigma + 2f - g)\tau \\ &\quad + a\sigma^4 + d\sigma^3 + f\sigma^2 + h\sigma + k. \end{aligned}$$

چنان که می بینیم، یک چندجمله ای درجه دوم بر حسب τ حاصل می شود که برای تجزیه آن کافی است ریشه هایش را بیابیم. روشن است که در صورت وجود دو ریشه حقیقی τ' و τ'' تجزیه

$$f(x, y) = (2a - 2b + c)(xy - \tau')(xy - \tau'')$$

به عوامل حقیقی حاصل می‌گردد. سپس، با توجه به حضور تک‌جمله‌ای xy در هر یک از عوامل، می‌توان نتیجه گرفت که هر عامل به صورت کلی $\alpha x^2 + \beta xy + \alpha y^2 + \gamma x + \gamma y + \delta$ است. این عوامل نیز بر حسب x از درجه دوم هستند و در صورت امکان به عوامل حقیقی تجزیه می‌شوند.

مثال ۱۴.۳. چندجمله‌ای متقارن درجه چهارم

$$f(x, y) = 6x^4 - 11x^3y - 18x^2y^2 - 11xy^3 + 6y^4 + 3x^2 - 10xy + 3y^2$$

داده شده است. برای تجزیه آن، می‌نویسیم

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 6s_4 - 11\tau s_2 - 18\tau^2 + 3s_2 - 10\tau \\ &= 16\tau^2 - (35\sigma^2 + 16)\tau + 3\sigma^2(2\sigma^2 + 1) = 16(\tau - 2\sigma^2 - 1)(\tau - \frac{3}{16}\sigma^2) \\ &= (2x^2 + 3xy + 2y^2 + 1)(3x^2 - 10xy + 3y^2). \end{aligned}$$

همان طور که دیده می‌شود، هر کدام از عوامل یک چندجمله‌ای درجه دوم بر حسب x است. عامل اول دارای ریشه‌های مختلط غیرحقیقی است اما عامل دوم دارای دو ریشه حقیقی $y/3$ ، $x = 3y$ می‌باشد. بنابراین،

$$f(x, y) = 16(\tau - 2\sigma^2 - 1)(\tau - \frac{3}{16}\sigma^2) = (2x^2 + 3xy + 2y^2 + 1)(3x - y)(x - 3y).$$

قضیه ۱۵.۳. چندجمله‌ای متقارن دومتغیره $ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + bxy^3 + ay^4$ را در نظر می‌گیریم. اگر تجزیه f به عوامل حقیقی مطابق با روش بیان شده در بخش ۶.۳ امکان‌پذیر نباشد، آنگاه f را می‌توان به صورت

$$f(x, y) = (Ax^2 + Bxy + Cy^2)(Cx^2 + Bxy + Ay^2)$$

به عوامل حقیقی تجزیه نمود، که در آن هر عامل از تبدیل دوری دیگری نسبت به x و y به دست می‌آید.

برهان. بدون کاسته شدن از کلیت، فرض می‌کنیم $a = 1$. بنا به روش بیان شده در بخش ۶.۳، داریم:

$$f(x, y) = s_4 + b\tau s_2 + c\tau^2 = (c - 2b + 2)\tau^2 + (b - 4)\sigma^2\tau + \sigma^4.$$

از آنجا که روش مذکور برای تجزیه f به عوامل حقیقی به بن‌بست می‌رسد، مبین چندجمله‌ای درجه دوم اخیر باید منفی باشد. از این رو، $b^2 < 4(c - 2)$. از طرف دیگر، با مساوی قرار دادن ضرایب چندجمله‌ای‌ها نتیجه می‌شود که تجزیه $f(x, y) = (Ax^2 + Bxy + Cy^2)(Cx^2 + Bxy + Ay^2)$ امکان‌پذیر است اگر و تنها اگر دستگاه

$$\begin{cases} AC = 1, \\ B(A + C) = b, \\ A^2 + B^2 + C^2 = c, \end{cases} \quad (2.3)$$

برای ضرایب نامعین A ، B و C دارای جواب باشد. از اینجا با به دست آوردن $C = 1/A$ و $B = bA/(A^2 + 1)$ به ترتیب از معادلات اول و دوم و جای‌گذاری در معادله سوم، به

$$X^4 + (2 - c)X^3 + (b^2 - 2c + 2)X^2 + (2 - c)X + 1 = 0 \quad (3.3)$$

می‌رسیم، که در آن $X = A^2$. لذا، دستگاه (۲.۳) دارای جواب است اگر و تنها اگر معادله معکوسه (۳.۳) دارای جواب مثبت باشد. برای حل این معادله معکوسه، می‌توان نوشت

$$S_2 + (2 - c)S_1 + (b^2 - 2c + 2) = 0 \longrightarrow \sigma^2 + (2 - c)\sigma + (b^2 - 2c) = 0$$

$$\longrightarrow \sigma = \frac{c - 2 \pm \sqrt{(c + 2)^2 - 4b^2}}{2}.$$

از $b^2 < 4(c - 2)$ نتیجه می‌شود $(c - 6)^2 > (c + 2)^2 - 4b^2 > 0$ و $c > 2$. لذا، دو جواب حقیقی برای σ به دست می‌آید. حال، $X + 1/X = c - 2 + \sqrt{(c + 2)^2 - 4b^2} \geq 2$ چون $c - 2 + \sqrt{(c + 2)^2 - 4b^2} \geq 2$ ، از معادله اخیر یک جواب مثبت برای X حاصل می‌شود و بنابراین، تجزیه بیان شده برای f امکان‌پذیر است. $\square$

مثال ۱۶.۳. چندجمله‌ای متقارن $f(x, y) = 3x^4 + 4x^3y + 11x^2y^2 + 4xy^3 + 3y^4$ مفروض است. برای تجزیه f آن را بر حسب عبارات متقارن σ و τ می‌نویسیم:

$$f(x, y) = 3s_4 + 4\tau s_2 + 11\tau^2 = 9\tau^2 - 8\sigma^2\tau + 3\sigma^4.$$

مبین چندجمله‌ای اخیر منفی است و لذا، برای معادله متناظر ریشه‌های حقیقی حاصل نمی‌شود. حال، بنا به قضیه ۱۵.۳، f را می‌توان به صورت $f(x, y) = (Ax^2 + Bxy + Cy^2)(Cx^2 + Bxy + Ay^2)$ تجزیه نمود. پس،

$$3x^4 + 4x^3y + 11x^2y^2 + 4xy^3 + 3y^4 = (Ax^2 + Bxy + Cy^2)(Cx^2 + Bxy + Ay^2).$$

تساوی اخیر یک اتحاد است و لذا، به ازای همه مقادیر x و y برقرار می‌باشد. با قرار دادن $x = y = 1$ داریم $(A+B+C)^2 = 25$ که نتیجه می‌دهد $A+B+C = \pm 5$. با توجه به اینکه در تجزیه مورد نظر علامت‌های A ، B و C را همزمان می‌توان تغییر داد، تساوی $A+B+C = 5$ را در نظر می‌گیریم. با قرار دادن $x = 1$ و $y = -1$ داریم $(A-B+C)^2 = 9$ که نتیجه می‌دهد $A-B+C = \pm 3$. همچنین، با قرار دادن $x = 0$ و $y = 1$ داریم $AC = 3$. از این رو، دستگاه

$$\begin{cases} A+B+C=5, \\ A-B+C=\pm 3, \\ AC=3, \end{cases} \quad (۴.۳)$$

به دست می‌آید. با در نظر گرفتن مقدار $+3$ در طرف راست معادله دوم به $B = 1$ و $A+C = 4$ می‌رسیم. سپس، با لحاظ نمودن معادله سوم، مقادیر $A = 1$ و $C = 3$ حاصل می‌شوند. بنابراین،

$$3x^4 + 4x^3y + 11x^2y^2 + 4xy^3 + 3y^4 = (x^2 + xy + 3y^2)(3x^2 + xy + y^2).$$

۷.۳. بخش‌پذیری. در این بخش، به برخی از دیگر کاربردهای چندجمله‌ای‌های متقارن دومتغیره در حل مسائل مرتبط با بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها می‌پردازیم.

مثال ۱۷.۳. فرض می‌کنیم $f(x, y)$ یک چندجمله‌ای متقارن دومتغیره است و $P(\sigma, \tau)$ از بیان f بر حسب σ و τ به دست آمده است. نشان می‌دهیم $f(x, y)$ بر $x^2 + xy + y^2$ بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر مجموع ضرایب در چندجمله‌ای $P(\sigma, \tau)$ برابر با صفر باشد.

در وهله اول، فرض می‌کنیم $f(x, y) \mid x^2 + xy + y^2$. از این رو، چندجمله‌ای متقارن $g(x, y)$ وجود دارد به طوری که $f(x, y) = (x^2 + xy + y^2)g(x, y)$. از طرفی، با بیان g بر حسب σ و τ داریم $g(x, y) = Q(\sigma, \tau)$. بنابراین،

$P(\sigma, \tau) = (\sigma^2 - \tau)Q(\sigma, \tau)$. چون $P(1, 1) = 0$ ، مجموع ضرایب در $P(\sigma, \tau)$ برابر با صفر است. برعکس، بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد

$$f(x, y) = P(\sigma, \tau) = \sigma^n + a_1 \sigma^{n-2} \tau + a_2 \sigma^{n-4} \tau^2 + \dots + a_{\lfloor n/2 \rfloor} \sigma^{n-2\lfloor n/2 \rfloor} \tau^{\lfloor n/2 \rfloor},$$

که در آن $P(1, 1) = 0$ در این صورت،

$$P(\sigma, \tau) = \sigma^n \left(1 + a_1 \left(\frac{\tau}{\sigma^2} \right) + a_2 \left(\frac{\tau}{\sigma^2} \right)^2 + \dots + a_{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{\tau}{\sigma^2} \right)^{\lfloor n/2 \rfloor} \right)$$

و چندجمله‌ای $1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{\lfloor n/2 \rfloor} z^{\lfloor n/2 \rfloor}$ بخش‌پذیر است. پس، چندجمله‌ای $g(z)$ از درجه حداکثر $\lfloor n/2 \rfloor - 1$ وجود دارد به طوری که $(1 - z)g(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{\lfloor n/2 \rfloor} z^{\lfloor n/2 \rfloor}$ و

$$P(\sigma, \tau) = \sigma^n \left(1 - \frac{\tau}{\sigma^2} \right) g \left(\frac{\tau}{\sigma^2} \right) = (\sigma^2 - \tau) \sigma^{n-2} g \left(\frac{\tau}{\sigma^2} \right).$$

چون $0 \leq \deg g \leq n - 2$ ، داریم $P(\sigma, \tau) \mid \sigma^2 - \tau$. بنابراین، $\sigma^2 - \tau \mid f(x, y)$ ، $x^2 + xy + y^2 \mid f(x, y)$.

مثال ۱۸.۳. ثابت می‌کنیم اگر $x^n - x^n - y^n \mid (x + y)^n - x^n - y^n$ ، آنگاه $n = 6k \pm 1$. از فرض نتیجه می‌شود $\sigma^n - s_n \mid \sigma^2 - \tau$ و لذا، مقدار این s_n ها به ازای $\sigma = \tau = 1$ برابر با یک است. در حالت کلی، مقدار s_n را به ازای $\sigma = \tau = 1$ با a_n نشان می‌دهیم. بنا به رابطه (۱.۲)، رابطه بازگشتی خطی همگن مرتبه دوم

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \quad (n \geq 3), \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -1$$

برای دنباله $\{a_n\}_{n \geq 1}$ به دست می‌آید. از اینجا به راحتی دیده می‌شود که s_n تنها به ازای $n = 6k \pm 1$ برابر با یک است و بنابراین، حکم حاصل می‌شود.

مثال ۱۹.۳. در اینجا، به دنبال یک شرط لازم برای بخش‌پذیری چندجمله‌ای $x^{2n} + x^n + 1$ بر $x^2 + x + 1$ هستیم. اگر $x^{2n} + x^n + 1 \mid x^2 + x + 1$ ، آنگاه $(x^2 + x + 1) \mid f(z)$ ، که در آن $f(z)$ یک چندجمله‌ای معکوسه از درجه $2n - 2$ است. با تقسیم دو طرف تساوی بر z^n ، می‌توان نوشت $f(z)/z^{n-1} = (S_1 + 1)f(z)/z^{n-1}$. واضح است که $f(z)/z^{n-1}$ یک چندجمله‌ای بر حسب σ است و به ازای $\sigma = -1$ باید داشته باشیم $S_n = -1$. در حالت کلی، مقدار S_n را به ازای $\sigma = -1$ با A_n نشان می‌دهیم. بنا به رابطه (۱.۳)، رابطه بازگشتی خطی همگن مرتبه دوم

$$A_n = -(A_{n-1} + A_{n-2}) \quad (n \geq 3), \quad A_1 = -1, \quad A_2 = -1$$

برای دنباله $\{A_n\}_{n \geq 1}$ به دست می‌آید. از اینجا به راحتی دیده می‌شود که S_n تنها به ازای $n = 3k \pm 1$ برابر با -1 است و بنابراین، شرط مورد نظر حاصل می‌شود.

مراجع

- [۱] بالتیانسکی، و.گ.، ویلنکین، ن.یا. تقارن در جبر. ترجمه پرویز شهریاری (۱۳۶۳). چاپ دوم. موسسه انتشارات امیرکبیر.
- [۲] هافمن، کی.ام.، کنزی، آر. (۱۹۷۱) جبر خطی. ترجمه جمشید فرشیدی (۱۴۰۱). ویرایش دوم. مرکز نشر دانشگاهی.
- [۳] هانگرفورد، تی.دبلیو. (۱۹۸۰) جبر. ترجمه علی‌اکبر عالم‌زاده، حسین ذاکری (۱۳۸۲). انتشارات پژوهش.
- [4] Grimaldi, R.P. (2004) Discrete and Combinatorial Mathematics. 5th Edition. Pearson Education: Boston, USA.



FROM DECISION-MAKING TO SCHEMA-BUILDING: COMBINING CONSTRUCTIVISM, DECISION-MAKING, AND MENTAL SCHEMAS IN MATHEMATICS EDUCATION TO ENHANCE MATHEMATICS TEACHING AND LEARNING

ABDULLAH MOHAMMADI

¹Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad, Iran
abdhmohammadi@alumni.um.ac.ir

Abstract. This article aims to present a new teaching style in mathematics education by analyzing the dynamic interaction of three key components: “decision-making, constructivism, and mental schemas.” Based on the findings, decision-making education, as the process of designing options, analyzing conditions, and evaluating consequences before making a decision, plays a pivotal role in the formation of cognitively flexible schemas in the context of constructivism. The proposed conceptual model shows that by designing conflict-provoking and problem-oriented situations in the “zone of proximal development,” the teacher encourages students to consciously choose strategies, receive active feedback, and reconstruct solutions. This process not only strengthens the relational understanding of concepts (as opposed to instrumental understanding), but also leads to the formation of stable and transferable schemas through scenarios such as choosing a solution method, error analysis, and problem design. A report of practical experience in a low-motivated classroom confirms the effectiveness of this framework in increasing students’ self-efficacy, critical thinking, and responsibility.

2020 Mathematics Subject Classification. 47A55, 39B52, 34K20, 39B82

Keywords. Decision making, Conceptual schemas, Mathematics education, Active learning, Constructivism

Date: Received 02-08-2025 Revised 04-10-2025 Accepted 17-11-2025 Available Online 20-12-2025

©Ferdowsi University of Mashhad.



از تصمیم‌سازی تا طرحواره‌سازی: تلفیق ساخت‌وسازگرایی، تصمیم‌سازی و طرحواره‌های ذهنی در آموزش ریاضی برای ارتقای تدریس و یادگیری ریاضی

عبدالله محمدی^{*1}

¹ گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

abdhmohammadi@alumni.um.ac.ir

چکیده. این مقاله با هدف ارائه‌ی سبک تدریس نوین در آموزش ریاضی، به تحلیل تعامل پویای سه مؤلفه‌ی کلیدی «تصمیم‌سازی، ساخت‌وسازگرایی و طرحواره‌های ذهنی» می‌پردازد. بر اساس یافته‌ها، آموزش تصمیم‌سازی، به‌عنوان فرایند طراحی گزینه‌ها، تحلیل شرایط و ارزیابی پیامدها پیش از تصمیم‌گیری، در بستر ساخت‌وسازگرایی، نقشی محوری در شکل‌گیری طرحواره‌های انعطاف‌پذیر شناختی ایفا می‌کند. مدل مفهومی پیشنهادی نشان می‌دهد که معلم با طراحی موقعیت‌های تعارض‌برانگیز و مسئله‌محور در «منطقه‌ی رشد تقریبی»، دانش‌آموزان را به انتخاب آگاهانه‌ی راهبردها، بازخوردگیری فعال و بازسازی راه‌حل‌ها ترغیب می‌کند. این فرایند نه‌تنها درک رابطه‌ای مفاهیم (در مقابل درک ابزاری) را تقویت می‌کند، بلکه از طریق سناریوهایی مانند انتخاب روش حل، تحلیل خطا و طراحی مسئله، به شکل‌گیری طرحواره‌های پایدار و انتقال‌پذیر می‌انجامد. گزارش تجربه‌ی عملی در کلاس با انگیزه‌ی پایین، مؤید کارایی این چارچوب در افزایش خودکارآمدی، تفکر انتقادی و مسئولیت‌پذیری دانش‌آموزان است.

2010 Mathematics Subject Classification. 47A55, 39B52, 34K20, 39B82

واژگان کلیدی. تصمیم‌سازی، طرحواره‌های مفهومی، آموزش ریاضی، یادگیری فعال، ساخت‌گرایی.
تاریخ: دریافت ۱۴۰۴/۰۵/۱۱ بازنگری ۱۴۰۴/۰۷/۱۲ پذیرش ۱۴۰۴/۰۸/۲۶ انتشار برخط ۱۴۰۴/۰۹/۲۹
نحوه ارجاع به این مقاله: ع.محمدی، از تصمیم‌سازی تا طرحواره‌سازی: تلفیق ساخت‌وسازگرایی، تصمیم‌سازی و طرحواره‌های ذهنی در آموزش ریاضی برای ارتقای تدریس و یادگیری ریاضی، به سوی علوم ریاضی، ۵ (۱۴۰۴)، شماره ۱، ۲۴-۳۷.
©دانشگاه فردوسی مشهد.

۱. پیش‌گفتار

یادگیری ریاضی فراتر از به‌خاطر سپردن فرمول‌ها و اجرای روش‌های محاسباتی است. در واقع، کیفیت یادگیری زمانی ارتقا می‌یابد که دانش‌آموزان درگیر فرایندهای شناختی^۱ فعال همچون تحلیل، ارزیابی، به‌ویژه «تصمیم‌سازی»^۲ و «تصمیم‌گیری»^۳ شوند. در این مسیر، انتخاب (تصمیم‌گیری) آگاهانه‌ی راهبردها به‌عنوان یک قابلیت شناختی کلیدی، نقش مهمی در ساخت مفاهیم ریاضی ایفا می‌کند؛ چرا که دانش‌آموز باید از میان راهبردهای مختلف، راه‌حل مناسب را بر پایه فهم خود انتخاب کند. اما تصمیم‌سازی مهارتی اتفاقی نیست [۱۸]. این کار نیازمند آموزش هدفمند، تمرین عملی و نهاده‌سازی آن در فعالیت‌های ریاضی است.

از سوی دیگر، نظریه‌های یادگیری ساخت‌گرایانه، به‌ویژه دیدگاه پیاژه^۴ و ویگوتسکی^۵، بر اهمیت «ساختن فعال دانش توسط یادگیرنده» تأکید دارند [۱۵، ۲۵]. در ساخت‌وسازگرایی^۶، یادگیرنده نه دریافت‌کننده‌ی منفعل، بلکه سازنده‌ای فعال است که دانش را بر پایه‌ی تجربیات پیشین و تعامل با محیط می‌سازد. در این نظریات، اگرچه به‌طور صریح به «تصمیم‌سازی» اشاره نشده است، این مفهوم به‌شدت در هسته‌ی آن‌ها حضور دارد. در این چارچوب، تصمیم‌سازی می‌تواند به‌عنوان سازوکاری کلیدی در شکل‌گیری مفاهیم جدید تلقی شود.

یک پیامد مهم آموزش ساخت‌گرایانه و تصمیم‌محور، شکل‌گیری «طرحواره‌های ذهنی»^۷ منسجم و انعطاف‌پذیر است. طرحواره‌ها ساختارهایی ذهنی هستند که تجارب گذشته را سازمان‌دهی می‌کنند و راهنمای عمل در موقعیت‌های جدید هستند [۸]. همان‌طور که اسکمپ^۸ (۱۹۷۶) استدلال می‌کند، آموزش مبتنی بر درک رابطه‌ای (نه درک ابزاری) از طریق ایجاد طرحواره‌های انعطاف‌پذیر و فراهم‌آوردن فرصت‌های اکتشافی، زمینه‌ساز تصمیم‌سازی آگاهانه و درک عمیق ریاضی می‌شود [۲۱]. بنابراین، آموزش تصمیم‌سازی و فراهم‌کردن فرصت‌هایی برای انتخاب، می‌تواند باعث تقویت طرحواره‌های شناختی دانش‌آموزان شود که به نوبه‌ی خود یادگیری پایدار و باکیفیت را به دنبال خواهد داشت.

متأسفانه، در بسیاری از کلاس‌های ریاضی، آموزش بر انتقال الگوریتم‌های ثابت و پاسخ‌های از پیش تعیین‌شده متمرکز است. در نتیجه، فرصت‌های لازم برای تمرین تصمیم‌سازی و درگیری شناختی کاهش می‌یابد. همان‌طور که هیبرت^۹ و گروز^{۱۰} (۲۰۰۷) و بولر^{۱۱} (۱۹۹۸) نشان داده‌اند، این رویکرد منجر به یادگیری سطحی و طرحواره‌های ناقص می‌شود [۹، ۱۲]. مطالعه‌ی هاث^{۱۲} (۲۰۲۲) و همکاران نشان می‌دهد که بسیاری از ضعف‌های دانش‌آموزان در ریاضی ناشی از بدفهمی‌های مفهومی است و توانایی معلم در شناسایی و برخورد مناسب با این خطاها، عاملی کلیدی در بهبود یادگیری است [۱۳]. وقتی معلمان از ابزارهای ملموس

¹Cognitive processes

²Decision Making

³Decision Taking

⁴Piaget

⁵Vygotsky

⁶Constructivism

⁷Mental Schemas

⁸Skemp

⁹J. Hiebert

¹⁰Douglas A. Grouws

¹¹Boaler, J.

¹²Jessica Hoth

و فیزیکی مثل «کاشی‌های جبری»^{۱۳} استفاده می‌کنند، می‌توانند بدفهمی‌ها و تصورات نادرست دانش‌آموزان در جبر را اصلاح کنند و باعث شوند که درک مفهومی ریاضی دانش‌آموزان قوی‌تر و صحیح‌تر شود [۲۳]. این موضوع برای یک آموزش‌دهنده ریاضی بسیار با اهمیت است؛ تشکیل ناقص یا نادرست یک طرحواره می‌تواند به شدت یادگیری‌های بعدی فراگیران را تحت تأثیر قرار دهد و باعث بدفهمی‌های درازمدت در آن‌ها شود که مسئولیت یک آموزش‌دهنده ریاضیات را دوچندان می‌کند. در حالی که یک طراحی آموزشی متناسب با ساخت‌وسازگرایی، با تمرکز بر آموزش «تصمیم‌سازی» می‌تواند فهم ریاضی را عمیق‌تر کند و توانایی حل مسئله را در دانش‌آموزان پرورش دهد.

بر این اساس، این مقاله با هدف بررسی رابطه‌ی سه‌گانه میان تصمیم‌سازی، ساخت‌وسازگرایی و طرحواره‌های ذهنی، به تبیین نقش آن‌ها در بهبود روش تدریس ریاضی و ارتقای فرایند یاددهی-یادگیری می‌پردازد. در این راستا، با تکیه بر چارچوب‌های نظری و شواهد پژوهشی، سعی خواهد شد نشان داده شود که چگونه آموزش هدفمند تصمیم‌سازی با رویکرد ساخت‌گرایانه می‌تواند به شکل‌گیری طرحواره‌های مؤثر و در نهایت به بهبود عملکرد ریاضی دانش‌آموزان منجر شود.

۲. پیشینه‌ی پژوهش

در سال‌های اخیر، توجه به ساختن‌گرایی و مهارت‌های فراشناختی از جمله تصمیم‌گیری از طریق آموزش‌های ریاضی مورد توجه بوده است. سلیمی (۱۴۰۲) به کاوش در ارتباط میان تفکر ریاضی و مهارت‌های تصمیم‌گیری و حل مسئله در زندگی روزمره دانش‌آموزان می‌پردازد. این پژوهش تفکر ریاضی را به عنوان یک مهارت حیاتی برای حل مسائل روزمره و اتخاذ تصمیمات معرفی می‌کند [۲]. سلیمانی و همکاران (۱۳۹۸) نشان داده‌اند که آموزش با رویکرد ساختن‌گرایی شناختی بر یادگیری و یادداری دانش‌آموزان پایه‌ی ششم مؤثر است [۳]. در یک مطالعه‌ی مشابه، شاه‌ولی و همکاران (۱۳۹۷) با هدف بررسی تأثیر روش تدریس ساختن‌گرایی بر خلاقیت دانش‌آموزان پسر پایه‌ی ششم روی ۴۸ دانش‌آموز پسر نتیجه گرفتند روش ساختن‌گرایی به طور معناداری خلاقیت دانش‌آموزان را نسبت به روش سنتی افزایش می‌دهد. این بهبود ناشی از فعال‌سازی دانش‌آموزان در فرایند یادگیری است [۵]. با هدف تعیین تأثیر آموزش تفکر ریاضی بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان پایه‌ی دوم ابتدایی، رضاپور و همکاران (۱۳۹۵) پس از ۱۱ جلسه آموزش تفکر ریاضی، تأثیر معناداری را در عملکرد ریاضی دانش‌آموزان شرکت‌کننده مشاهده کردند [۶]. شونفلد^{۱۴} (۱۹۸۵) نشان داد که کنترل فراشناختی (شامل تصمیم‌گیری) هسته‌ی اصلی «رفتار ریاضی‌وار» است و آموزش صریح آن به عنوان بخشی از تفکر ریاضی ضروری است [۱۷]. ساخت‌وسازگرایی به عنوان یکی از نظریه‌های مسلط یادگیری، زمینه‌ای غنی برای طراحی آموزشی فراهم می‌کند. از دید استف^{۱۵} و گیل^{۱۶} (۱۹۹۵)، تصمیم‌گیری هسته‌ی مرکزی ساختارگرایی رادیکال است. آن‌ها استدلال می‌کنند دانش‌آموزان زمانی در تصمیم‌گیری ماهر می‌شوند که در فرایند ساخت دانش فعالانه درگیر شوند، حق خطا و بازنگری داشته باشند و توسط معلمی که تضاد شناختی ایجاد می‌کند هدایت شوند [۲۲].

از مهم‌ترین منابع ایجاد بدفهمی می‌توان تصویرهای ذهنی نامناسب، استنتاج‌های غلط و عدم تشکیل طرحواره‌های مناسب دانست [۱]. در این میان، مطالعات اندکی به تلاقی سه محور تصمیم‌سازی، ساخت‌وسازگرایی و طرحواره پرداخته‌اند. به‌ویژه در پژوهش‌های داخلی، کمتر دیده می‌شود که فرایند آموزش تصمیم‌سازی در بستر ساخت‌گرایانه تحلیل شود و اثر آن بر شکل‌گیری طرحواره‌های ذهنی بررسی گردد. این خلأ درک ما را از سازوکارهای یادگیری ریاضی ناقص باقی گذاشته است. نوآوری این مقاله در ارائه‌ی یک دیدگاه تلفیقی است که سه بعد مهم شناختی، آموزشی و ساختاری در یادگیری ریاضی را به هم پیوند می‌دهد. این رویکرد

¹³Algebra Tiles

¹⁴Schoenfeld, Alan

¹⁵Steffe, L. P.

¹⁶Gale, J.

نویسنه تنها درک بهتری از نقش تصميم‌سازي در کلاس درس ايجاد مي‌کند، بلکه راه را براي بازطراحي روش‌هاي تدريس بر پايه‌ي نظريه‌هاي يادگيري مدرن هموار مي‌سازد.

۳. چارچوب نظري و مدل مفهومي

در آموزش رياضي، کيفيت فرايند ياددهي-يادگيري به ميزان قابل توجهي به توانمدي‌هاي شناختي و فراشناختي دانش‌آموزان در فرايند حل مسئله و تصميم‌گيري وابسته است. اسکمپ (۱۹۷۶) دو نوع درک رياضي را معرفي کرد: درک رابطه‌اي^{۱۷} و درک ابزاري^{۱۸}. بر اساس تحليل‌هاي او، طرحواري‌هاي عميق معمولاً در نتيجه‌ي آموزش بر مبناي درک رابطه‌اي شکل مي‌گيرند^[۲۱]، که نيازمند تصميم‌سازي فعال و تعامل شناختي است. در اين راستا، سه مفهوم کليدي تصميم‌سازي و تصميم‌گيري، ساخت‌وسازگرايي در يادگيري و طرحواري‌هاي ذهني، به‌عنوان ارکان نظري مقاله‌ي حاضر، در تعامل با يکديگر بررسي مي‌شوند.

۱.۳. تصميم‌سازي و تصميم‌گيري در آموزش رياضي: تفاوت‌هاي ظريفي بين دو اصطلاح تصميم‌سازي و تصميم‌گيري وجود دارد. اين تفاوت بيش از يک ظرافت معنايي است. عبارت تصميم‌سازي در فرهنگ لغت آنلاين روانشناسي آپا^{۱۹} به اين صورت تعريف مي‌شود: «فرايند شناختي انتخاب بين دو يا چند گزينه، از گزينه‌هاي نسبتاً واضح تا گزينه‌هاي پيچيده». از طرفي، آندرياس^{۲۰} (۲۰۲۰) به وضوح توضيح مي‌دهد که تصميم‌گيري، عمل انتخاب بين دو يا چند مسير اقدام است^[۷]. به عبارت ديگر، تصميم‌سازي يک فرايند و تصميم‌گيري يک انتخاب است. تصميم‌گيري در حل مسئله‌هاي رياضي نيازمند ترکيب خلاقانه‌ي گزينه‌ها، ارزيابي نظام‌مند آن‌ها و انتخاب راه‌حل بهينه است^[۲۰]. از اين منظر مي‌توان گفت تصميم‌سازي از لحاظ ترتيب زماني قبل از تصميم‌گيري اتفاق مي‌افتد که بايد در آن، دانش‌آموز با طراحي گزينه‌ها، تحليل شرايط و برآورد پيامدها به ساختار ذهني روشني براي حل مسئله دست يابد.

۲.۳. نظريه ساخت‌وسازگرايي: ساخت‌وسازگرايي، به‌عنوان ديدگاي غالب در يادگيري معاصر، بر اين اصل استوار است که يادگيرنده دانش را به‌صورت فعال و در تعامل با محيط خود مي‌سازد^[۱۵]. در اين نظريه، معلم نقش راهنما و تسهيل‌گر را دارد و دانش‌آموز، از طريق تجربه، کاوش و بازانديشي، مفاهيم را درون‌سازي مي‌کند. مطابق با نظريه‌هاي ويگوتسکي و پياژه، يادگيري زماني معنادارتر است که در بسترهاي اجتماعي، فرهنگي و مسئله‌محور اتفاق بيفتد. يادگيري تصميم‌سازي را مي‌توان يکي از مصاديق عملي ساخت‌وسازگرايي تلقی کرد؛ زيرا دانش‌آموز با فعاليت‌هاي باز، تحليل موقعيت‌هاي متغير و تجربه‌ي پيامدهاي انتخاب خود، به درک عميق‌تري از مفاهيم مي‌رسد^[۱۴]. به عنوان مثال، چنانچه دانش‌آموز پس از انجام تلاش‌هاي مکرر و بازيبندي‌هاي شناختي (آزمودن تصميم‌هاي مختلف و ساخت مسير)، بتواند ميان روش دلتا و روش مربع کامل کردن ارتباط مفهومي برقرار سازد، درک عميق‌تر و پايدارتري از مفهوم مورد نظر کسب خواهد کرد. در اين فرايند، وي با ارزيابي و اصلاح تصميم‌هايش به اين نتيجه نهايي مي‌رسد که روش دلتا، شکل فشرده‌شده و تعميم‌يافته‌ي روش مربع کامل کردن است (تصميم‌گيري).

۳.۳. طرحواري‌هاي ذهني و فرايند سازمان‌دهي شناختي: طرحواري‌ها، ساختارهاي شناختي پايداري هستند که تجربه‌هاي يادگيري را سازمان‌دهي کرده و امکان بازيابي و انتقال دانش را در موقعيت‌هاي جديد فراهم مي‌کنند^[۸]. درگير کردن دانش‌آموز در حل مسئله به نحوي که به ساخت طرحواري‌هاي پايدار بينجامد، موجب تسهيل استفاده‌ي کارآمد از دانش پيشين در موقعيت‌هاي جديد مي‌شود^[۲۴]. زماني که دانش‌آموزان بتوانند تصميمات خود را مبتني بر منطق رياضي و تجربه‌ي قبلي سازمان دهند، طرحواري‌هاي مؤثري شکل

¹⁷Relational

¹⁸Instrumental

¹⁹APA Dictionary of Psychology: <https://dictionary.apa.org/>

²⁰Federico de Andreis

می‌گیرد که موجب تثبیت مفاهیم می‌گردد و به دانش‌آموز کمک می‌کند در مواجهه با موقعیت‌های جدید، از دانش پیشین خود به صورت کارآمد استفاده کند.

۴.۳. پیوند مفهومی سه مؤلفه: بر اساس مبانی نظری یادشده، آموزش تصمیم‌سازی به دانش‌آموز، موجب درگیری شناختی فعال و فراهم‌آوردن زمینه‌ای برای درونی‌سازی دانش در چارچوب یادگیری ساخت‌گرایانه می‌شود. در شکل (۱)، مؤلفه‌های اصلی سبک تدریس با مستطیل‌هایی کمرنگ مشخص شده‌اند.

در این الگو، معلم با طراحی یک محیط یادگیری ساخت‌گرایانه، دانش‌آموز را در معرض تعارض‌های شناختی قرار می‌دهد. در نتیجه، یادگیرنده در تعامل فعال با معلم و مفاهیم ریاضی، به سوی کشف و انتخاب روش‌های حل مسئله همسو با اهداف آموزشی هدایت می‌شود. در این فرایند، او با یافتن گزینه‌های مختلف بر اساس موقعیت مسئله، به آزمون و خطا، استدلال منطقی و ارزیابی ذهنی گزینه‌ها ترغیب می‌شود. تلاش برای تنظیم و اصلاح این روش‌ها، خود به مثابه‌ی فرایند آموزش تصمیم‌سازی عمل می‌کند. پس از انتخاب راه‌حل و مشاهده‌ی نتایج، معلم با ارائه‌ی بازخوردهای هدفمند، مسیر یادگیری را هدایت می‌کند. در صورتی که بازخوردها بر ناکارآمدی راه‌حل دلالت داشته باشند، فراگیر ناگزیر به بازنگری و اصلاح راهبردهای خود می‌شود؛ موضوعی که او را در چرخه‌ای از انتخاب، ارزیابی و بهینه‌سازی راه‌حل‌ها قرار می‌دهد.

فرایند آموزش تصمیم‌سازی شامل انتخاب راه‌حل مناسب، تحلیل خطاها و ارزیابی گزینه‌های ممکن، در بستر محیطی ساخت‌گرایانه، دانش‌آموز را در موقعیت‌های خلق معنا، آزمودن فرضیه و پرورش تفکر مستقل قرار می‌دهد. این تعامل فعال، موجب شکل‌گیری طرحواره‌های شناختی غنی‌تر و پویاتر شده و در نهایت به یادگیری عمیق‌تر و پایدارتر منجر می‌شود.

در این مدل، تصمیم‌سازی و تصمیم‌گیری به مثابه‌ی فرایندهایی شناختی و فعال، تحت تأثیر زمینه‌های مسئله‌محور، نیازمند آموزش هدفمند هستند. در چنین حالتی، یادگیرنده از طریق مشارکت در بحث، مشاهده‌ی راه‌حل‌های متنوع و تعامل با دیگر فراگیران، به ساخت دانش خود پرداخته و بینش ریاضی خود را ارتقاء می‌دهد.

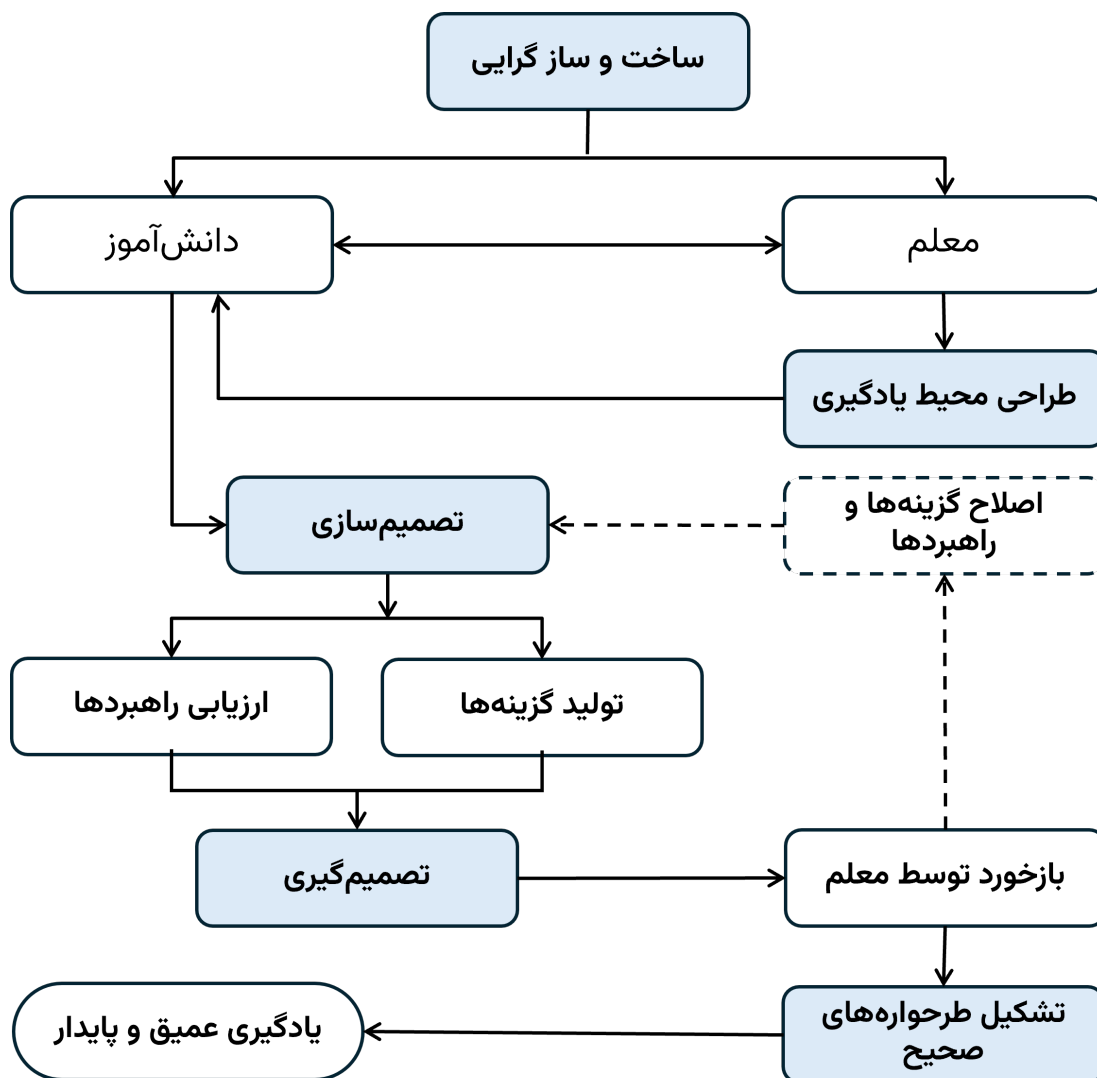
۴. تحلیل کاربردی چارچوب نظری در آموزش ریاضی

۱.۴. نقش معلم در آموزش تصمیم‌سازی با رویکرد ساخت‌وسازگرایی: در رویکرد ساخت‌گرایانه، معلم دیگر صرفاً انتقال‌دهنده‌ی دانش نیست، بلکه تسهیل‌گر موقعیت‌های یادگیری است؛ موقعیت‌هایی که در آن‌ها دانش‌آموز با چالش‌های تصمیم‌گیری مواجه می‌شود [۱]. بر اساس دیدگاه ویگوتسکی، یادگیری زمانی معنادار خواهد بود که در «منطقه‌ی رشد تقریبی»^{۲۱} رخ دهد؛ یعنی جایی که دانش‌آموز در مرز میان دانسته‌های فعلی خود و توانایی‌هایی که با راهنمایی قابل دستیابی‌اند، قرار می‌گیرد.

آموزش تصمیم‌سازی فرصتی برای فعال‌سازی فرایندهای شناختی در این مرز یادگیری فراهم می‌سازد. در این بافت، نقش معلم تنها در طراحی محتوای ریاضی خلاصه نمی‌شود؛ بلکه او باید سناریوهایی آموزشی طراحی کند که در آن‌ها دانش‌آموز ناگزیر به انتخاب، ارزیابی و بازنگری راه‌حل‌ها باشد [۱۰]. چنین فعالیت‌هایی، به صورت مستقیم یادگیرنده را در فرایند تصمیم‌سازی درگیر می‌کنند و زمینه‌ساز یادگیری عمیق‌تر و پایدارتری می‌شوند.

۲.۴. سناریوهایی از کلاس درس ریاضی برای آموزش تصمیم‌سازی: برای تحقق عملی چارچوب نظری، نمونه‌هایی از موقعیت‌های کلاسی ارائه می‌شود که در آن‌ها معلم از دانش‌آموزان می‌خواهد در موقعیت‌های گوناگون تصمیم‌سازی کنند. سناریو ۱: در تمرین هندسه، مسئله‌ای مطرح می‌شود که می‌توان با استفاده از مثلثات یا مساحت حل کرد. معلم از دانش‌آموزان می‌خواهد دو روش را بررسی و بهترین راه را با دلایل منطقی انتخاب کنند (انتخاب روش حل مسئله).

²¹Zone of Proximal Development (ZPD)



شکل ۱: مدل مفهومی تدریس با هدف آموزش تصمیم‌سازی بر اساس نظریه‌ی ساخت‌وسازگرایی

سناریو ۲: چند پاسخ مختلف از دانش‌آموزان در حل معادله‌ای ارائه می‌شود. از دانش‌آموزان خواسته می‌شود بررسی کنند کدام پاسخ صحیح است و چرا، و سپس تصمیم بگیرند کدام مسیر حل را معتبر بدانند (تحلیل خطا).

سناریو ۳: معلم از دانش‌آموزان می‌خواهد با توجه به مبحث «تابع»، یک مسئله طراحی کنند که در آن حل‌کننده ناچار به تصمیم‌گیری میان دو روش تحلیلی و گرافیکی باشد (طراحی سؤال).

این سناریوها، دانش‌آموزان را در معرض تجربه‌ی تصمیم‌سازی فعال قرار می‌دهند و تفکر فراشناخت آن‌ها را درگیر می‌کنند [۲۶].

۳.۴. تأثیر تصمیم‌سازی بر شکل‌گیری طرحواره‌های ذهنی: تصمیم‌سازی موجب «معنادار شدن تجربه» برای دانش‌آموز می‌شود. هر زمان که دانش‌آموز بین چند گزینه انتخاب می‌کند و بازخوردی از نتایج آن تصمیم دریافت می‌کند، ساختار ذهنی خود را بازسازی یا تقویت می‌کند. این همان فرایند شکل‌گیری یا اصلاح طرحواره‌هاست [۱۶، ۱۱].

۴.۴. تأثیر بر طراحی فعالیت‌های آموزشی و روش تدریس معلمان: از این چارچوب نظری می‌توان برای بازطراحی برنامه‌ی درسی و فعالیت‌های کلاسی بهره برد. به‌طور خاص:

فعالیت‌ها باید چند راه‌حل‌پذیر و چندمعنایی باشند تا تصمیم‌سازی را فعال کنند [۱۹]. ارائه‌ی بازخورد کیفی در مسیر تصمیم‌گیری دانش‌آموز بسیار مهم است. معلم باید پرسش‌هایی بپرسد که بر استدلال، ارزیابی و انتخاب تأکید داشته باشد، نه فقط پاسخ صحیح. از این منظر، آموزش تصمیم‌سازی تنها یک راهبرد یادگیری نیست، بلکه یک محور اساسی طراحی تدریس اثربخش در آموزش ریاضی محسوب می‌شود.

۵. گزارش کیفی یک تجربه‌ی مبتنی بر نظریه‌ی ساخت‌وسازگرایی و آموزش تصمیم‌سازی

در سال تحصیلی ۱۴۰۳، مطالعه‌ای کیفی توسط نگارنده در کلاس ریاضی پایه‌ی دهم انسانی با دانش‌آموزانی که به‌طور عمومی دچار ضعف شدید در ریاضیات بودند، اجرا شد. اغلب دانش‌آموزان فاقد انگیزه، هدف، برنامه‌ریزی فردی و حتی امید به یادگیری بودند. بخشی از آنان تنها برای حضور فیزیکی در کلاس شرکت می‌کردند و هیچ مشارکت فعالی در فرایند آموزشی نداشتند. این زمینه، فرصتی را برای طراحی و اجرای یک الگوی آموزشی مبتنی بر نظریه‌ی ساخت‌وسازگرایی فراهم آورد.

مرحله‌ی اول: گفت‌وگوی شناختی-عاطفی برای بازسازی نگرش‌ها در مهرماه و هفته‌ی اول آبان، آموزش رسمی ریاضی موقتاً کنار گذاشته شد و گفت‌وگوهایی غیررسمی با دانش‌آموزان داوطلب و علاقه‌مند حول موضوعاتی چون خودباوری، مسئولیت‌پذیری در تصمیم‌گیری و شناسایی توانمندی‌های فردی شکل گرفت. عمده‌ی این گفتمان‌ها بر محور ترس و اضطراب نهفته در افکار فراگیران، ترغیب آن‌ها به پذیرش ریاضیات به‌عنوان بخشی جدایی‌ناپذیر از آموزش عمومی، اهمیت آن در مشاغل آینده و نیز بدفهمی‌های رایج صورت گرفت. این مباحث با هدف سوق دادن فراگیران به تصمیم آگاهانه برای تغییر نگرش و پذیرش مسئولیت یادگیری مطرح شد. بدین ترتیب نخستین گام‌های آموزش تصمیم‌سازی برداشته شد. نمونه‌هایی از محورهای گفتگو در ادامه آورده شده است:

- غلبه بر ترس شرط اولیه‌ی یادگیری است، زیرا ترس نقش یک عامل بازدارنده را ایفا می‌کند.
- بدون اراده‌ی کافی و تصمیم قطعی برای یادگیری از سوی فراگیران، تلاش‌های معلم به نتیجه‌ی مؤثر نخواهد رسید.
- بسیاری از خطاهای گذشته ناشی از بدفهمی است، نه ناتوانی فراگیران در آموختن ریاضی. به عنوان مثال، هنگامی که از دانش‌آموزان خواسته شد مقدار $5x + 1$ را به ازای $x = 2$ محاسبه کنند، آنچه مشاهده شد عبارت بود از: $5 \times 2 + 1$. همچنین در محاسبه‌ی مقدار x^2 به ازای $x = 3$ ، پاسخ اکثر فراگیران 6 است که ناشی از درک نادرست تفاوت بین توان و ضرب است.

این مرحله، نقش آماده‌سازی روان‌شناختی برای درگیر کردن دانش‌آموزان در سطح «منطقه‌ی رشد تقریبی» ویگوتسکی را ایفا می‌کند؛ جایی که یادگیرنده از طریق تعامل با معلم در آستانه‌ی ورود به فرایند یادگیری معنادار قرار می‌گیرد. همچنین ترغیب به تغییر شیوه‌ی تفکر و تصحیح خطاها همراه با تأکید بر انتخاب آگاهانه‌ی مسیرهای رسیدن به پاسخ، به‌عنوان بخشی از فرایند تصمیم‌سازی در چرخه‌ی بازخورد شکل (۱) می‌تواند مورد توجه قرار بگیرد.

مرحله‌ی دوم: طراحی تکالیف توصیفی و آغاز آموزش تصمیم‌سازی در گام بعد، مجموعه‌ای از تکالیف توصیفی مبتنی بر محتوای کتاب درسی طراحی شد. این تکالیف دارای چند ویژگی اساسی بودند: (۱) در سطح شناختی پایه‌ی دانش‌آموزان ضعیف طراحی شدند تا دسترس‌پذیر باشند، (۲) به‌جای استفاده‌ی مستقیم از فرمول‌های جبری، در قالب روایت‌ها و موقعیت‌های روزمره بیان شدند تا دانش‌آموزان بتوانند ارتباط شخصی برقرار کنند، (۳) ساختار مسأله‌ها به‌گونه‌ای بود که دانش‌آموز ناگزیر می‌شد بین چند استدلال یا راه‌حل تصمیم بگیرد؛ بدین ترتیب عنصر «آموزش تصمیم‌سازی» درون فعالیت‌های ریاضی گنجانده شد. نمونه‌ای از این مسائل به شرح زیر است:

- سه دوست برای خرید یک کتاب کمک‌آموزشی پول‌هایشان را روی هم می‌گذارند. علی ۲۰ هزار تومان دارد، سارا دو برابر او پول دارد و مریم ۱۰ هزار تومان کمتر از علی دارد. قیمت کتاب ۸۰ هزار تومان است. بررسی کنید آیا مجموع پول آن‌ها برای خرید کافی است یا خیر و توضیح دهید چگونه به نتیجه رسیدید.
- بازیکنی با شیب ۳۰ درجه از فاصله‌ی صد متری به سمت دروازه توپی را شوت می‌کند. اگر حداکثر ارتفاع توپ ۵ متر باشد، محل فرود توپ را بررسی کنید.
- یک مخزن آب می‌تواند یک ساختمان ۴ طبقه را به مدت ۶ روز تأمین کند. اگر ساختمان ۶ طبقه باشد، همین مخزن برای چند روز کافی خواهد بود؟
- دانش‌آموزی در ۴ امتحان ریاضی به ترتیب نمره‌های ۸، ۱۲، ۱۰ و ۱۵ گرفته است. او برای قبولی نیاز به معدل ۱۰ دارد. بررسی کنید آیا قبولی او قطعی است یا هنوز در معرض خطر است؟

این‌گونه تکالیف علاوه بر تقویت مهارت حل مسأله، دانش‌آموزان را در موقعیت‌هایی قرار می‌دهند که نیازمند انتخاب، ارزیابی و تصمیم‌گیری آگاهانه هستند. بنابراین نقش آن‌ها صرفاً تمرین ریاضی نیست، بلکه تمرینی در «تصمیم‌سازی» و ایجاد مسئولیت فردی در فرایند یادگیری به شمار می‌رود. در این مرحله، امتیازدهی نیز به نحوی انجام شد که اگر دانش‌آموز بتواند خطای خود را شناسایی کند، امتیاز بالاتری کسب می‌کرد و اگر دیگری خطا را بیابد، فرد پاسخ‌دهنده می‌بایست دلیل خطا را توضیح دهد. این فرایند، دانش‌آموزان را به درون‌نگری شناختی و تحلیل خودمحورانه سوق می‌دهد و مقدمات شکل‌گیری مهارت تصمیم‌سازی را فراهم می‌آورد.

مرحله‌ی سوم: تحلیل روش‌ها، تصمیم‌سازی و تعمیم طرحواره‌ها در ادامه‌ی مسیر، مشخص شد بسیاری از پاسخ‌های صحیح ارائه‌شده، گرچه منجر به نتیجه‌ی درست می‌شدند، اما از انسجام ریاضیاتی لازم برخوردار نبودند. در این مرحله، تمرکز کلاس بر توصیف گام‌به‌گام روش حل، بحث جمعی پیرامون راه‌حل‌ها و تصمیم‌گیری گروهی در مورد روش بهینه قرار گرفت. دانش‌آموزان موظف بودند روش حل خود را به‌صورت شفاهی و با جزئیات کامل شرح دهند و سایر دانش‌آموزان نیز در مورد نقاط قوت و ضعف آن اظهارنظر کنند. نمونه‌هایی از این مباحث عبارت‌اند از:

- معمولاً می‌توانند در مسائل ساده جواب نهایی را با محاسبات ذهنی به‌دست آورند، اما در تبدیل محاسبات به یک روند ریاضیاتی مشکل دارند. به عنوان مثال، در یافتن مقدار عددی «اگر دو برابر عددی منهای ۷ برابر ۵ باشد، آن عدد چیست؟» مشکلی ندارند، اما در یافتن « $2x - 7 = 5$ » به شکل نوشتار رسمی ریاضی ناتوان هستند.
- پس از تدریس روش دلتا برای حل معادلات درجه دو، صرفاً به شکل جایگذاری مقادیر در فرمول ریاضی از آن استفاده می‌کنند، اما نمی‌توانند ارتباط مفهومی برقرار کنند و هیچ ارتباطی بین روش مربع کامل کردن و روش دلتا نمی‌بینند.
- در حل معادلات گویا، عمل مخرج مشترک را صرفاً با ضرب مخرج‌ها انجام می‌دهند، ولی برتری ک.م.م (کوچکترین مضرب مشترک) را درک نمی‌کنند.

به منظور مقابله با ضعف‌های موجود و پرورش تصمیم آگاهانه، به توصیف چگونگی برخورد با مثال اول می‌پردازیم: در این مورد از فراگیران خواسته می‌شود آنچه را که به‌طور ذهنی به جواب رسیده‌اند، بارها و بارها مکتوب کنند. پس از موفقیت در این گام، خواسته می‌شود محاسباتشان را با مقادیر مختلف بیازمایند و یک الگوی مشترک بیابند. معلم به‌عنوان تسهیل‌گر تا رسیدن به الگوی « $ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$ » فراگیران را راهنمایی می‌کند، اما پذیرفتن رابطه‌ی نهایی براساس تجربه‌ی یادگیری به‌طور آگاهانه صورت می‌گیرد. در این تجربه می‌توان به دستاوردهای زیر اشاره کرد:

- این تعامل منجر به فعال‌سازی طرحواره‌های ذهنی نهفته و تقویت طرحواره‌های جدید می‌شود؛ زیرا دانش‌آموزان می‌آموزند چگونه از یافته‌های پیشین خود دفاع کرده و از آن‌ها در حل مسائل جدید استفاده کنند. همچنین تعمیم راه‌حل‌ها به مسائل مشابه، به‌طور مستقیم توانایی تصمیم‌سازی را در آن‌ها پرورش می‌دهد.

- تحریک شناختی و اعتماد به نفس: جستجوی خطا در پاسخ‌های خود، فعالیت مغزی و شناختی دانش‌آموزان را افزایش می‌دهد و موجب شکل‌گیری احساس کاوشگری و خودکارآمدی می‌شود.
 - شناسایی خطاهای دیگران نه تنها قدرت تحلیل‌گری را تقویت می‌کند، بلکه مشارکت مؤثر در یادگیری جمعی را در دانش‌آموزان بالا می‌برد.
 - تقویت قدرت تصمیم‌سازی: تعمیم راه‌حل‌ها به موقعیت‌های جدید و تحلیل گزینه‌های مختلف، مصداقی از تصمیم‌سازی در زمینه ریاضی است که به صورت تدریجی آموزش داده می‌شود.
 - توسعه مهارت‌های زبانی و توصیفی: شرح شفاهی و نوشتاری راه‌حل‌ها منجر به تقویت مهارت استدلال شفاهی و سازمان‌دهی ذهنی مطالب در دانش‌آموزان می‌شود.
- این تجربه‌ی کیفی نشان می‌دهد که با استفاده از رویکرد ساخت‌گرایانه و تمرکز بر تصمیم‌سازی در فرایند یادگیری، می‌توان حتی در کلاس‌هایی با انگیزه‌ی پایین، مسیر تحول شناختی و آموزشی پایدار ایجاد کرد؛ مسیری که نه تنها به یادگیری ریاضی، بلکه به پرورش تفکر، خودباوری و مسئولیت‌پذیری نیز منجر می‌شود.

۶. بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله تلاش شد با ترکیب سه مؤلفه‌ی نظری تصمیم‌سازی، ساخت‌وسازگرایی و طرحواره‌های ذهنی، مدلی مفهومی برای بهبود فرایند یاددهی-یادگیری در آموزش ریاضی طراحی و تحلیل شود. بر پایه‌ی مبانی نظری، آموزش مهارت‌های تصمیم‌سازی به دانش‌آموزان، زمانی اثربخش خواهد بود که در بستری از یادگیری فعال و ساخت‌گرایانه صورت گیرد [۱۴]. این فرایند باعث شکل‌گیری تدریجی طرحواره‌های ذهنی پایدار می‌شود که نقشی کلیدی در درک عمیق مفاهیم ریاضی دارد.

تحلیل سناریوهای آموزشی نشان داد که اگر معلمان با آگاهی از مراحل تصمیم‌سازی در طراحی فعالیت‌های کلاسی، دانش‌آموزان را در موقعیت‌های «تصمیم‌محور» قرار دهند، هم مشارکت یادگیرندگان افزایش یافته و هم فرایند یادگیری شخصی‌تر و عمیق‌تر خواهد شد. تصمیم‌سازی، در این چارچوب، دیگر فقط یک مهارت جانبی نیست، بلکه به‌عنوان بخشی از سازوکار اصلی تفکر ریاضی عمل می‌کند.

۷. پیشنهادات

در راستای ارتقای آموزش ریاضی، چند راهکار کاربردی پیشنهاد می‌شود. نخست، گنجاندن مهارت تصمیم‌سازی به‌عنوان یکی از اهداف کلیدی برنامه‌ی درسی ضروری است؛ چرا که این مهارت نقش مؤثری در تعمیق یادگیری مفاهیم ریاضی دارد. همچنین، بازآموزی و توانمندسازی معلمان باید بر طراحی فعالیت‌های ساخت‌گرایانه‌ای متمرکز باشد که فرصت‌های تصمیم‌سازی را برای دانش‌آموزان فراهم می‌آورد. در این مسیر، بهره‌گیری از ابزارهای ارزیابی کیفی مانند مصاحبه‌ها، ژورنال‌های یادگیری و نقشه‌های مفهومی، به‌جای اتکای صرف به آزمون‌های سنتی، می‌تواند در سنجش رشد طرحواره‌های ذهنی دانش‌آموزان مؤثرتر باشد. علاوه بر این، منابع آموزشی باید با تکیه بر سناریوهای تصمیم‌محور توسعه یابند؛ به‌گونه‌ای که مسائل باز و چندگزینه‌ای در آن‌ها گنجانده شود تا دانش‌آموزان فرصت انتخاب، تحلیل و استدلال‌های متنوع پیدا کنند.

یکی از مهم‌ترین چالش‌های اجرای رویکردهای نوین آموزشی در کلاس‌های ریاضی، نبود زمان کافی برای تدریس کامل و عمیق محتوای کتاب درسی است. گزارش‌های انجمن ریاضی ایران نیز نشان می‌دهد که کاهش ساعات رسمی تدریس ریاضی در سال‌های اخیر به یکی از دغدغه‌های اصلی معلمان و متخصصان آموزش ریاضی تبدیل شده است [۴]. رویکرد مطالعه شده در این نوشتار نیز از این قاعده مستثنی نیست؛ با توجه به زمان‌بر بودن چرخه‌ی بازخورد و اصلاح خطاها، الزام معلمان به تدریس کامل کتب درسی مانع از اجرای مؤثر این رویکرد خواهد شد.

در ادامه‌ی این مسیر، پژوهش‌های آتی می‌توانند چارچوب نظری یادگیری مبتنی بر تصمیم‌سازی را غنا بخشند. انجام مطالعات میدانی در کلاس‌های درس با هدف بررسی تأثیر آموزش تصمیم‌سازی بر شکل‌گیری طرحواره‌های ذهنی، از جمله این جهت‌گیری‌هاست. همچنین طراحی پژوهش‌های تجربی درباره‌ی تأثیر سبک‌های گوناگون تدریس ساخت‌گرایانه بر کیفیت تصمیم‌سازی ریاضی دانش‌آموزان و توسعه‌ی مدل‌های سنجش فرایند تصمیم‌سازی، می‌تواند به شکل‌گیری رویکردهای نوین در آموزش ریاضی بینجامد.

پیوست: نمونه‌هایی از مسائل تصمیم‌سازی در ریاضیات دبیرستان

مسائل زیر با هدف تقویت مهارت «تصمیم‌سازی» و در راستای چارچوب نظریه‌ی ساخت‌وسازگرایی طراحی شده‌اند. در هر مسئله، دانش‌آموز با سناریویی مواجه می‌شود که نیازمند ارزیابی گزینه‌های مختلف، تحلیل هزینه-فایده یا انتخاب راهبرد بهینه بر اساس شرایط مسئله است. این فرایند به شکل‌گیری طرحواره‌های ذهنی انعطاف‌پذیر و درک رابطه‌ای مفاهیم ریاضی منجر می‌شود. نمونه ۱ (انتخاب راهبرد بهینه برای حل یک دستگاه معادلات): دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - y = 3 \end{cases}$$

گزینه‌های پیش‌رو:

(۱) روش حذفی (جمع‌بندی یا تفریق معادلات)

(۲) روش جایگزینی (حل یک معادله بر حسب یک متغیر و جایگزینی در معادله دیگر)

(۳) روش رسم نمودار (پیدا کردن نقطه تقاطع دو خط)

سؤال تصمیم‌سازی: کدام روش را برای حل این دستگاه خاص انتخاب می‌کنید و دلیل شما برای این انتخاب چیست؟ (ضرایب متغیرها، سادگی محاسبات و احتمال خطا را در تصمیم خود تحلیل کنید). هدف: این مسئله دانش‌آموز را وادار می‌کند تا قبل از اقدام به حل، راهبردهای مختلف را ارزیابی کرده و بر اساس ساختار خاص مسئله، تصمیمی آگاهانه بگیرد.

نمونه ۲ (تصمیم‌گیری در بهینه‌سازی مساحت با محیط ثابت): شما ۴۰ متر حصار دارید تا یک محوطه مستطیلی برای حیوانات خانگی خود ایجاد کنید. برای صرفه‌جویی در هزینه و مواد، می‌خواهید مساحت این محوطه حداکثر باشد. سؤال تصمیم‌سازی: برای دستیابی به بیشترین مساحت، باید بین اشکال مختلف تصمیم بگیرید:

(۱) یک مستطیل با ابعاد مختلف (مثلاً 10×10 ، 8×12 ، 5×15 و ...)

(۲) یک مربع

(۳) (به عنوان یک گزینه پیشرفته) آیا استفاده از یک شکل دیگر (مانند دایره) با این متراژ حصار، مساحت بیشتری می‌دهد؟

هدف: این مسئله دانش‌آموز را به کشف رابطه بین محیط و مساحت وادار می‌کند و فرایند تصمیم‌سازی مبتنی بر کاوش و استدلال را تقویت می‌کند.

نمونه ۳ (انتخاب مدل ریاضی برای یک مسئله دنیای واقعی): یک شرکت تاکسی‌رانی دو طرح قیمت‌گذاری دارد:

- طرح الف: هزینه ثابت ۱۰,۰۰۰ تومان به اضافه ۲,۰۰۰ تومان به ازای هر کیلومتر
- طرح ب: هزینه ثابت ۵,۰۰۰ تومان به اضافه ۳,۰۰۰ تومان به ازای هر کیلومتر

سؤال تصمیم‌سازی: کدام طرح را برای یک سفر درون‌شهری انتخاب می‌کنید؟ برای تصمیم‌گیری خود:

(۱) یک مدل ریاضی (تابع) برای هر طرح بنویسید

(۲) نمودار این دو تابع را رسم کنید (یا نقطه برابری آن‌ها را محاسبه کنید)
 (۳) بر اساس مسافت تقریبی سفرهای معمول خود، تصمیم نهایی خود را توجیه کنید
 هدف: این مسئله مدل‌سازی ریاضی و تحلیل توابع را در بستری از تصمیم‌گیری روزمره قرار می‌دهد.
 نمونه ۴ (تحلیل خطا و تصمیم برای تصحیح راهبرد): دو دانش‌آموز برای حل معادله $\frac{x}{x-2} = \frac{3}{x-2}$ پاسخ‌های زیر را ارائه داده‌اند:

- دانش‌آموز اول: با حذف مخرج‌های مشترک به نتیجه $x = 3$ رسیده است
- دانش‌آموز دوم: با ضرب طرفین در $(x-2)^2$ به نتیجه $x(x-2) = 3(x-2)$ و سپس $x^2 - 5x + 6 = 0$ رسیده و مقادیر $x = 2$ و $x = 3$ را به دست آورده است

سؤال تصمیم‌سازی:

- (۱) به نظر شما کدام راهبرد صحیح است؟ چرا؟
 - (۲) خطای موجود در راهبرد نادرست چیست و چگونه می‌توان از آن اجتناب کرد؟
 - (۳) اگر شما معلم باشید، چگونه این تعارض را برای دانش‌آموزان توضیح می‌دهید؟
- هدف: این مسئله مستقیماً به «تحلیل خطا» اشاره دارد و دانش‌آموز را در نقش یک داور قرار می‌دهد.
 نمونه ۵ (انتخاب روش حل برای یک مسئله هندسی): در مثلث قائم‌الزاویه ABC که در نقطه B قائمه است، وتر AC به طول ۱۰ سانتیمتر و یکی از اضلاع دیگر ۶ سانتیمتر است. طول ضلع سوم را پیدا کنید.
 گزینه‌های حل:

- (۱) استفاده مستقیم از قضیه فیثاغورث
- (۲) شناسایی یک سه‌تایی فیثاغورثی معروف (۶، ۸، ۱۰)

سؤال تصمیم‌سازی:

- (۱) شما کدام روش را انتخاب می‌کنید؟ چرا؟
 - (۲) اگر اعداد به گونه‌ای بودند که سه‌تایی فیثاغورثی نبودند، آیا تصمیم شما تغییر می‌کرد؟
 - (۳) سرعت، دقت و اطمینان از صحت پاسخ در هر روش را چگونه ارزیابی می‌کنید؟
- هدف: این مسئله باعث می‌شود دانش‌آموز به «ابزارهای مختلف در جعبه ابزار ریاضی» خود فکر کند و بهترین ابزار را انتخاب کند.

سپاس‌گزاری

این نوشته به همکار و دوست عزیزم جناب آقای همراه درخشان، که جویبار دانش و سخاوتش زمینه‌ی رویش این تحقیق را فراهم آورد، با سپاس و احترام تقدیم می‌شود.

مراجع

۱. س.ح. علم‌الهدایی و م. علی‌زاده، اصول آموزش ریاضی، نشر نما، ۱۴۰۲.

۲. س. سلیمی، بررسی تاثیر تفکر ریاضی بر توانایی‌های تصمیم‌گیری و حل مسئله در زندگی روزمره دانش‌آموزان، سومین کنفرانس بین‌المللی علوم تربیتی، روانشناسی، مشاوره، آموزش و پرورش، ۱۴۰۲.
۳. ش. سلیمانی، ا. احمدی و ق. احقر، اثربخشی آموزش با رویکرد ساختن‌گرایی شناختی بر یادگیری، یادداری دانش‌آموزان پایه‌ی ششم/ابتدایی در درس ریاضی، پژوهش در یادگیری آموزشگاهی و مجازی، ۲۵ (۱۳۹۸)، ۲۵-۳۴.
۴. م. صال‌مصلحیان، کاهش ساعات درسی ریاضی مدرسه‌ای - ره به کجا می‌برد؟، خبرنامه انجمن ریاضی ایران، دوره ۴۳، شماره ۲، ۱۴۰۱.
۵. ع. شاه‌ولی، ر. پاشا، س. بختیارپور، ب. مکوندی و ع. حیدرئی، تاثیر روش تدریس ساختن‌گرایی بر خلاقیت در دانش‌آموزان سلامت روان کودک (روان کودک)، ۵ (۱۳۹۷)، شماره ۲، ۱۸۵-۱۹۴.
۶. ی. رضاپورمیرصالح، م. دلاوری و م. سلیمانی، اثربخشی آموزش تفکر ریاضی بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان پسر پایه دوم/ابتدایی، پژوهش در نظام‌های آموزشی، ۱۰ (۱۳۹۵)، شماره ۳۵، ۱۶۳-۱۸۶.
7. F. de Andreis, *A Theoretical Approach to the Effective Decision-Making Process*, Open Journal of Applied Sciences, 10, 287-304, (2020).
8. J. R. Anderson, *Cognitive Psychology and its Implications*, 8th ed., Worth Publishers, (2013).
9. J. Boaler, *Open and closed mathematics: Student experiences and understandings*, J. Res. Math. Educ. **29** (1998), no. 1, 41-62.
10. M. Boekaerts and L. Corno, *Self-regulation in the classroom: A perspective on assessment and intervention*, Appl. Psychol. **54** (2005), no. 2, 199-231.
11. J. G. Greeno, *Number sense as situated knowing in a conceptual domain*, J. Res. Math. Educ. **22** (1991), no. 3, 170-218.
12. J. Hiebert and D. Grouws, *The effects of mathematics teaching on students' learning*, in Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, 371-404, (2007).
13. J. Hoth et al., *Identifying and dealing with student errors in the mathematics classroom: Cognitive and motivational requirements*, PMC, (2022).
14. D. H. Jonassen, *Instructional design models for well-structured and ill-structured problem-solving learning outcomes*, Educ. Technol. Res. Dev. **45** (1997), no. 1, 65-94.
15. J. Piaget, *Science of Education and the Psychology of the Child*, Viking, New York, (1970).
16. J. Piaget, *Psychology and Epistemology: Towards a Theory of Knowledge*, Penguin, (1971).
17. A. H. Schoenfeld, *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, (1985).
18. A. H. Schoenfeld, *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics*, Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, 334-370, (1992).
19. E. A. Silver, *Problem posing in mathematics education*, in Proc. PME Conf., (1995).
20. H. A. Simon, *The New Science of Management Decision*, Prentice-Hall, (1977).
21. R. R. Skemp, *Relational understanding and instrumental understanding*, Math. Teach. **77** (1976), 20-26.

22. L. P. Steffe and J. Gale (Eds.), *Constructivism in Education*, Lawrence Erlbaum Associates, (1995).
23. B. P. Stemele, Z. Jina Asvat, *Exploring Learner Errors and Misconceptions in Algebraic Expressions with Grade 9 Learners Through the use of Algebra Tiles*, African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 28(1), 153-170, (2024).
<https://doi.org/10.1080/18117295.2024.2334989>
24. J. Sweller, *Cognitive load during problem solving: Effects on learning*, Cogn. Sci. **12** (1988), no. 2, 257–285.
25. L. S. Vygotsky, *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*, Harvard Univ. Press, (1978).
26. B. J. Zimmerman, *Becoming a self-regulated learner: An overview*, Theory Pract. **41** (2002), no. 2, 64–70.



ANALYZING THE STRUCTURAL CHALLENGES OF SECONDARY MATHEMATICS EDUCATION IN IRAN THROUGH THE LENS OF THE SCALE OF LEVEL OF DIDACTIC CODETERMINACY

FAEZEH REZVANIFARD

High School Mathematics Teacher at the Ministry of Education

faezeh.rezvani.fard@gmail.com

Abstract. Mathematics education at the secondary level in Iran faces numerous structural challenges that limit students' opportunities for meaningful learning. This study seeks to identify the main barriers affecting the teaching–learning process of mathematics within the Iranian educational system. It also explores the gap between the goals outlined in national policy documents, such as the Fundamental Reform Document of Education, and the realities experienced in classrooms. The study is grounded in the framework of the Anthropological Theory of the Didactic, using the scale of levels of didactic codeterminacy. A narrative inquiry approach is adopted to examine mathematics teachers' perspectives in relation to global principles proposed by the National Council of Teachers of Mathematics. Data were collected through semi-structured interviews with six secondary mathematics teachers. The findings reveal multi-level challenges, from societal factors to pedagogical practices, including resource inequality, ineffective human resource policies, misalignment between teachers' expertise and assigned subjects, and the promotion of students without conceptual mastery. Overall, the results highlight the need for structural and systematic reform to improve the quality of mathematics education in Iran.

2020 Mathematics Subject Classification. 97B02, 97B11, 97D11

Keywords. Mathematics education, Curriculum, Structural challenges of the educational system, The scale of levels of didactic codeterminacy, NCTM principles

Date: Received 14-08-2025 Revised 10-10-2025 Accepted 17-11-2025 Available Online 20-12-2025

©Ferdowsi University of Mashhad.



تحلیل چالش‌های ساختاری آموزش ریاضی متوسطه در ایران با رویکرد سطوح سلسله‌مراتبی هم‌تعیینی تعلیم و تربیت

فائزه رضوانی فرد^۱

^۱ دکتری آموزش ریاضی، دبیر رسمی آموزش و پرورش
faezeh.rezvani.fard@gmail.com

چکیده. آموزش ریاضی در مقطع متوسطه ایران با چالش‌های ساختاری متعددی مواجه است که یادگیری معنادار را برای دانش‌آموزان محدود می‌کند. این پژوهش با هدف شناسایی موانع مؤثر بر فرایند یاددهی-یادگیری ریاضی در نظام آموزشی ایران و شکاف موجود میان اهداف اسناد کلان آموزشی (همچون سند تحول بنیادین) و واقعیت‌های کلاس درس می‌پردازد. پژوهش حاضر با بهره‌گیری از سطوح سلسله‌مراتبی هم‌تعیینی تعلیم و تربیت در چارچوب نظریه انسان‌شناسی تعلیم و تربیت (ATD) با رویکرد روایت‌پژوهی، دیدگاه‌های معلمان ریاضی را در پرتو اصول جهانی شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا (NCTM) تحلیل می‌کند. داده‌ها از طریق مصاحبه‌های نیمه‌ساختاریافته با شش معلم ریاضی جمع‌آوری شد. یافته‌ها نشان می‌دهد که چالش‌های اساسی در سطوح مختلف - از سطح کلان جامعه تا پداگوژی - وجود دارد که از جمله آن‌ها می‌توان به نابرابری‌های منطقه‌ای در دسترسی به منابع آموزشی، سیاست‌های ناکارآمد منابع انسانی، عدم تطابق تخصص معلمان با دروس تدریسی و ارتقای دانش‌آموزان بدون تسلط بر مفاهیم پایه ریاضی اشاره کرد. نتایج پژوهش بر ضرورت تحول ساختاری در نظام آموزشی تأکید داشته و نشان می‌دهد که بهبود کیفیت آموزش مستلزم اصلاح نظام‌مند در سطوح مختلف تصمیم‌گیری و اجرا است. یافته‌ها می‌تواند برای سیاست‌گذاران آموزشی، تدوین‌کنندگان برنامه درسی و معلمان در جهت بهبود کیفیت آموزش ریاضی در ایران راهگشا باشد.

2010 Mathematics Subject Classification. 97B02, 97B11, 97D11.

واژگان کلیدی. آموزش ریاضی، برنامه درسی، چالش‌های ساختاری نظام آموزشی، سطوح سلسله‌مراتبی هم‌تعیینی تعلیم و تربیت، اصول NCTM.
تاریخ: دریافت ۱۴۰۴/۰۵/۲۳، بازنگری ۱۴۰۴/۰۷/۱۸، پذیرش ۱۴۰۴/۰۸/۲۶، انتشار برخط ۱۴۰۴/۰۹/۲۹
نحوه ارجاع به این مقاله: ف. رضوانی فرد، تحلیل چالش‌های ساختاری آموزش ریاضی متوسطه در ایران با رویکرد سطوح سلسله‌مراتبی هم‌تعیینی تعلیم و تربیت، به سوی علوم ریاضی، ۵ (۱۴۰۴)، شماره ۱، ۳۸-۵۷.
© دانشگاه فردوسی مشهد.

۱. پیش‌گفتار

آموزش ریاضی در مقطع متوسطه، به‌عنوان یکی از ارکان کلیدی نظام‌های آموزشی، نقش مهمی در پرورش تفکر منطقی، حل مسئله، و آماده‌سازی دانش‌آموزان برای چالش‌های قرن بیست‌ویکم ایفا می‌کند [۲۱، ۲۲]. در دهه‌های اخیر، آموزش ریاضی در مقطع دبیرستان در بسیاری از کشورها از جمله ایران با چالش‌هایی پیچیده و چندلایه مواجه شده است؛ چالش‌هایی که نه تنها به محتوای ریاضی، بلکه به نحوه سازماندهی، آموزش، و معنا دادن به این محتوا در بستر کلاس درس مربوط می‌شود. بر اساس رویکرد شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا (NCTM)^۱، صرف انتقال دانش ریاضی کافی نیست؛ بلکه کیفیت برنامه درسی، روش‌های تدریس، شیوه‌های یادگیری و ارزیابی، عوامل کلیدی در ایجاد درک عمیق مفاهیم و توانایی به‌کارگیری دانش ریاضی در موقعیت‌های واقعی زندگی به شمار می‌روند [۲۱، ۲۳].

در برنامه درسی ملی، ریاضیات به‌عنوان یکی از یازده حوزه یادگیری تعریف شده است که شامل چهار موضوع محتوایی (اعداد و عملیات، جبر و نمایش نمادین، هندسه و اندازه‌گیری، داده‌ها و آمار و احتمال) و هفت موضوع فرآیندی (حل مسئله، مدل‌سازی داده‌های واقعی، استدلال، تفکر بصری، تفکر خلاق، ارتباط بین مفاهیم، و برقراری ارتباط و تبادل ایده‌ها) است. بسیاری از تغییرات انجام شده در سند تحول و اهداف بیان شده در برنامه درسی ایران به دلیل عدم انجام پژوهش‌های کافی و نبود زیرساخت‌های لازم در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای قابل اجرا نیستند [۵]. به عنوان مثال، در کتاب‌های درسی سؤالات مرتبط با مدل‌سازی مطرح نشده است و بیشتر سؤالات بر حل مسئله به شیوه‌ای رویه‌ای نه مفهومی تمرکز دارند [۲۷]. این رویکرد می‌تواند پیامدهای معکوس به‌همراه داشته باشد و منجر به کاهش عملکرد و توانایی دانش‌آموزان در یادگیری ریاضی شود [۵، ۲۷].

از طرفی معلمان ریاضی به دلیل کمبود آموزش‌های پیش‌ازخدمت و ضمن‌خدمت در زمینه مدل‌سازی، کاربردهای ریاضی و دیدگاه‌های جدید مانند ساخت‌وسازگرایی، با مشکلات جدی مواجه هستند [۲۷]. همچنین، هرچند در برنامه درسی بر استفاده از فناوری‌هایی نظیر ماشین حساب و رایانه در آموزش ریاضی تأکید شده است، اما این موضوع هنوز در کتاب‌های درسی جدید به‌طور کامل اجرایی نشده است. باید توجه داشت که تغییر برنامه درسی تنها از طریق تغییر کتاب‌های درسی ممکن نیست، بلکه نیازمند تحولی نظام‌مند در نظام آموزشی، محتوای آموزشی، حمایت از معلمان، و بهره‌گیری مؤثر از فناوری در کلاس‌های درس است [۲۷]. کمبود منابع و نبود حمایت کافی، اجرای مؤثر این اصلاحات را با دشواری مواجه می‌کند [۵، ۲۷].

شناسایی نظام‌مند چالش‌ها و موانع مؤثر بر فرایند یاددهی - یادگیری ریاضی، به‌ویژه در دوره متوسطه دوم، از ضرورت‌های انکارناپذیر در مسیر بهبود کیفیت آموزش ریاضی در نظام آموزشی کشور به‌شمار می‌آید. با توجه به ادبیات نظری موجود و نگرانی‌های فزاینده نسبت به افت تحصیلی، کاهش انگیزه و گسست‌های مفهومی در یادگیری ریاضی، این پژوهش با هدف واکاوی عمیق چالش‌های آموزش ریاضی با دیدگاهی بیرونی و درونی به سیستم آموزشی^۲ در این مقطع طراحی شده است. پژوهش حاضر با بهره‌گیری از سطوح سلسله‌مراتبی هم‌تعیینی تعلیم و تربیت^۳ در چارچوب نظریه انسان‌شناسی تعلیم و تربیت (ATD)^۴ [۱۴]، با رویکرد روایت‌پژوهی، به بررسی دیدگاه‌ها و تجارب زیسته معلمان ریاضی در استان خراسان رضوی می‌پردازد تا به شناسایی موانع موجود در فرایند آموزش ریاضی دست یابد. این رویکرد امکان کاوش در ابعاد پنهان و کمتر مطالعه‌شده چالش‌های آموزشی را فراهم می‌سازد. هدف نهایی پژوهش، ارائه بینش‌هایی برای بازنگری در سیاست‌های آموزشی، بهبود برنامه‌های درسی، و تقویت توسعه حرفه‌ای معلمان است. در ادامه، مقاله به بررسی ادبیات و پیشینه تحقیق روش تحقیق، نتایج و بحث و نتیجه‌گیری می‌پردازد.

¹National Council of Teachers of Mathematics

²Didactic system

³The scale of levels of didactic codeterminacy

⁴Anthropological theory of the didactic

۲. ادبیات و پیشینه تحقیق

شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا (NCTM) با هدف ارتقاء و اصلاح آموزش ریاضی، مجموعه‌ای از اصول بنیادی را تدوین کرده است که به‌منزله چارچوبی مفهومی برای جهت‌دهی به برنامه‌ریزی درسی و تصمیم‌گیری‌های آموزشی عمل می‌کنند. این شش اصل شامل برابری، برنامه درسی، یاددهی، یادگیری، ارزیابی و فناوری هستند. هر یک از این اصول نقشی کلیدی در ایجاد یک نظام آموزشی اثربخش و معنادار در آموزش ریاضی ایفا می‌کنند [۲۱].

اصل برابری تأکید دارد که همه دانش‌آموزان، صرف‌نظر از جنسیت، نژاد، قومیت، طبقه اجتماعی-اقتصادی یا سابقه تحصیلی، باید به فرصت‌های یادگیری ریاضیات با کیفیت بالا دسترسی داشته باشند [۲۱]. با این حال، در ایران، عوامل متعددی از جمله تفاوت در فضای آموزشی، امکانات آموزشی بین مناطق مختلف، جمعیت دانش‌آموزان در کلاس درس، فقدان نیروی انسانی و متخصص در برخی مناطق، و ساختارهای طبقاتی مدارس (دولتی، غیردولتی، تیزهوشان، نمونه دولتی)، وضعیت والدین (مانند سطح تحصیلات و شغل) منجر به شکاف‌های جدی در کیفیت آموزش ریاضی، سطح انگیزه، و عملکرد دانش‌آموزان شده است [۱]. برای کاهش این نابرابری‌ها، توسعه سیاست‌های عدالت‌محور در تخصیص منابع آموزشی و سرمایه‌گذاری هدفمند در ارتقای کیفیت حرفه‌ای معلمان به‌ویژه در مناطق کمتر برخوردار، امری ضروری است.

برنامه درسی ریاضی باید ساختاری منسجم، هدفمند و متمرکز بر مفاهیم بنیادین و مهم ریاضی داشته باشد؛ نه آن‌که مجموعه‌ای پراکنده از موضوعات بدون پیوند منطقی باشد. برای دستیابی به چنین ساختاری، لازم است انسجام عمودی (میان پایه‌های تحصیلی) و انسجام افقی (میان مفاهیم یک پایه) در طراحی محتوا رعایت شود، به‌گونه‌ای که درک دانش‌آموزان از ساختار ریاضیات عمیق‌تر و معنادارتر گردد [۲۱، ۲۳]. همچنین، باید تناسبی منطقی میان حجم محتوا و زمان اختصاص‌یافته در برنامه درسی برقرار باشد [۲]. کتاب‌های درسی نباید صرفاً فهرستی از مهارت‌ها و تمرین‌های جداگانه باشند، بلکه باید فرصت‌هایی برای کشف ارتباط میان مفاهیم، تعمیم‌سازی و کاربرد آن‌ها در موقعیت‌های واقعی فراهم آورند [۲۱، ۲۳]. با این حال، ساختار آموزش ریاضی مدرسه‌ای در ایران اغلب خطی، متمرکز بر مهارت‌های محاسباتی و فاقد توجه کافی به پیوند مفاهیم ریاضی با مسائل زندگی واقعی است [۲۷]. این عدم انطباق با اصول طراحی برنامه درسی، می‌تواند درک عمیق و توانایی کاربردی دانش‌آموزان را محدود سازد.

کتاب‌های درسی بازتابی از مفاهیمی هستند که دانش‌آموزان باید بیاموزند و نیز چارچوبی برای تصمیم‌گیری معلمان برای نحوه ارائه محتوا، طراحی فعالیت‌ها و ارزیابی آن‌ها را فراهم می‌سازند [۲۷، ۲۸]. کتاب‌های درسی نه‌تنها محتوای نظری و مفاهیم پایه را ارائه می‌دهند، بلکه فعالیت‌ها و تمرینات مختلفی را نیز شامل می‌شوند که بر یادگیری ریاضی اهمیت بسزایی دارند [۱۸، ۲۸]. کتاب‌های نونگارشت ریاضی در دوره متوسطه دوم، گامی مثبت در جهت بهبود یادگیری مفاهیم برداشته‌اند. با این حال، این کتاب‌ها از تنوع کافی در طراحی سؤالات، به‌ویژه در ارتباط با انواع ارزیابی‌ها از جمله آزمون‌های نهایی، ارزشیابی‌های تکوینی، پایانی و کنکور برخوردار نیستند [۲]. تفکر محاسباتی به‌عنوان یکی از مهارت‌های ضروری قرن بیست‌ویکم شناخته می‌شود اما بررسی اسناد برنامه درسی ملی و محتوای کتاب‌های درسی ریاضیات نشان می‌دهد که این مفهوم در برنامه رسمی جایگاه روشنی ندارد [۲۷]. افزون بر این، در توضیح برخی مفاهیم بنیادی مانند حد و پیوستگی، کمتر از گفتارهای رسمی ریاضی، استدلال و اثبات‌های ریاضی بهره گرفته شده است [۴، ۶]. در نتیجه، یادگیری دانش‌آموزان عمدتاً بر پایه شهود و مشاهده مثال‌های خاص شکل می‌گیرد. در چنین شرایطی، دانش‌آموزان معمولاً با بررسی چند مثال محدود، به تعمیم‌های کلی دست می‌زنند، بی‌آن‌که درک درستی از ماهیت اثبات ریاضی پیدا کنند. این درک ناقص ممکن است در طول دوران تحصیل ادامه یابد و موانع یادگیری را تشدید نماید [۹]. چنین رویکردی، در عمل منجر به تقویت یادگیری رویه‌ای و فاصله گرفتن از یادگیری مفهومی می‌شود [۴، ۶] و با تجربه فراگیران در سطوح بالاتر آموزشی، از جمله دانشگاه، در تعارض قرار می‌گیرد [۳۰].

برای غلبه بر این چالش‌ها، ضروری است که کتاب‌های درسی ریاضی در دوره متوسطه، مفهوم اثبات را به‌گونه‌ای تدریجی و متناسب با سطوح رشد شناختی دانش‌آموزان توسعه دهند. این رویکرد مستلزم آن است که معرفی اثبات، از مراحل ابتدایی‌تر همچون

تجربه‌گرایی
ساده (Naive)
(Empiricism)

• تجربه‌گرایی ساده ابتدایی‌ترین شکل مواجهه با مفهوم اثبات را نشان می‌دهد. در این رویکرد، صحت یک نتیجه از طریق بررسی چند مثال خاص مورد تأیید قرار می‌گیرد. اگرچه این شیوه می‌تواند نقطه‌ای آغاز مناسبی برای توسعه‌ی استدلال باشد، اما از منظر ریاضیات یک اثبات تلقی نمی‌شود، چرا که مبتنی بر تعمیم نتایج حاصل از تعداد محدودی مثال به مجموعه‌ای نامتناهی از موارد است.

تجربه بحرانی
(Crucial)
(Exprimet)

• تجربه‌ی بحرانی، شکلی از استدلال است که در آن فرد یک مثال خاص اما نماینده را انتخاب کرده و ادعای کلی را بر آن می‌سنجد. فرض ضمنی در این رویکرد آن است که اگر گزاره برای این مثال خاص معتبر باشد، می‌توان آن را به سایر موارد تعمیم داد. نکته‌ی اساسی در این نوع استدلال آن است که مثال انتخاب‌شده باید به‌طور معنادار ویژگی‌های کلی مسئله را بازنمایی کند و قابلیت تعمیم‌پذیری داشته باشد.

مثال کلی
(Generic)
(Example)

• مثال کلی شکلی از استدلال است که در آن یک مثال خاص به‌عنوان نماینده‌ی ویژگی‌های عمومی یک دسته انتخاب می‌شود. در این نوع استدلال، تمرکز بر ویژگی‌های خاص و استثنایی نمونه‌ی فردی نیست بلکه بر ویژگی‌ها و خصوصیات عمومی مشترک در آن دسته مورد توجه است. مثال انتخاب‌شده نمادی از کل گروه است که از طریق آن می‌توان تعمیم‌هایی ارائه داد.

استدلال ذهنی
(Thought)
(Exprimet)

• استدلال ذهنی، بالاترین و پیچیده‌ترین شکل اثبات است که در آن نیازی به مثال‌های عددی یا خاص وجود ندارد. در این روش، فرد با استفاده از تعاریف دقیق، خواص ریاضی و استدلال‌های منطقی به نتیجه‌ای کلی و عمومی می‌رسد. این نوع اثبات کاملاً مبتنی بر مفاهیم انتزاعی و منطقی صوری است.

شکل ۱: سلسله‌مراتب سطوح اثبات [۹].

استدلال‌های شهودی و غیررسمی آغاز شود و به‌تدریج، به سمت شکل‌گیری استدلال‌ها و اثبات‌های منطقی سوق یابد (شکل ۱) [۹]. بر این اساس، تمرکز آموزش از یاددهی و یادگیری رویه‌ای به مفهومی تغییر می‌کند؛ به این معنا که به‌جای آموزش صرف الگوریتم‌ها و فرمول‌ها، بر چرایی آن‌ها، بر کاربرد بازنمایی‌های مختلف، و ایجاد ارتباط میان مفاهیم تأکید شود [۲۲]. همچنین، بهتر است کتاب‌های درسی به نحوی طراحی شود که مفاهیم اصلی را مستقیماً با کاربردهای واقعی پیوند دهد و فرصت تعامل دانش‌آموزان را فراهم نماید [۲۶].

شواهد پژوهشی حاکی از آن است که فاصله‌ی زیادی بین «اصول در نظریه» و «تدریس در عمل» وجود دارد [۲۳]. بسیاری از معلمان به دلیل کمبود زمان، نبود منابع لازم، یا آموزش ناکافی، به‌جای استفاده از روش‌های فعال یاددهی-یادگیری و مسئله‌محور، به آموزش‌های سنتی و رویه‌ای متوسل می‌شوند. در نتیجه، در بیشتر کلاس‌های ریاضی در مقطع متوسطه، فرآیند یاددهی-یادگیری همچنان بر الگوهای سنتی مانند حل تمرین روی تخته، انتقال یک‌طرفه دانش، و تمرکز بر آمادگی در آزمون‌ها متکی است [۲]. فرآیند تدریس ریاضی باید به عنوان تعاملی پویا میان معلم، دانش‌آموزان و محتوای ریاضی در نظر گرفته شود، که هدف آن تسهیل دستیابی دانش‌آموزان به اهداف یادگیری است. فرآیندهای یاددهی-یادگیری باید به‌گونه‌ای طراحی شوند که تفکر دانش‌آموزان را برانگیزانند، استدلال ریاضی آن‌ها را توسعه دهند، و فرصت‌های مشارکت فعال در یادگیری را فراهم آورند [۲۱، ۲۲]. بهره‌گیری از روش‌هایی مانند یادگیری مبتنی بر مسئله^۵ و آموزش مبتنی بر پروژه می‌تواند کیفیت فرآیند یاددهی-یادگیری را ارتقا دهد [۲۰]. بنابراین، توسعه‌ی حرفه‌ای معلمان یکی از ارکان اصلی اجرای مؤثر تدریس محسوب می‌شود. پژوهش‌ها نشان می‌دهند که معلمان نیازمند فرصت‌هایی هستند تا مفاهیم را عمیق‌تر بفهمند، از تجارب همکاران بهره‌مند شوند، و روش‌های نوین را در کلاس درس آزمون نمایند [۲۷].

قابل ذکر است که تدریس مؤثر ریاضی تنها به دانش محتوایی معلم یا تسلط او بر رویکردهای آموزشی محدود نمی‌شود، بلکه به مجموعه‌ای از عوامل پیچیده و تعاملی از آن‌ها بستگی دارد. تصمیم‌گیری لحظه‌به‌لحظه معلمان در کلاس درس تحت تأثیر سه عامل

⁵Problem based-learning

کلیدی قرار دارد: منابع^۶، جهت‌گیری‌ها^۷ و اهداف^۸. منابع شامل دانش محتوا، دانش تربیتی و ابزارهای آموزشی است. جهت‌گیری‌ها شامل باورها، ارزش‌ها و ترجیحات معلم درباره ریاضیات و یادگیری هستند. اهداف نیز اغلب بر اساس این جهت‌گیری‌ها و منابع در دسترس شکل می‌گیرند [۲۹]. در جدول ۱ پنج بعد اساسی برای ایجاد کلاس‌های ریاضی پویا و مؤثر ارائه شده است که باید در تدریس مؤثر ریاضی مورد توجه قرار گیرند. بهبود تدریس ریاضی یک فرآیند جمعی، تعاملی و مداوم است که در آن معلمان با یکدیگر، از طریق مشاهده، بازخورد و گفت‌وگوی عمیق، به سمت یک چشم‌انداز مشترک از کلاس ریاضی پویا و مؤثر حرکت می‌کنند. با توجه به اصل ارزیابی، تمرکز صرف بر نتایج، تصویر کاملی از یادگیری ارائه نمی‌دهد؛ بلکه باید به‌عنوان ابزاری برای بهبود فرآیند یاددهی-یادگیری باشد و بازخورد سازنده‌ای در جهت بهبود یاددهی-یادگیری به دانش‌آموزان و معلمان ارائه دهد [۲۳]. سنجش و ارزیابی به عنوان بخشی جدایی‌ناپذیر از فرآیند یاددهی-یادگیری ریاضیات است و با اهداف مختلفی مانند بررسی پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان، بررسی برنامه‌های آموزشی و مشخص کردن نقاط قوت و ضعف فرآیندهای یاددهی-یادگیری و بهبود آن‌ها با به‌کارگیری روش‌های مختلف انجام می‌پذیرد [۳۱، ۳]. سؤالات ارزیابی نباید تنها به سنجش مهارت‌های رویه‌ای دانش‌آموزان محدود شود، بلکه باید سطوح بالاتری از تفکر همچون تفکر انتقادی و خلاق را نیز در برگیرد و توانایی استدلال و استنباط دانش‌آموزان در مفاهیم ریاضی را به‌طور دقیق ارزیابی نماید [۲۶]. اگرچه سنجش دانش و مهارت‌های ریاضی دانش‌آموزان ممکن است با اهداف متنوعی انجام شود، اما هدف غایی آن پشتیبانی از یادگیری ریاضی و تسهیل تصمیم‌گیری‌های آموزشی برای ارتقای رشد و پیشرفت دانش‌آموزان است.

بهره‌گیری از رویکردهای متنوع در طراحی سؤالات سنجش و ارزیابی، یکی از کلیدهای ارتقای کیفیت فرآیند یاددهی-یادگیری است. سؤالات باز-پاسخ به جای داشتن تنها یک پاسخ صحیح مشخص، امکان ارائه پاسخ‌های گوناگون و معتبر را فراهم می‌آورند. این سؤالات موجب شناخت بهتر درک، نوع استدلال و شیوه تفکر دانش‌آموزان می‌شود [۳۱]. سؤالات فرآیند باز، علاوه بر امکان پاسخ‌های متفاوت، قابلیت حل شدن از مسیرها و استراتژی‌های متنوع را نیز دارند. چنین ساختاری به دانش‌آموزان با سبک‌های یادگیری مختلف اجازه می‌دهد راه‌حلهایی متناسب با توانمندی‌های خود بیابند و موجب تقویت مهارت‌های استدلالی و شکل‌گیری گفت‌وگوی ریاضی میان دانش‌آموزان می‌شود [۳۱].

در همین راستا، مدل SPUR^۹ به عنوان چارچوبی معتبر برای طراحی سؤالات پیشنهاد می‌شود که چهار بُعد اصلی یادگیری ریاضی را هدف می‌گیرد: مهارت‌ها، ویژگی‌ها، کاربردها و بازنمایی‌ها [۳۲]. سؤالات مبتنی بر مهارت‌ها، توانایی‌های رویه‌ای دانش‌آموزان مانند اجرای مراحل محاسباتی مشخص، طراحی روش‌های حل مسئله، یا استفاده از فناوری در حل مسائل را مورد سنجش قرار می‌دهند. سؤالات مرتبط با ویژگی‌ها، بر درک مفهومی اصول بنیادین ریاضی تمرکز دارند و توانایی‌هایی نظیر استدلال ریاضی، تحلیل ساختار مفاهیم و درک روابط را می‌سنجند. سؤالات کاربردی، به موقعیت‌های واقعی و زندگی‌محور می‌پردازند و توانایی دانش‌آموزان را در مدل‌سازی، تحلیل و تفسیر پدیده‌های ریاضی در بسترهای ملموس بررسی می‌کنند. در نهایت، سؤالات مبتنی بر بازنمایی‌ها با استفاده از نمودارها، جداول، تصاویر هندسی یا آماری، توانایی دانش‌آموزان را در تفسیر، سنجیده و تقویت می‌کنند. همچنین، در سنجش و ارزیابی یادگیری دانش‌آموزان از مسائلی استفاده شود که نقش کلیدی در رشد تفکر مرتبه بالاتر آن‌ها ایفا می‌کنند. مانند طرح مسئله^{۱۰}، در این نوع سؤالات، دانش‌آموزان باید اطلاعات داده‌شده را تفسیر، استنباط، مقایسه و تحلیل کنند تا خود به ساختار مسئله دست یابند. چنین مسائلی، زمینه‌ای برای یادگیری اکتشافی فراهم می‌کنند و خلاقیت، درک مفهومی و توانایی

^۶Recourses^۷Orientations^۸Goals^۹Skills, properties, uses & representations^{۱۰}Problem-posing tasks

جدول ۱: ابعاد کلیدی تدریس مؤثر ریاضی

بعد کلیدی	توضیح
محتوای ریاضی	تدریس ریاضی باید بر مفاهیم مهم، مرتبط و منسجم متمرکز باشد. معلم باید به جای آموزش مجزا و حفظی قواعد و فرمول‌ها، به دانش‌آموزان فرصت دهد تا ارتباط بین مفاهیم، فرایندها و کاربردها را کشف کنند. این شامل تأکید بر استدلال ریاضی، حل مسئله و عادت‌های ذهنی مثبت است. هدف، ایجاد شبکه‌ای پایدار و معنادار از دانش ریاضی در ذهن دانش‌آموزان است.
تقاضای شناختی	کلاس ریاضی باید محیطی فراهم کند که دانش‌آموزان در آن با چالش‌های فکری و معنادار درگیر شوند. این به معنای اجتناب از ارائه مسائل بی‌معنی یا بیش از حد ساده است. به جای آن، معلم باید دانش‌آموزان را به طور سازنده با مسائل چالش‌برانگیز درگیر نماید، به گونه‌ای که فرصت درک عمیق و ساخت معنا فراهم شود.
دسترس‌ی عادلانه محتوای ریاضی	به یک کلاس مؤثر ریاضی باید ساختارهایی داشته باشد که همه دانش‌آموزان، بدون توجه به پیشینه، تجربه یا هویت آن‌ها، فرصت داشته باشند به صورت معنادار در فعالیت‌های ریاضی شرکت کنند. این شامل مدیریت تعامل کلاسی، طراحی فعالیت‌های گروهی عادلانه و توجه به صداهای کمتر شنیده‌شده است.
عاملیت، مرجعیت و هویت ریاضی	هدف تدریس ریاضی تنها به دست آوردن پاسخ صحیح نیست، بلکه شکل‌گیری هویت مثبت دانش‌آموزان به عنوان کاربران ریاضی است. دانش‌آموزان باید فرصت داشته باشند تا حدس بزنند، توضیح دهند، استدلال کنند و ایده‌های یکدیگر را توسعه دهند.
استفاده از ارزشیابی تکوینی	تدریس مؤثر بر پاسخگویی به اندیشه‌های واقعی دانش‌آموزان استوار است. ارزشیابی تکوینی به معنای جمع‌آوری اطلاعات درباره درک دانش‌آموزان و استفاده از آن برای طراحی فرآیند یاددهی-یادگیری و بهبود آن است. معلم باید بتواند از طریق پرسش‌های هدفمند و طراحی فعالیت‌های مناسب، از درک و فکر دانش‌آموزان در ارتباط با دانش ریاضی آگاه شود و سپس آموزش را بر اساس آن سازماندهی نماید.

حل مسئله را تقویت می‌کنند [۳۲، ۳۳]. علاوه بر این، مسائل مدل‌سازی ریاضی مبتنی بر دنیای واقعی، توانایی دانش‌آموزان را در به‌کارگیری دانش ریاضی و غیرریاضی برای حل مسائل تقویت می‌کنند. در فرآیند مدل‌سازی، یک پدیده واقعی بازنمایی می‌شود تا امکان تحلیل ریاضی آن فراهم شود به‌جای تمرکز صرف بر یافتن پاسخ نهایی، تأکید بر درک فرایند، بازنمایی نموداری و نمادین، و تفسیر نتایج در بستر واقعی است [۳، ۱۰]. مسائل مدل‌سازی، انگیزه یادگیری ریاضی را افزایش داده و دانش‌آموزان را به یادگیرندگانی مسئولیت‌پذیر و مستقل تبدیل می‌کند [۳، ۲۶]. مسائل ارزشیابی^{۱۱} نیز دانش‌آموزان را با موقعیت‌هایی مواجه می‌کنند

¹¹Evaluating task

که در آن‌ها باید قضاوت، تصمیم‌گیری یا انتخابی آگاهانه انجام دهند. براساس طبقه‌بندی اصلاح‌شده بلوم [۷]، این مسائل به دو دسته چک کردن (بررسی صحت یک پاسخ یا استدلال با توجه به بدفهمی‌های رایج) و نقد کردن (تحلیل مزایا و معایب چند روش حل برای یک مسئله و انتخاب رویکرد بهینه) تقسیم می‌شوند [۲۵].

فناوری باید به عنوان ابزاری قدرتمندی در یاددهی-یادگیری ریاضی به‌کار گرفته شود. استفاده از نرم‌افزارهای ریاضی می‌تواند دسترسی به مفاهیم را آسان‌تر نماید، تجسم ریاضی را بهبود بخشد و فرصت‌هایی برای مدل‌سازی و تحلیل داده‌ها فراهم آورد [۲۱، ۲۳]. در بسیاری از مدارس ایران بهره‌گیری از فناوری محدود، سطحی، یا صرفاً نمایشی باقی مانده است. گسترش دسترسی به نرم‌افزارهایی مانند GeoGebra و Desmos، همراه با استفاده از ابزارهای تعاملی مانند تخته‌های هوشمند، می‌تواند تأثیر بسزایی در بهبود کیفیت آموزش داشته باشد. این رویکرد بر توسعه سواد دیجیتال ریاضی در کنار سواد مفهومی تأکید دارد. با وجود این، موفقیت بهره‌گیری از فناوری در آموزش نیازمند هماهنگی دقیق با اهداف برنامه درسی، توسعه حرفه‌ای معلمان و فراهم‌آوری زیرساخت‌های مناسب است [۲۳، ۲۷].

۳. چارچوب نظری تحقیق

تحلیل ساختار و تکوین برنامه‌های درسی نیازمند چارچوبی نظری است که امکان پرسشگری، مدل‌سازی، توصیف و تحلیل آن‌ها را فراهم کند. در این راستا، می‌توان از نظریه ATD [۱۴] بهره گرفته است. با استفاده از ATD می‌توان تمام فعالیت‌های انسانی، چه عملی و چه نظری، از جمله فعالیت‌های مرتبط با یاددهی-یادگیری ریاضیات را در یک نهاد مشخص بررسی نمود [۱۴]. یکی از مفاهیم کلیدی در این نظریه، سطوح سلسله‌مراتبی هم‌تعیینی تعلیم و تربیت است [۱۴].

شرایط و محدودیت‌هایی که بر فرآیندهای یاددهی-یادگیری تأثیر می‌گذارند، بسیار فراتر از محدوده کلاس درس است. سطوح سلسله‌مراتبی هم‌تعیینی تعلیم و تربیت این امکان را برای پژوهشگر فراهم می‌کند که یاددهی و یادگیری دانش ریاضی را با توجه به شرایط و محدودیت‌های موجود در سطوح مختلف، از جمله جامعه، نهاد آموزشی و پداگوژی بررسی نماید [۱۱]. این مفهوم تحلیلی فراهم می‌آورد که به‌واسطه آن می‌توان مجموعه شرایط و محدودیت‌های مؤثر بر فرایندهای آموزشی را، چه درون و چه بیرون از نهاد مدرسه و کلاس درس، شناسایی و طبقه‌بندی کرد. همچنین، امکان ارائه راهکارهای مبتنی بر تحلیل نظام‌مند را فراهم می‌سازد؛ راهکارهایی که قابلیت استفاده در سیاست‌گذاری آموزشی، بازنگری برنامه‌های درسی و ارتقای توسعه حرفه‌ای معلمان دارند. مقیاس‌های مورد نظر از سطوح عمومی (تمدن^{۱۲}، جامعه^{۱۳}، نهاد آموزشی^{۱۴} و پداگوژی^{۱۵}) آغاز و به سطوح خاص (رشته علمی^{۱۶}، حوزه^{۱۷}، بخش^{۱۸}، زمینه^{۱۹} و موضوع^{۲۰}) ختم می‌شود (شکل ۲) [۱۴، ۱۱]. با توجه به هدف پژوهش و چارچوب نظری پرسش‌های پژوهشی این مطالعه عبارت‌اند از:

¹²Civilization

¹³Society

¹⁴School

¹⁵Pedagogy

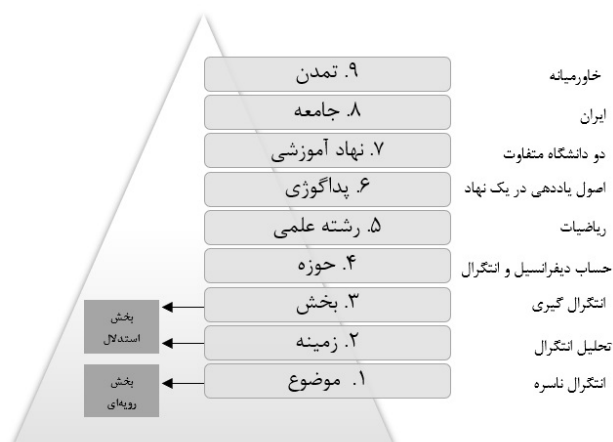
¹⁶Discipline

¹⁷Domain

¹⁸Domain

¹⁹Theme

²⁰Subject



شکل ۲: سلسله‌مراتبی هم‌تعیینی تعلیم و تربیت.

(۱) شرایط و محدودیت‌های مؤثر بر آموزش ریاضی در مقطع متوسطه کدام‌اند و هر یک در کدام سطح از سطوح سلسله‌مراتبی هم‌تعیینی تعلیم و تربیت قرار می‌گیرند؟

(۲) با توجه به جایگاه و ماهیت شرایط و محدودیت‌های شناسایی‌شده، چه راهکارهای عملی می‌توان برای اصلاح و بهبود برنامه‌های درسی ریاضی و حفظ ثبات آموزشی آن در مقطع متوسطه ارائه کرد تا با نیازها و الزامات هر سطح سازگار باشد؟

۴. روش تحقیق

این پژوهش از نوع کیفی است که با هدف شناسایی چالش‌های یاددهی و یادگیری ریاضی در مقطع متوسطه ایران از منظر تجارب زیسته معلمان انجام شده است. با توجه به چارچوب نظری تحقیق و ماهیت اکتشافی پژوهش و تمرکز بر فهم عمیق تجارب معلمان، رویکرد روایت‌پژوهی^{۲۱} به‌عنوان روش اصلی انتخاب گردید. روایت‌پژوهی به دلیل توانایی در کاوش داستان‌ها و تجارب شخصی در بسترهای اجتماعی و حرفه‌ای، برای این مطالعه مناسب است [۱۵، ۱۶]. در این تحقیق تلاش شده است تا با شنیدن و بازنمایی روایت‌های معلمان ریاضی و بهره‌گیری از تجربه‌های شخصی پژوهشگر در آموزش ریاضی، درکی چندلایه و عمیق از چالش‌های آموزش ریاضی در مقطع متوسطه نظام آموزشی ایران ارائه شود.

در این مطالعه، برای غنای داده‌ها، ترکیبی از روایت خودپژوه^{۲۲} و روایت‌های معلمان استفاده شد. روایت خودپژوه شامل تجارب پژوهشگر به‌عنوان معلم ریاضی، تجربه‌های حرفه‌ای در تدریس، مواجهه با سیاست‌های آموزشی و موقعیت‌های چالش‌برانگیز است که در قالب یادداشت‌های بازتاب‌گرایانه مستندسازی شده‌اند و زمینه‌ساز تحلیل‌های اولیه پژوهش شدند. روایت‌های معلمان نیز دیدگاه سایر معلمان ریاضی مقطع متوسطه در استان خراسان رضوی را بازتاب می‌دهد.

در روایت‌پژوهی، انتخاب شرکت‌کنندگان معمولاً بر اساس منطق کیفی و به‌صورت نمونه‌گیری هدفمند انجام می‌شود تا افرادی انتخاب شوند که بتوانند روایت‌هایی غنی، معنادار و مرتبط با پدیده مورد مطالعه ارائه دهند [۱۵، ۱۶]. در این پژوهش نیز نمونه‌ها به‌صورت هدفمند و در دسترس انتخاب شدند تا روایت‌هایی متنوع از معلمان با بافت‌ها، موقعیت‌های جغرافیایی و تجربه‌های حرفه‌ای متفاوت

²¹Narrative Research

²²Auto-narrative

گردآوری شود. این رویکرد با ماهیت روایت‌پژوهی همسو است، زیرا هدف آن تعمیم آماری نیست، بلکه فهم عمیق تجربه‌های زیسته در زمینه‌های اجتماعی و آموزشی متفاوت است. بر همین اساس، معیارهایی مانند موقعیت جغرافیایی (شهری و روستایی)، بافت نهادی (دولتی، تیزهوشان، نمونه دولتی، غیردولتی) و سابقه کاری (۸ تا ۳۰ سال) در نظر گرفته شد. این ترکیب روایات فردی و بین‌الذهانی امکان مقایسه، تقاطع و درک عمیق‌تر از وضعیت آموزش ریاضی را فراهم آورده است [۱۶].

داده‌ها از طریق مصاحبه‌های نیمه‌ساختاریافته و یادداشت‌های بازتاب‌گرایانه پژوهشگر جمع‌آوری شدند. پژوهشگر که دارای ۱۲ سال سابقه تدریس ریاضی است، یادداشت‌های بازتاب‌گرانه‌ای بر اساس تجربیات شخصی خود در زمینه تدریس و مواجهه با چالش‌های نظام آموزشی ثبت کرد. این یادداشت‌ها به‌عنوان داده‌های مکمل در تحلیل روایت خودپژوه به‌کار گرفته شده و امکان مقایسه بین تجربیات پژوهشگر و سایر معلمان را فراهم کردند. مصاحبه‌های نیمه‌ساختاریافته فردی [۱۷] به‌صورت حضوری، تلفنی یا مجازی و در فضایی گفت‌وگومحور انجام شدند و هر مصاحبه بین ۳۰ تا ۴۵ دقیقه به طول انجامید. راهنمای مصاحبه شامل سؤالات باز-پاسخ بود که بر اساس اصول NCTM در حوزه‌های برابری، برنامه درسی، یاددهی، یادگیری، ارزیابی و فناوری طراحی شده بود. تمامی مصاحبه‌ها پس از دریافت رضایت آگاهانه از شرکت‌کنندگان ضبط و به‌طور کامل پیاده‌سازی شدند. نمونه‌هایی از پرسش‌های مطرح‌شده در مصاحبه عبارت بودند از:

- به‌عنوان معلم ریاضی در مقطع متوسطه، مهم‌ترین چالش‌ها و محدودیت‌هایی که در تدریس با آن مواجه هستید چیست؟ لطفاً پاسخ خود را توضیح دهید و در صورت امکان نمونه‌های عملی از تجربه خود بیان کنید.
- با چه چالش‌های در اجرای برنامه درسی و تدریس کتاب‌های درسی ریاضی روبه‌رو شده‌اید؟ لطفاً پاسخ خود را توضیح دهید.
- چه راهکارهایی را برای بهبود برنامه درسی و کیفیت آموزش ریاضی در مقطع متوسطه پیشنهاد می‌کنید؟ لطفاً پاسخ خود را توضیح دهید.
- به نظر شما چگونه می‌توان ثبات و پایداری آموزشی را در این اصلاحات حفظ کرد تا تغییرات به‌صورت مستمر و مؤثر در آموزش ریاضی اعمال شود؟

تحلیل داده‌ها با بهره‌گیری از رویکرد تحلیل مضمون^{۲۳} انجام شد [۱۵، ۱۶]. ابتدا تمامی روایت‌ها چندین بار خوانده و پیاده‌سازی شدند و بخش‌های کلیدی برای شناسایی الگوهای اولیه مشخص گردید. داده‌ها به‌صورت دستی کدگذاری شدند و کدها بر اساس شش اصل NCTM و سطوح سلسله مراتب هم‌تعیینی تعلیم و تربیت تنظیم شدند. مضامین استخراج‌شده با داده‌های خام مقایسه شدند تا از انسجام و جامعیت آن‌ها اطمینان حاصل گردد. همچنین، یادداشت‌های بازتاب‌گرانه پژوهشگر به‌عنوان منبعی برای تأیید مضامین استفاده شدند و برای افزایش اعتبار تحلیل، به‌طور مستمر بازبینی گردیدند تا تأثیر پیش‌فرض‌های پژوهشگر به حداقل برسد.

۵. نتایج

تحلیل‌های به‌دست‌آمده در این پژوهش منجر به استخراج چالش‌های کلیدی آموزش ریاضی در نظام آموزشی ایران در سطوح سلسله مراتب هم‌تعیینی تعلیم و تربیت گردید. در ادامه، هر یک از این مضامین به تفصیل تشریح شده است.

۱.۵. جامعه. روایت نویسنده و مشارکت‌کنندگان در این مطالعه نشان می‌دهد که شکاف قابل‌توجهی میان سیاست‌گذاری‌های کلان نظام آموزشی و واقعیت‌های میدانی مدارس وجود دارد. به‌ویژه، اسناد بالادستی همچون سند تحول بنیادین آموزش و پرورش از سوی معلمان به‌عنوان متونی سنگین، غیرعملیاتی و ناکارآمد در بسترهای گوناگون توصیف می‌شوند. بسیاری از معلمان باور دارند که مفاد این اسناد در تمامی مدارس، به‌ویژه در مناطق محروم، قابل پیاده‌سازی نیست.

²³Thematic Analysis

تفاوت‌های عمیق میان مدارس مناطق محروم و برخوردار، به یکی از مصادیق اصلی بی‌عدالتی آموزشی در نظام فعلی تبدیل شده است. مدارس مستقر در شهرستان‌های کوچک‌تر یا با شرایط اقتصادی ضعیف، به دلیل کمبود بودجه‌های دولتی، از تجهیزات آموزشی و نیروی انسانی متخصص بی‌بهره‌اند. یکی از معلمان اظهار داشت: «در تمام مناطق نیروی مناسب و حرفه‌ای، امکانات آموزشی و بودجه به‌خوبی توزیع نشده است. از طرفی کلاس‌ها در مناطق برخوردار بسیار پرجمعیت‌اند. همچنین، مدارس خاص مانند تیزهوشان بودجه ویژه‌ای دارند...».

روایت‌ها نشان می‌دهد که حتی در دسترسی به فرصت‌های آموزشی مانند المپیادها نیز، نابرابری وجود دارد. دانش‌آموزان علاقه‌مند به فعالیت‌های علمی پیشرفته، به‌ویژه در مناطق کمتر توسعه‌یافته، به‌ندرت می‌توانند از آموزش تخصصی یا منابع معتبر بهره‌مند شوند. این مسئله به‌روشنی از فاصله میان اهداف عدالت‌محور برنامه‌های کلان و مدارس حکایت دارد.

یافته‌های پژوهش بیانگر نارسایی‌های جدی در سیاست‌های منابع انسانی وزارت آموزش و پرورش است. با وجود بهره‌مندی این نهاد از نیروی انسانی قابل توجه، پراکندگی نامتوازن و سیاست‌های ناکارآمد منجر به اختلال در توزیع عادلانه معلمان متخصص در مناطق مختلف کشور شده است. چالش‌های موجود در نظام انتقال نیروی انسانی، به‌ویژه میان مناطق محروم و برخوردار، نابرابری‌های آموزشی را تشدید کرده و پیامدهایی چون کاهش انگیزه، افت کیفیت تدریس، و احساس ناکارآمدی حرفه‌ای در میان معلمان را به‌دنبال داشته است. همچنین، سوء مدیریت در تفکیک نقش‌ها و نیز عدم تمایز بین مسیرهای شغلی معلمی و اداری، به نوعی ائتلاف سرمایه انسانی منجر شده است. در شرایطی که بسیاری از مدارس با کمبود معلمان متخصص روبرو هستند، حضور نیروهای توانمند در سمت‌های اداری - بدون ارتباط مستقیم با تدریس - مصداقی از استفاده ناکارآمد از منابع انسانی در آموزش و پرورش محسوب می‌شود. این مسئله در نهایت می‌تواند تأثیر منفی بر کیفیت آموزشی در مدارس بگذارد. در روایت یکی از مشارکت‌کنندگان آمده است:

کارمندانی که در ادارات آموزش و پرورش مشغول به کار هستند، گاهی از نیروهای متخصص و کارآمد در رشته خودشان هستند. چرا باید چنین اتفاقی رخ دهد؟ به نظر من باید افرادی که برای ادارات استخدام می‌شوند از افرادی که برای معلمی انتخاب می‌شوند، جدا باشند.

فرآیند جذب و استخدام معلمان با چالش‌های ساختاری و سیاست‌گذاری مواجه است. با توجه به نقش حساس معلمان در کیفیت آموزش، انتظار می‌رود سیاست‌های جذب آنان بر اساس معیارهای دقیق و هدفمند تدوین شود. در حال حاضر، معلمان از مسیرهای مختلفی مانند دانشگاه فرهنگیان، آزمون‌های استخدامی، طرح سرباز معلم و نهضت سوادآموزی در قالب قراردادهای رسمی، پیمانی، شرکتی و حق‌التدریس جذب می‌شوند. این تنوع مسیرها و وضعیت‌های استخدامی موجب ناهمگونی در سطح صلاحیت علمی و حرفه‌ای معلمان شده است. همچنین، کم‌توجهی به تناسب رشته تحصیلی معلمان ابتدایی با محتوای تخصصی دروس، به‌ویژه ریاضی، موجب ایجاد شکاف‌های آموزشی و ضعف بنیادین در یادگیری ریاضی دانش‌آموزان شده است. یکی از معلمان شرکت‌کننده در پژوهش با اشاره به این مسئله بیان کرد:

یکی از مشکلات دانش‌آموزان در یادگیری درس ریاضی، وجود ضعف آن‌ها در ریاضی پایه است. یکی از علل آن، انتخاب دبیران ابتدایی از میان دانشجویان گروه انسانی است. بهتر است دوره‌های آموزش ریاضی ابتدایی برای معلمان ابتدایی برگزار شود یا تدریس این دروس با اهمیت به معلمان متخصص این رشته واگذار شود.

مشکلات معیشتی معلمان یکی از چالش‌های تعیین‌کننده در نظام آموزش و پرورش به شمار می‌رود که امروزه کمتر کسی از اهمیت آن غافل است. شرایط اقتصادی دشوار، نارضایتی شغلی و عدم ثبات مالی، بر انگیزه و آرامش روانی معلمان تأثیر منفی دارد. به گفته معلمان حاضر در پژوهش، این مشکلات می‌تواند موجب شود که حتی معلمان با تخصص بالا کیفیت مطلوبی در آموزش ارائه ندهند، دانش تخصصی خود را به‌روزرسانی نکنند و در نهایت، از پویایی لازم در فرآیند یاددهی-یادگیری فاصله بگیرند. این موضوع

نه تنها کیفیت آموزش را کاهش می‌دهد، بلکه انگیزه و اشتیاق دانش‌آموزان برای یادگیری را نیز تحت‌الشعاع قرار می‌دهد. یکی از معلمان در این خصوص اظهار داشت: «با این وضعیت اقتصادی سخت، بیشتر معلمان ناچارند شغل دومی داشته باشند، این مسئله لطمه بزرگی به آموزش وارد می‌کند؛ چرا که تمرکز و انگیزه معلمان سال‌هاست کاهش یافته است».

یکی از چالش‌های دیگر، آزمون‌های نهایی و کنکور است که بر دو سطح نهاد آموزشی و پداگوژی در دوره متوسطه دوم تأثیر قابل توجهی گذاشته‌اند. به باور نویسندگان و معلمان، تمرکز افراطی بر موفقیت در این آزمون‌ها، سایر اهداف آموزشی و تربیتی را به حاشیه رانده است. با وجود تغییرات در محتوای کتاب‌های درسی، در بسیاری از مدارس، معلمان به دلیل عواملی نظیر دشواری ماهیت درس ریاضی، کمبود زمان، ضعف دانش‌آموزان در مفاهیم پیش‌نیاز ریاضی، خواسته‌های والدین و تمرکز بالا بر کنکور ناچارند از روش‌هایی چون جزوه‌نویسی یا تدریس سطحی مفاهیم با رویکردهای سنتی استفاده نمایند. در چنین شرایطی، نه تنها یادگیری معنادار اتفاق نمی‌افتد، بلکه انگیزه دانش‌آموزان برای یادگیری نیز به شدت کاهش می‌یابد. در این راستا یکی از معلمان مشارکت‌کننده اظهار داشت: «کنکور و امتحانات نهایی دانش‌آموزان را مجبور می‌کند تکنیک‌ها را بدون توجه به معنای آن حفظ کنند».

همچنین، تمرکز بر کسب نمره بالا در امتحانات نهایی و دستیابی به رتبه مطلوب در کنکور، به‌ویژه در پایه دوازدهم، موجب شده است برخی دانش‌آموزان از حضور منظم در کلاس‌های مدرسه خودداری کنند یا نسبت به برنامه درسی و ارزشیابی‌های کلاسی بی‌تفاوت باشند. در عوض، آنان یادگیری ریاضی را از طریق منابعی چون کتاب‌های کمک‌درسی، ویدئوهای آموزشی یا شرکت در کلاس‌های خصوصی پیگیری می‌کنند. این روند، خطر شکل‌گیری یادگیری سطحی و صرفاً رویه‌ای را به همراه دارد؛ به‌گونه‌ای که درک مفهومی مباحث ریاضی جای خود را به حفظ فرمول‌ها و تمرین تکنیک‌های حل مسئله می‌دهد.

یکی دیگر از عوامل عملکرد ضعیف برخی از دانش‌آموزان، امکان ارتقای دانش‌آموزان به پایه بالاتر حتی در صورت عدم موفقیت در دروس تخصصی مانند ریاضی است. در این زمینه، یکی از معلمان مشارکت‌کننده در پژوهش تأکید کرد:

در کلاس من گاهی دانش‌آموزانی حتی در رشته ریاضی-فیزیک حضور دارند که موفق به گذراندن ریاضی سال گذشته نشده‌اند. در چنین شرایطی، انتظار چه عملکردی از این دانش‌آموزان می‌توان داشت؟ هرچند هدف آموزش نباید صرفاً معطوف به ارزشیابی و امتحانات باشد، اما بهتر است برخی از برنامه‌ها بازنگری شوند و جدیت و قاطعیت بیشتری در نظام آموزش و پرورش اعمال گردد.

۲.۵. نهاد آموزشی. شرکت‌کنندگان در پژوهش معتقد هستند که ساختار طبقاتی نظام آموزشی در ایران، از طریق تفکیک مدارس به تیزهوشان، نمونه دولتی، فرهنگیان و شاهد، نه تنها فرصت‌های برابر برای یادگیری را به چالش کشیده، بلکه زمینه‌ساز شکل‌گیری انتظارات فزاینده والدین و جامعه از دانش‌آموزان این مدارس شده است. این انتظارات، بار روانی قابل توجهی را بر دوش دانش‌آموزان قرار می‌دهد؛ به‌گونه‌ای که بسیاری از آنان، در مسیر آماده‌سازی برای کنکور، دچار استرس مزمن و فشار تحصیلی می‌شوند. در مواردی که دانش‌آموزان نتوانند در آزمون سراسری عملکرد مطلوبی داشته باشند، پیامدهای روانی و احساسی شکست، به مراتب شدیدتر از دانش‌آموزان مدارس دیگر تجربه می‌شود. یکی از معلمان در توصیف این وضعیت گفت: «رتبه‌های کنکور بیانگر این است که همیشه این رتبه‌ها از مدارس خاص یا خانواده‌های مرفه هستند. دانش‌آموزان مدارس دولتی یا خانواده‌های متوسط سهم ناچیزی در رتبه‌های برتر کنکور دارند».

یکی دیگر از چالش‌ها، تراکم بالای جمعیت دانش‌آموزی در کلاس‌ها و محدودیت‌های فیزیکی فضای آموزشی است؛ مسئله‌ای که اجرای مؤثر روش‌های نوین و فعال تدریس (در سطح پداگوژی) را با دشواری‌های جدی مواجه می‌سازد. این چالش به‌ویژه در کلاس‌های پرجمعیت رشته‌های علوم تجربی و علوم انسانی نمود بیشتری دارد؛ جایی که معلم، به دلیل محدودیت زمانی، کمبود فضا و فشار برنامه درسی، عملاً فرصت استفاده از رویکردهای تعاملی را از دست می‌دهد، امکان توجه به تفاوت‌های فردی کاهش می‌یابد و رسیدگی به مشکلات یادگیری دانش‌آموزان به حاشیه رانده می‌شود. در چنین شرایطی، فرآیند یاددهی-یادگیری به فعالیتی یکنواخت، معلم‌محور و کم‌تأثیر تبدیل می‌شود که در آن، انتقال صرف اطلاعات بر درک مفهومی و تعمیق یادگیری مقدم می‌گردد. این مشکل در

دروسی مانند ریاضی که ذاتاً نیازمند تعامل، تمرین مستمر، بازخورد فردی و فرصت برای تأمل است، می‌تواند آثار منفی عمیق‌تری به جای بگذارد. یکی از معلمان در این باره اشاره می‌کند که: «با این تعداد دانش‌آموز در کلاس، نمی‌توانیم حتی گروه درست کنیم، چه برسه به اینکه بخوایم روش‌های تعاملی استفاده کنیم. بیشتر وقت کلاس صرف کنترل نظم و تدریس مفاهیم ریاضی می‌شود.»

همچنین، طراحی فیزیکی کلاس‌های درس در اغلب مدارس بر مبنای الگوهای سنتی تدریس صورت گرفته است. چنین چیدمانی اجرای رویکردهای تدریس فعال و تعاملی را، به‌ویژه در آموزش ریاضی، با موانع جدی روبه‌رو می‌سازد. یکی از معلمان در این باره پیشنهاد می‌دهد:

ای کاش کلاس‌هایی داشتیم که دور تا دورش تخته بود؛ در این صورت می‌توانستیم دانش‌آموزان را توی فعالیت‌های گروهی و حل مسئله بیشتر درگیر نماییم. به طوری که هر گروه یک مسئله را حل کند، سپس راه حل‌های یکدیگر را بررسی نمایند. این روش باعث می‌شود که دانش‌آموزان نحوه استدلال کردن و گفت‌وگو کردن به زبان ریاضی را یاد بگیرند.

این وضعیت نشان‌دهنده ضرورت بازنگری در سیاست‌گذاری‌های کلان آموزشی است؛ به‌ویژه در طراحی فضاهای آموزشی، تأمین نیروی انسانی متخصص، و متناسب‌سازی نسبت معلم به دانش‌آموز با توجه به ظرفیت‌های واقعی مدارس است.

زمان اختصاص‌یافته به دروس ریاضی، به‌ویژه در درس‌هایی مانند حسابان ۱ و ۲، با توجه به حجم گسترده مطالب آموزشی، به شدت ناکافی است. اگرچه کتاب‌های درسی فعالیت‌محور طراحی شده‌اند، اما محدودیت زمانی موجود امکان بهره‌برداری کامل از روش‌های نوین را فراهم نمی‌آورد. در نتیجه، بسیاری از معلمان تنها به ارائه محتوای کتاب می‌پردازند، که این امر فرصت لازم برای مرور آموخته‌های دانش‌آموزان، رفع اشکالات، اصلاح بدفهمی‌ها و بررسی دانش پیشین آن‌ها را سلب می‌کند. همچنین، تقسیم زمان آموزشی میان دروس مختلف از توازن لازم برخوردار نیست و بازنگری در این سیاست‌گذاری، ضرورتی اجتناب‌ناپذیر به شمار می‌رود. یکی از معلمان بیان کرد:

با توجه به حجم مطالب درس‌های حسابان، ساعات اختصاص یافته به این درس بسیار کوتاه است و فرصت کافی برای تمرین و تمرکز بر مفاهیم جدید وجود ندارد. دبیر ریاضی مجبور است بخش‌های عمده‌ای مانند مشتق که یکی از مفاهیم بنیادین ریاضیات دانشگاهی است را به سرعت و به صورت سطحی آموزش دهد. این روند باعث عقب‌ماندگی دانش‌آموزان ضعیف‌تر می‌شود... برخی دروس عمومی زمان زیادی به آن‌ها اختصاص یافته که بهتر است در تخصیص ساعات دروس تخصصی تجدیدنظر شود.

برخی نهادهای آموزشی، با در نظر گرفتن درخواست‌های والدین و دانش‌آموزان، از معلمان انتظار دارند که تا اوایل اسفند ماه، تمامی مباحث کتاب ریاضی در مقطع دوازدهم را تدریس کنند. این انتظار منجر به آن می‌شود که معلمان تمرکز خود را صرفاً بر انتقال مطالب و پیش‌روی سریع در محتوای کتاب درسی معطوف کنند، در نتیجه فرصت کافی برای اجرای ارزیابی‌های تکوینی، گفت‌وگوهای مفهومی یا فعالیت‌های تعاملی در کلاس درس فراهم نمی‌شود. این شرایط بر یادگیری مفهومی مفاهیم ریاضی دانش‌آموزان تأثیر منفی می‌گذارد. این وضعیت نه تنها کیفیت فرایند یاددهی-یادگیری را کاهش می‌دهد، بلکه نقش حرفه‌ای معلم را نیز در طراحی برنامه‌های آموزشی و تصمیم‌گیری‌های تربیتی محدود می‌سازد.

تمرکز بیش‌ازحد برخی نهادهای آموزشی بر نتایج امتحانات نهایی، به‌ویژه به دلیل تأثیر مستقیم آن‌ها در نتایج کنکور، سبب شده است که دانش‌آموزان نسبت به سایر انواع ارزشیابی، از جمله ارزشیابی‌های مستمر، تکوینی و پایانی دروس غیرنهایی، بی‌تفاوت باشند. این مسئله در مورد درس ریاضی که در پایه دهم جزو دروس نهایی محسوب نمی‌شود، تأثیر مضاعفی داشته است. بسیاری از دانش‌آموزان تنها با هدف آمادگی برای کنکور به مطالعه ریاضی می‌پردازند و تمرکز خود را بر روی یادگیری تکنیک‌های تست‌زنی و استفاده از کتاب‌های کمک‌آموزشی قرار می‌دهند. در نتیجه، به یادگیری مفهومی و عمیق دانش ریاضی توجه کافی ندارند.

۳.۵. **پداگوژی.** در نظام آموزشی فعلی، تدریس کلیه کتاب‌های ریاضی در شاخه‌های مختلف تحصیلی شامل ریاضی، حسابان، هندسه، گسسته، آمار و احتمال و ریاضی و آمار، عموماً بر عهده تمام دبیران ریاضی است. در حالی که این تنوع دروس، نیازمند دانش تخصصی در حوزه‌های متفاوت ریاضی است. بهتر است تدریس این دروس توسط معلمان انجام شود که در آن شاخه مشخص از ریاضیات دارای دانش تخصصی و مهارت‌های مرتبط، به‌ویژه در زمینه بهره‌گیری از نرم‌افزارها و ابزارهای نوین، باشند. یکی از معلمان در این باره اظهار داشت: «یک معلم ریاضی نمی‌تواند هم‌زمان در تمام شاخه‌های ریاضی تخصص داشته باشد یا بر تمامی نرم‌افزارهای مربوط به آن‌ها مسلط باشد و در جای درست از آن‌ها استفاده کند. به نظر من بهتر است هر درس ریاضی توسط متخصص آن حوزه تدریس شود».

همچنین، شرکت‌کنندگان در پژوهش معتقد بودند که افزایش اختیارات حرفه‌ای معلمان و فراهم‌سازی تجهیزات و امکانات مناسب، در بهبود فرآیند آموزش ریاضی نقش بسزایی دارد. ابزارها و فناوری‌های تعاملی نوین در کلاس‌های درس بسیار محدود یا غایب است، که این خود یکی از عوامل کاهش کیفیت یادگیری در درس ریاضی تلقی می‌شود.

معلمان بیشتر سؤالاتی را در ارزشیابی‌ها و امتحانات مدرسه‌ای در درس ریاضی طرح می‌کنند که عمدتاً دانش رویه‌ای دانش‌آموزان را مورد سنجش قرار می‌دهند. این نوع ارزیابی باعث شده است که دانش‌آموزان بیش‌تر روی یادگیری تکنیک‌های حل مسئله و روش‌های تکراری برای پاسخگویی به سؤالات تمرکز کنند، بدون اینکه به درک عمیق مفاهیم ریاضی یا توانایی به‌کارگیری آن‌ها در موقعیت‌های جدید توجه کافی داشته باشند. چنین جهت‌گیری‌ای در طراحی سؤالات می‌تواند یادگیری سطحی را تقویت کرده و مانع شکل‌گیری مهارت‌های تحلیلی و تفکر ریاضی در دانش‌آموزان شود.

بسیاری از معلمان در نظام آموزش و پرورش، با روش‌های نوین یاددهی-یادگیری و ارزشیابی نظیر یادگیری معکوس، یادگیری اکتشافی و انواع ارزشیابی‌ها آشنایی کافی ندارند و همچنان به استفاده از شیوه‌های سنتی و معلم‌محور به مدیریت کلاس ادامه می‌دهند. یکی از دلایل اصلی این امر، کاهش فرصت‌های حرفه‌ای برای یادگیری و تعامل میان معلمان است؛ به‌ویژه در مناطق کمتر توسعه‌یافته که ضمن خدمت‌ها عمدتاً به صورت مجازی برگزار می‌شوند، کارگاه‌های حضوری کاهش یافته‌اند و گروه‌های آموزشی ریاضی فعال نیستند. یکی از معلمان در این باره چنین بیان کرد:

به نظر من در جلسات گروه‌های آموزشی خیلی خوب می‌شود که معلمان با همفکری یکدیگر و متخصصین حوزه فناوری، به تولید محتوای مناسب برای آموزش مفاهیم ریاضی مثل هندسه و جبر بپردازند. چون یک معلم ممکنه نتواند خودش به‌تنهایی برای تمامی مفاهیم چنین کاری رو انجام بدهد.

۴.۵. **رشته علمی.** یکی دیگر از چالش‌های جدی که در سال‌های اخیر با آن روبه‌رو بوده‌ایم، افت محسوس تعداد دانش‌آموزان در رشته ریاضی-فیزیک و کاهش انگیزه آن‌ها برای یادگیری ریاضی در دوره متوسطه دوم است؛ مسئله‌ای که هم کیفیت آموزش را تحت تأثیر قرار داده و هم آینده این حوزه را با نگرانی‌هایی همراه کرده است. از نظر این معلمان، دلایل متعددی در این افت انگیزشی نقش دارند: دشواری مفاهیم ریاضی، ضعف عملکرد قبلی در این درس و از همه مهم‌تر، ابهام در چشم‌اندازهای شغلی مرتبط با این رشته. یکی از معلمان در این باره توضیح می‌دهد: «الان خیلی از دانش‌آموزان رشته ریاضی امیدی به آینده شغلی خوب ندارند. به نظرم این امر نقش اساسی در انگیزه و تلاش این دانش‌آموزان برای یادگیری مفاهیم ریاضی و ادامه تحصیل دارد».

چنین شرایطی می‌تواند در آینده، چالش‌های جدی برای تربیت نیروی متخصص در حوزه‌های مهندسی، فناوری و علوم پایه ایجاد کند. برای مقابله با این روند، معرفی الگوهای موفق و الهام‌بخش در حوزه‌های مرتبط با ریاضی، تشویق به تفکر خلاقانه و حل مسئله، نمایش کاربردهای واقعی ریاضی در زندگی و صنعت، استفاده هوشمندانه از فناوری‌های نوین در آموزش، تغییر در سبک‌های تدریس به‌سوی رویکردهای فعال و معنادار، و ایجاد ارتباطی مؤثر و همدلانه میان معلم و دانش‌آموز می‌تواند در ارتقای کیفیت یادگیری نقش بسزایی داشته باشد.

با توجه به مسائل روز، شرکت‌کنندگان در پژوهش پیشنهاد دادند دروسی کارآمد جایگزین برخی دروس ناکارآمد شوند. به عنوان

نمونه، دروسی مانند آموزش ریاضی مالی (شامل سود، مدیریت سرمایه، مالیات، بیمه)، کاربرد مفاهیم ریاضی در مسائل واقعی (مثلاً استفاده از مثلثات در تعیین ارتفاعات)، مقدمات داده‌کاوی و آمار کاربردی (شامل نرم‌افزارهای آماری) و فعالیت‌های تحقیقاتی می‌تواند به تقویت تفکر انتقادی و خلاق دانش‌آموزان کمک نماید. یکی از معلمان در این باره اظهار داشت:

مثلاً درس آمادگی دفاعی که دانش‌آموزان در پایه نهم گذرانده‌اند، مجدداً در پایه دهم با حجم سه ساعت در هفته ارائه می‌شود. به جای تکرار این محتوا، می‌توان دروس کاربردی‌تری همچون «ریاضی مالی» را جایگزین کرد تا به ارتقای سواد ریاضی و آمادگی عملی دانش‌آموزان برای زندگی روزمره کمک شود.

یکی دیگر از چالش‌های مطرح‌شده توسط مشارکت‌کنندگان، حذف برخی مباحث بنیادین ریاضی مانند انتگرال، دنباله و سری از کتاب‌های درسی دوره متوسطه دوم، به‌ویژه در رشته ریاضی-فیزیک بود. از دید معلمان، این مفاهیم نقش اساسی در فهم عمیق‌تر مباحث ریاضی در دوره دانشگاهی ایفا می‌کنند و نبود آن‌ها ممکن است به بروز شکاف‌های مفهومی در آموزش ریاضیات پایه در سطح آموزش عالی بینجامد.

۵.۵. حوزه و بخش. نویسندگان و معلمان شرکت‌کننده در این پژوهش بر این باورند که کتاب‌های درسی ریاضی عمدتاً بر آموزش چگونگی اجرای روش‌ها و تکنیک‌های حل مسئله تمرکز دارند و به چرایی استفاده از این تکنیک‌ها، تحلیل آن‌ها و درک مبانی نظری‌شان توجه چندانی نشده است. در چنین رویکردی، روش‌های حل نه به‌عنوان ابزارهایی برای تولید و انتقال معنا، بلکه صرفاً به‌مثابه مهارت‌هایی اجرایی آموزش داده می‌شوند. این در حالی است که ارزش معرفتی روش‌های حل زمانی آشکار می‌شود که این ابزارها در چارچوب درک ساختارهای بنیادی ریاضیات قرار گیرند و زمینه‌ساز تولید معنا، بازسازی استدلال‌ها و انتقال دانش در موقعیت‌های جدید شوند. این مسئله به‌ویژه در حوزه هندسه برجسته‌تر است. دانش‌آموزان هنگام فهم یا ارائه اثبات یک قضیه با دشواری‌های جدی مواجه می‌شوند. این وضعیت، در بلندمدت، به تضعیف کنش‌های شناختی دانش‌آموزان نسبت به ریاضیات و کاهش اعتماد به نفس آن‌ها در یادگیری این درس می‌انجامد. یکی دیگر از معلمان شرکت‌کننده در پژوهش نیز در این باره تصریح می‌کند:

کاهش چشمگیر اثبات‌های تحلیلی و جایگزینی آن با درک شهودی از طریق نمودارها و مثال‌های عددی ساده، از یک سو موجب کاهش اضطراب ریاضی در میان دانش‌آموزان و تسهیل یادگیری مفاهیم برای دانش‌آموزان شده است؛ اما در سوی دیگر، منجر به تضعیف تفکر استدلالی، کاهش توانایی تحلیل چرایی فرمول‌ها، و ضعف در حل مسائل بدیع و ناآشنا شده است.

یکی دیگر از چالش‌های محتوای کتاب‌های درسی، عدم تنوع کافی در سؤالات مطرح‌شده است. این کمبود، مانع از فعال شدن تفکر خلاق، تفکر انتقادی، تفکر سطوح بالاتر و توانمندی‌های شناختی و فراشناختی دانش‌آموزان می‌شود. در نتیجه، توجه بسیاری از معلمان و دانش‌آموزان از کتاب درسی به منابع کمک‌آموزشی معطوف شده است. چرا که دانش‌آموزی که صرفاً به مطالعه کتاب درسی بسنده کند، برای موفقیت در کنکور با دشواری‌های جدی مواجه خواهد شد. یکی از معلمان در این باره اظهار داشت:

سؤالات موجود در کتاب درسی به تنهایی نمی‌توانند موفقیت دانش‌آموزان در کنکور را تضمین کنند. این مسئله باعث شده که کتاب درسی به حاشیه رانده شود و معلمان به سمت نوشتن جزوه و استفاده از کتاب‌های کمک‌آموزشی سوق پیدا کنند. در حالی که کتاب کمک‌آموزشی باید نقش مکمل را داشته باشد، اما امروزه اهمیت آن در فرآیند یادگیری ریاضی از کتاب درسی بیشتر جلوه می‌کند.

۶.۵. زمینه و موضوع. مشارکت‌کنندگان اشاره داشتند که مسئله‌های موجود در کتاب‌های درسی ریاضی نیز عمدتاً به تمرین تکنیک‌ها بدون توجه به استدلال و تفکر مفهومی محدود شده‌اند و ردپای چندانی از مسائل واقعی و کاربردی در آن‌ها مشاهده

نمی‌شود. این رویکرد می‌تواند در نهایت منجر به این شود که دانش‌آموزان یادگیری ریاضی را در ارتباط با زندگی واقعی خود معنادار تلقی نکنند. یکی از معلمان در این باره بیان کرد:

اصلاحات اعمال شده در کتاب‌های ریاضی نونگاشت را می‌توان گامی مثبت در جهت افزایش نسبی کاربردی کردن مفاهیم ریاضی دانست. با این حال، برخی مفاهیم همچنان نیازمند بازنگری‌اند. محتوای این کتاب‌ها عمدتاً بر آموزش روش‌ها و تکنیک‌های حل تمرین متمرکز است، بی‌آنکه این روش‌ها از منظر کارکرد در دنیای واقعی یا قابلیت تولید دانش جدید مورد ارزیابی قرار گیرند.

نویسنده و معلمان، بر اساس تجربه‌های خود، بر این باور بودند که نشان دادن شیوه‌های کاربرد تکنیک‌های ریاضی در مسائل دنیای واقعی و ایجاد ارتباط میان مفاهیم ریاضی و سایر دروس می‌تواند نقش مؤثری در افزایش انگیزه یادگیری دانش‌آموزانی ایفا کند که با هدفی مشخص به دنبال یادگیری هستند و همواره این پرسش تکراری را مطرح می‌کنند که «یادگیری این مطالب چه فایده‌ای دارد؟».

۶. بحث و نتیجه‌گیری

یافته‌های این مطالعه، با بهره‌گیری از سطوح سلسله مراتب هم‌تعیینی تعلیم و تربیت [۱۴] و رویکرد روایت‌پژوهی، تصویری چندلایه و انتقادی از چالش‌های نظام آموزش ریاضی در مدارس متوسطه ایران ترسیم می‌کند. تحلیل روایت‌های معلمان نشان می‌دهد که شکاف عمیقی میان اهداف اعلام شده در اسناد کلان آموزشی - نظیر سند تحول بنیادین - و واقعیت‌های زیسته کلاس‌های درس وجود دارد. این شکاف‌ها در سطوح مختلف سلسله مراتب هم‌تعیینی تعلیم و تربیت مشخص شدند. با این حال، گاهی دشوار است که تشخیص داده شود چالش‌های موجود بر سر تغییرات مطلوب ناشی از محدودیت‌های خارجی اند (مانند: تمدن، جامعه و نهاد آموزشی) یا ریشه در تمایلات معلمان به پرهیز از تغییر است. این یافته‌ها در راستای مطالعات پیشین [۵، ۲۷] قرار دارد. این شکاف‌ها، با اصول بنیادین NCTM مانند برابری، انسجام برنامه درسی، و رویکردهای یاددهی، یادگیری و سنجش و ارزیابی در تضاد است [۲۲، ۲۳].

با توجه به جامعه، توسعه عدالت آموزشی با تمرکز ویژه بر مناطق کمتربرخوردار و مدارس دولتی، در کنار حمایت از مدارس خاص نظیر نمونه دولتی، تیزهوشان، شاهد و فرهنگیان، ضرورتی انکارناپذیر است؛ ضرورتی که با اصل برابری نیز هم‌راستا است [۲۱]. افزون بر این، حمایت‌های مادی و معنوی از معلمان، ایجاد فرصت‌های رشد شغلی، تشویق و تقویت مشارکت آنان در تصمیم‌گیری‌های آموزشی، و به رسمیت شناختن تلاش‌ها و اندیشه‌هایشان، از مهم‌ترین عوامل در حفظ کیفیت آموزشی و ارتقای انگیزه در میان معلمان و دانش‌آموزان محسوب می‌شود [۴].

در ارتباط با نهاد آموزشی، با توجه به یافته‌ها، پیشنهاد می‌شود فضاهای مدرسه‌ای متناسب با نیازهای آموزش فعال ریاضی طراحی و تجهیز شوند. همچنین، طراحی فعالیت‌هایی که از نظر محتوایی چالش‌برانگیز و انگیزه‌بخش باشند، می‌تواند به مشارکت فعال، گفت‌وگو، و تفکر عمیق دانش‌آموزان درباره مفاهیم ریاضی منجر شود.

با توجه به مشکلات مطرح شده در پداگوژی، ارتقای مستمر صلاحیت حرفه‌ای معلمان امری ضروری است؛ به‌ویژه با تمرکز بر به‌کارگیری رویکردهای نوین یاددهی-یادگیری و ارزیابی برای بهبود کیفیت آموزش ضرورت دارد. این ضرورت به‌طور مستقیم با اصول بنیادین شورای ملی معلمان ریاضی NCTM و پژوهش‌های پیشین هم‌راستا است [۲۱، ۲۷]. با توجه به نتایج، برگزاری کارگاه‌ها و کلاس‌های ضمن خدمت حضوری، نشست‌های علمی برای معلمان ریاضی با مشارکت اساتید متخصص در آموزش ریاضی و فناوری، و همچنین همایش‌ها و وبینارهایی با هدف آموزش روش‌های نوین تدریس، به‌کارگیری فناوری در آموزش مفاهیم مختلف ریاضی، طراحی سؤال‌های اثربخش، و شیوه‌های نوین ارزشیابی، از جمله اقداماتی است که می‌تواند به ارتقاء کیفیت فرآیند یاددهی-یادگیری بیانجامد [۲۳]. همچنین، به‌کارگیری انواع مختلف سؤال‌ها در سنجش و ارزیابی از جمله سؤالات باز-پاسخ [۳]، فرآیند باز [۳۱]، طرح مسئله [۳۲]، مدل‌سازی [۱۰، ۳]، مسائل ارزشیابی [۲۵] و استفاده از مدل SPUR [۳۲] می‌تواند در یادگیری مفهومی ریاضی

اثر بخش باشد.

در ارتباط با رشته علمی، یافته‌های این پژوهش نشان می‌دهد که بی‌توجهی به آموزش عمیق مفاهیم بنیادینی همچون انتگرال در دوره متوسطه، به‌ویژه برای دانش‌آموزان رشته ریاضی-فیزیک، منجر به ایجاد شکاف مفهومی در دروس ریاضیات پایه در دانشگاه می‌شود. این نتیجه با مطالعات پیشین نیز هم‌راستا است؛ مطالعاتی که بر ضرورت توسعه و آموزش تدریجی این مفاهیم در ریاضی مدرسه‌ای برای تقویت درک ریاضی در سطوح دانشگاهی تأکید دارند [۴، ۶]. در این راستا، دو توصیه کلیدی با توجه به نتایج این پژوهش قابل طرح است. نخست، لازم است که در فرآیند بازنگری و تألیف مجدد یا اصلاح کتاب‌های درسی ریاضی متوسطه دوم، به‌ویژه در رشته ریاضی-فیزیک، از نظرات اعضای هیئت علمی دانشگاه‌ها و کارشناسان متخصص آموزش ریاضی بهره گرفته شود تا هماهنگی بیشتری بین محتوای مدرسه و نیازهای دانشگاهی حاصل گردد. دوم، پیشنهاد می‌شود که اساتید دانشگاه پیش از تدریس دروس پایه ریاضی مانند ریاضی عمومی، ریاضی مهندسی یا معادلات دیفرانسیل، مروری بر کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه داشته باشند تا از دانش پیشین ریاضی دانشجویان آگاهی یابند و بتوانند فرآیند یاددهی-یادگیری را با سطح آمادگی و خلأهای احتمالی دانشجویان تازه‌وارد به دانشگاه طراحی نمایند. این رویکرد می‌تواند به کاهش شکاف آموزشی میان مدرسه و دانشگاه کمک کرده و فرایند انتقال دانش‌آموز به دانشجو را تسهیل کند.

با توجه به نتایج چهار سطح آخر، یافته‌ها حاکی از آن است که تمرکز صرف بر چگونگی اجرای تکنیک‌ها بدون تبیین مبانی مفهومی و عقلانیت درونی آن‌ها، موجب می‌شود که تکنیک‌ها به‌عنوان رویه‌هایی فاقد انسجام مفهومی و گسسته از گفتار ریاضی همچون استدلال و اثبات تلقی شوند [۴]. این امر موجب می‌شود که بسیاری از دانش‌آموزان در مواجهه با مفهوم اثبات، آن را به‌مثابه امری دشوار، انتزاعی و جدا از تجربه‌های ریاضی پیشین خود تلقی کنند. این عدم ادغام مفهوم اثبات در فرایند یاددهی و یادگیری، نه‌تنها امکان بسط تفکر استدلالی را محدود می‌سازد، بلکه وابستگی دانش‌آموزان به بازتولید الگوریتمی روش‌های حل را افزایش داده و توانایی آن‌ها را در مواجهه با مسائل ناآشنا کاهش می‌دهد [۳۰].

در این مسیر، باید از جایگزین‌سازی اثبات با استدلال‌های صرفاً تجربی یا شهودی پرهیز کرد؛ چراکه چنین رویکردی می‌تواند درک نادرستی از ماهیت ریاضیات و کارکرد واقعی اثبات ایجاد کند. در عوض، در کتاب‌های درسی باید فعالیت‌هایی با توجه به سلسله‌مراتب سطوح اثبات [۹] طراحی شوند که دانش‌آموزان را به درگیر شدن در فرایندهای استدلال، گفت‌وگو، و پشتیبانی از ایده‌های ریاضی خود سوق دهد [۳۰]. با این هدف می‌توان از رویکردهایی همچون آموزش مبتنی بر پرسش [۲۴، ۸] در چارچوب نظریه موقعیت‌های تعلیمی [۱۳] و مطالعه و بررسی مسیرها [۲۶] در چارچوب نظریه انسان‌شناسی تعلیم و تربیت [۱۲، ۱۴] بهره گرفت. در این رویکردها، به‌جای ارائه اثباتی از پیش آماده، فرایند یاددهی با طرح یک پرسش بنیادین آغاز می‌شود و معلم، دانش‌آموزان را در فرایند تولید تدریجی ابزارهای لازم برای ساختن اثبات هدایت می‌کند و آن را به تجربه‌ای لذت‌بخش بدل می‌سازد [۸، ۱۲].

همچنین، کتاب‌های درسی باید فعالیت‌هایی را جایگزین کاربردهای سطحی کنند تا دانش‌آموزان بتوانند از دانش ریاضی خود در حل مسائل دنیای واقعی استفاده نمایند [۲۷]. طراحی سؤالات می‌تواند با بهره‌گیری از چارچوب‌هایی چون طبقه‌بندی بازنگری شده بلوم [۲۷]، یادگیری مبتنی بر مسئله، مدلسازی ریاضی و پرسش‌های مرتبط با دنیای واقعی انجام شود [۷، ۱۹، ۲۰، ۲۴، ۲۶]. طراحی چنین سؤالاتی در کتاب درسی، علاوه بر توانمندسازی دانش‌آموزان در حل مسائل غیرالگویی و موقعیت‌های ناآشنا، موجب افزایش انگیزه یادگیری ریاضی، تقویت توانایی آن‌ها در کاربرد دانش ریاضی در موقعیت‌های جدید و ارتقا به سطوح بالاتر تفکر نیز می‌شود [۲۶، ۲۷].

²⁴Inquiry based mathematics education

²⁵Theory of Didactical Situations

²⁶Study and Research Paths

²⁷Revised Bloom's Taxonomy

لازم است تأکید شود که یافته‌های این پژوهش، بر مبنای داده‌هایی محدود و با استفاده از رویکردهای نو و تا حدی آزمایشی تحلیل شده‌اند. علاوه بر این، تمامی مشاهدات از منظر و برداشت پاسخ‌دهندگان و نویسنده تفسیر شده و تحت تأثیر دیدگاه‌ها و تجربه‌های آن‌ها قرار دارد. به‌ویژه، در تحلیل چگونگی اثرگذاری سطوح سلسله‌مراتبی هم‌تعیینی تعلیم و تربیت بر ساختار و تحول برنامه‌های درسی، اتکای ما به مصاحبه با معلمان ریاضی تنها بخش محدودی از واقعیت را منعکس کرده است.

با این حال، شواهد به روشنی نشان می‌دهد امروزه بیش از هر زمان دیگری، ضروری است برنامه درسی ریاضی به گونه‌ای طراحی شود که توانایی تفکر انتقادی، خلاق و حل مسئله را در دانش‌آموزان پرورش دهد [۵]. یافته‌های این پژوهش نشان می‌دهد که تحقق اهداف برنامه‌های تحول آموزشی تنها با تغییر کتاب‌های درسی یا افزودن بخش‌هایی به آن‌ها امکان‌پذیر نیست؛ بلکه مستلزم یک تحول ساختاری و چندسطحی در سیاست‌های کلان آموزشی، الگوهای تدریس، شیوه‌های ارزشیابی، و نظام توسعه حرفه‌ای معلمان است. آموزش ریاضی زمانی می‌تواند به ابزاری مؤثر برای پرورش دانش‌آموزانی متفکر، مسئله‌محور، و آماده برای زیستن در جهان پیچیده امروز تبدیل شود که اصول عدالت آموزشی، انسجام مفهومی، و یادگیری معنا دار به‌صورت واقعی و پایدار در کلاس‌های درس جاری شوند [۲۱، ۲۲، ۲۳]. از این رو، تحلیل نظام‌مند و عمیق سازوکارهای مؤثر بر این تغییرات، پیش‌نیازی ضروری برای بهره‌گیری مؤثر از یافته‌های پژوهش در جهت ارتقای کیفیت و کارآمدی آموزش ریاضیات در مدارس محسوب می‌شود.

مراجع

۱. س. احمدی، تبیین نابرابری مدرسه‌های بین مدارس متوسطه شهر ارومیه و راهبردهای آمایشی آن، رساله دکتری رشته مدیریت آموزشی، دانشگاه ارومیه، ۱۳۹۶.
۲. ا. م. داشته، م. نوریان و م. سمیعی زفر قندی، واکاوی تجربیات معلمان درباره موانع و مشکلات یادگیری درس ریاضی، مجله راهبردهای آموزش در علوم پزشکی، ۱۴ (۱۴۰۰)، شماره ۶، ۱۷۴-۱۸۵.
۳. ا. ریحانی، تحلیل خط‌مشی‌ها، اسناد مصوب، پژوهش‌ها و منابع معتبر مرتبط با حوزه یادگیری ریاضی، وزارت آموزش و پرورش، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، ۱۳۹۵.
۴. ق. صادقی، م. ص. مصلحیان، صنمی، مرصعی، م. میرزاویزی، م. نوغانی دخت بهمنی و م. وثوق، آموزش مدرسه‌ای مسئله این است، نشریه ریاضی و جامعه، ۵ (۱۳۹۹)، شماره ۴، ۴۳-۵۲. <https://doi.org/10.22108/MSCI.1470.130621.2021>
۵. س. غلام آزاد، تغییر برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای: چالش‌ها و تحقیقات مورد نیاز، فصلنامه برنامه درسی ایران، ۱۵ (۱۳۹۹)، شماره ۵۷، ۱۰۷-۱۲۸.
۶. م. کیانی، نقد و بررسی مفاهیم آنالیزی کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه، به سوی علوم ریاضی، ۲ (۱۴۰۱)، شماره ۱، ۳۱-۷۹. <https://doi.org/10.22067/tmsj.41431.2021>
7. L. W. Anderson, D. R. Krathwohl, P. W. Airasian, K. A. Cruikshank, R. E. Mayer, P. R. Pintrich, J. Rath, and M. C. Wittrock, *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives (Complete edition)*, Longman, New York, NY, 2001.
8. M. Artigue and M. Blomhøj, *Conceptualizing inquiry-based education in mathematics*, ZDM. 45 (2013), no. 6, 797-810. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6>.
9. N. Balacheff, *Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics*, in D. Pimm (ed.), *Mathematics, teachers and children*, Hodder & Stoughton, London, (1988), pp. 216-235.

10. W. Blum, *Quality teaching of mathematical modelling: what do we know, what can we do?*, in S. J. Cho (ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, Springer, Cham, (2015), pp. 73–96.
11. M. Bosch and J. Gascón, *Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD)*, in A. Bikner-Ahsbals and S. Prediger (eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*, Springer, Dordrecht, The Netherlands, (2014), pp. 67–83.
12. M. Bosch, *Study and research paths: A model for inquiry*, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians: Rio de Janeiro 2018*, (2019), pp. 4015–4035. https://doi.org/10.1142/9789813272880_0210
13. G. Brousseau, *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Kluwer, Dordrecht, 1997.
14. Y. Chevallard, *Introducing the anthropological theory of the didactic: An attempt at a principled approach*, Hiroshima Journal of Mathematics Education. **12** (2019), 71–114.
15. J. W. Creswell, *Qualitative Inquiry and Research Design: Choosing Among Five Approaches* (3rd ed.), SAGE, Thousand Oaks, CA, 2013.
16. J. W. Creswell and C. N. Poth, *Qualitative Inquiry and Research Design: Choosing Among Five Approaches* (4th ed.), SAGE, Thousand Oaks, CA, 2018.
17. B. DiCicco-Bloom and B. F. Crabtree, *The qualitative research interview*, Medical Education. **40** (2006), no. 4, 314–321. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2929.2006.02418.x>
18. L. Fan, Y. Zhu, and Z. Miao, *Textbook research in mathematics education: Development status and directions*, ZDM. **45** (2013), no. 5, 633–646. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x>.
19. R. B. Ferri, *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*, Springer International Publishing, 2018.
20. F. K. Lester Jr, *Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction*, The Mathematics Enthusiast. **10** (2013), no. 1, 245–278. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1267>.
21. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), *Principles and Standards for School Mathematics*, Author, Reston, VA, 2000.
22. National Council of Teachers of Mathematics, *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*, Author, Reston, VA, 2014.
23. National Council of Teachers of Mathematics, *High School Mathematics: Reimagined, Revitalized, and Relevant*, Author, Reston, VA, 2023.
24. F. Radmehr and M. Drake, *Revised Bloom's taxonomy and integral calculus: unpacking the knowledge dimension*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. **48** (2017), no. 8, 1206–1224. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1321796>.

25. F. Radmehr and M. Drake, *An assessment-based model for exploring the solving of mathematical problems: Utilizing revised Bloom's taxonomy and facets of metacognition*, Studies in Educational Evaluation. **59** (2018), 41–51. <https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2018.02.004>.
26. F. Radmehr and P. Vos, *Issues and challenges for 21st century assessment in mathematics education*, in L. Leite, E. Oldham, A. S. Afonso, F. Viseu, L. Dourado, and H. Martinho (eds.), *Science and Mathematics Education for 21st Century Citizens: Challenges and Ways Forwards*, Nova Science Publishers, New York, (2020), pp. 437–462. <https://novapublishers.com/shop/science-and-mathematics-education-for-21st-century-citizens-challenges-and-ways-forwards/>.
27. A. Rafiepour and D. Farsani, *Cultural Historical Analysis of Iranian School Mathematics Curriculum: The Role of Computational Thinking*, Journal on Mathematics Education. **12** (2021), no. 3, 411–426. <https://doi.org/10.22342/jme.12.3.14387.411-426>.
28. S. Rezat, L. Fan, and B. Pepin, *Mathematics textbooks and curriculum resources as instruments for change*, ZDM–Mathematics Education. **53** (2021), 1189–1206. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01309-3>.
29. A. H. Schoenfeld, *What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them?*, Educational Researcher. **43** (2014), no. 8, 404–412. <https://doi.org/10.3102/0013189X14554450>
30. A. J. Stylianides, *The notion of proof in the context of elementary school mathematics*, Educational Studies in Mathematics. **65** (2007), 1–20. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9038-0>.
31. C. Suurtamm, D. R. Thompson, R. Young Kim, L. Diaz Moreno, N. Sayac, S. Schukajlow, E. Silver, S. Ufer and P. Vos, *Assessment in mathematics education: Large-scale assessment and classroom assessment*, Springer International Publishing, 2016.
32. D. R. Thompson and B. Kaur, *Using a multi-dimensional approach to understanding to assess students' mathematical knowledge*, in B. Kaur and K. Y. Wong (eds.), *Assessment in the Mathematics Classroom*, World Scientific Publishing, Singapore, (2011), pp. 17–32. https://doi.org/10.1142/9789814360999_0002.
33. J. Xie and J. O. Masingila, *Examining interactions between problem posing and problem solving with prospective primary teachers: a case of using fractions*, Educational Studies in Mathematics. **96** (2017), 101–118. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9760-9>.



MATHEMATICS—A “QUASI-NATURAL SCIENCE” AT SCHOOL?

MAJID AFSHARI ^{1*} AND HAMIDREZA KASHEFI ²

¹Department of Physics Education, Farhangian University, P.O. Box 14665-889, Tehran, Iran
m.afshari@cfu.ac.ir

²Department of Mathematic Education, Farhangian University, P.O. Box 14665-889, Tehran, Iran
hkashefi@cfu.ac.ir

Abstract. The most distinctive characteristic which differentiates mathematics from the various branches of empirical science, and which accounts for its fame as the queen of the sciences, is no doubt the peculiar certainty and necessity of its results. In this way, Hempel described a specific feature of modern mathematics. Hempel traced this certainty and this necessity back to the consideration that after Hilbert mathematics has developed towards a formal-abstract science, which does not need ontological bounding to reality (physical space) anymore but is based solely on logical consistency. However, at school mathematics still is not and cannot be taught in this abstract form for various reasons, here the usage of illustrative material, diagrams and real-world application is essential. From a constructivist point of view, students in this environment construct a so-called “empirical-concrete” mathematical worldview on the basis of real objects than a “formal-abstract” worldview as it is described by Hempel. This “empiricalconcrete” mathematical worldview, on an epistemologically level, is quite close to the natural sciences; one could speak of mathematics in modern school as something like a “quasi-natural science”. Questions regarding core beliefs, terms and processes of natural sciences (education) in general and physics (education) in particular are of eminent importance to mathematics teachers from this point of view and open a whole range of possibilities for further discussions and cooperation at the crossroads.

2020 Mathematics Subject Classification. 45D05

Keywords. Interdisciplinary, Relation between mathematics and physics, Epistemology

Date: Received 30-05-2025 Accepted 15-11-2025 Available Online 20-12-2025

©Ferdowsi University of Mashhad.



ریاضیات - یک «علم شبه طبیعی» در آموزش مدرسه‌ای ترجمه

مجید افشاری^{۱*} و حمیدرضا کاشفی^۲

^۱گروه آموزش فیزیک، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۱۴۶۶۵-۸۸۹، تهران، ایران

m.afshari@cfu.ac.ir

^۲گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۱۴۶۶۵-۸۸۹، تهران، ایران

hkashefi@cfu.ac.ir

چکیده. ریاضیات به واسطه قطعیت و ضرورت نتایج خود از علوم تجربی متمایز می‌شود؛ ویژگی‌ای که همپل را بر آن داشت تا آن را «ملکه علوم» بنامد. او این قطعیت را به تحول ریاضیات پس از هیلبرت نسبت می‌دهد، جایی که ریاضیات به دانشی صوری و انتزاعی بدل شد که نه بر پیوندهای هستی‌شناختی با واقعیت فیزیکی، بلکه صرفاً بر سازگاری منطقی استوار است. با این حال، در آموزش مدرسه‌ای، ریاضیات نمی‌تواند به این شکل کاملاً انتزاعی تدریس شود و استفاده از نمودارها، مواد تصویری و کاربردهای دنیای واقعی ضروری است. از دیدگاه سازه‌گرایانه، دانش‌آموزان در این فضا به جای جهان‌بینی «صوری-انتزاعی» توصیف‌شده توسط همپل، یک جهان‌بینی ریاضی «تجربی-عینی» مبتنی بر اشیای واقعی می‌سازند. از منظر معرفت‌شناختی، این نوع ریاضیات مدرسه‌ای به علوم طبیعی نزدیک است و می‌توان آن را نوعی «علم شبه طبیعی» دانست؛ امری که پرسش‌های بنیادین علوم طبیعی و به‌ویژه آموزش فیزیک را برای معلمان ریاضی بسیار مهم می‌سازد و زمینه‌ای برای گفت‌وگوی میان‌رشته‌ای فراهم می‌کند.

2010 Mathematics Subject Classification. 45D05.

واژگان کلیدی. میان‌رشته‌ای، رابطه بین ریاضیات و فیزیک، معرفت‌شناسی

E. Krause, Mathematics—A “Quasi-natural Science” at School?, Concepts, Strategies and Models to Enhance Physics Teaching and Learning, 2019.

تاریخ: دریافت ۱۴۰۴/۰۳/۰۹ پذیرش ۱۴۰۴/۰۸/۲۴ انتشار برخط ۱۴۰۴/۰۹/۲۹
نحوه ارجاع به این مقاله: م. افشاری و ح. کاشفی، ریاضیات - یک «علم شبه طبیعی» در آموزش مدرسه‌ای، به سوی علوم ریاضی، ۵ (۱۴۰۴)، شماره ۱، ۶۷-۵۸.

©دانشگاه فردوسی مشهد.

* نویسنده مسئول

۱. چرا باید آموزشگران فیزیک و ریاضی با هم همکاری کنند؟

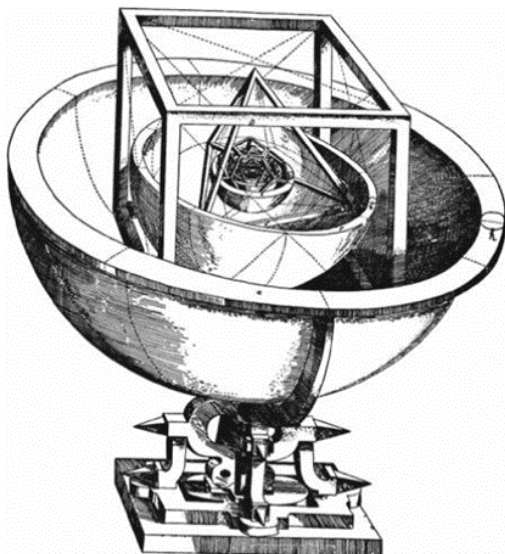
۱.۱. نمونه‌ای از یک بخش فرعی. «خدا جهان را با استفاده از هندسه آفرید!» [۱۶] - باورهای متافیزیکی مانند این باعث شده‌اند که دانشمندانی چون یوهانس کپلر تلاش کنند تا دنیای واقعی را از طریق ارتباط بین علوم طبیعی و ریاضیات توضیح دهند. به همین دلیل، او در تجربه‌ای شگفت‌انگیز توانست فاصله‌های ظاهراً نامنظم سیارات را از طریق مدل چندوجهی خود، که بر اساس اجسام افلاطونی بود، توضیح دهد (شکل ۱). حتی بدون این ملزومات متافیزیکی، ارتباط بین ریاضیات و فیزیک را می‌توان نه تنها از طریق بررسی تاریخ پیدایش این دو موضوع بازسازی کرد، بلکه این ارتباط امکانات بی‌شماری را برای آموزش و یادگیری این دو رشته فراهم می‌کند. به‌ویژه در آموزش عالی، تدریس اغلب از مرزهای بین رشته‌ها عبور می‌کند. از آغاز دهه ۲۰۰۰، میان‌رشته‌ای بودن نه تنها در دانشگاه‌ها به‌عنوان یک شیوه جدید پژوهش [۵] و آموزش [۲۹] مورد توجه قرار گرفته است، بلکه به‌عنوان یک اصل آموزشی در طراحی فرآیندهای یادگیری-آموزشی مثلاً در قالب پروژه‌های مسئله‌محور در مدارس متوسطه، جایگاه ویژه‌ای پیدا کرده است [۲۰، ۲۶].

در این راستا گرانزر [۱۰]، با این امید که دانش‌آموزان بتوانند شایستگی‌های کلیدی را توسعه دهند، از «شایستگی‌های میان‌رشته‌ای» سخن می‌گوید و برای تحقق این مفهوم پیچیده و چالش‌برانگیز، به طور عملی از روش‌های مختلف تدریس استفاده کرده است (به‌عنوان مثال، [۳، ۲۱]). با این حال، تمرکز همواره بر روی توانایی ترکیب، کاربرد و تحلیل نظام‌مند دانش از رشته‌های مختلف است. پتانسیل آموزشی تدریس و یادگیری میان‌رشته‌ای به‌ویژه در میان رشته‌های علوم، فناوری، مهندسی و ریاضیات مدتی است که مورد بحث قرار گرفته است [۱۵، ۲۳].

ریاضیات و فیزیک به‌طور خاص برای این هدف مناسب هستند [۹]. نگاهی به برنامه درسی اصلی ریاضیات نشان می‌دهد که یکی از وظایف مهم آموزش ریاضی این است که دانش‌آموزان بتوانند ریاضیات را در موقعیت‌های کاربردی با زمینه‌های واقعی و ملموس تجربه کنند [۲، ۳۸]. اگرچه روش‌های مختلفی برای گنجاندن زمینه‌های کاربردی غیر ریاضی در تدریس ریاضی وجود دارد، متأسفانه برخی از آن‌ها هنوز هم به‌صورت تکنیک‌های استاندارد محاسباتی ارائه می‌شوند [۱، ۱۴] که فقط موقعیت‌های خاص ریاضی را پوشش داده و یا مجموعه‌ای از مسائل کاربردی مختلف را مطرح می‌کنند که اجرای آن‌ها ممکن است دشوار یا گیج‌کننده باشد [۳۶]. فیزیک زمینه‌های بسیاری را برای به‌کارگیری ریاضیات به‌صورت معتبر ارائه می‌دهد، اما استفاده از این کاربردها در فرآیند تدریس و یادگیری ریاضی به آن سادگی که به نظر می‌رسد، نیست. از سوی دیگر، ریاضیات نقش مهمی در یادگیری فیزیک ایفا می‌کند [۱۸، ۲۸]. پرداختن به فیزیک به‌صورت کمی، بدون ریاضیات غیرممکن است. ریاضیات نه تنها به‌عنوان ابزاری برای محاسبات، بلکه به‌عنوان زبانی برای بیان مختصر و دقیق مفاهیم پیچیده استفاده می‌شود. یکی از چالش‌های بزرگ معلمان فیزیک این است که توضیح دهند چرا و چگونه ریاضیات برای فیزیک ضروری است. اما این روابط میان ریاضیات و فیزیک در سطح محتوایی قرار دارند. این مقاله به بررسی ارتباط ریاضی و فیزیک در فرا-سطح می‌پردازد تا مشابهت‌های معرفت‌شناختی بین ریاضیات مدرسه‌ای و فیزیک را نشان دهد و پیامدهای آن‌ها را برای تدریس و یادگیری ریاضیات و فیزیک بررسی کند. این شباهت‌ها در سطح معرفت‌شناختی، همراه با ارتباطات در سطح محتوایی، یک پایه محکم برای آموزش میان‌رشته‌ای ریاضیات و فیزیک در مدرسه، در دوره‌های تربیت معلم و در طراحی پروژه‌های پژوهشی فراهم می‌کند.

۲. باورها درباره ریاضیات مدرن و ریاضیات مدرسه‌ای

نخست، باید در نظر بگیریم که ریاضیات به‌طور کلی چیست. اگر از مردم بپرسید که ریاضیات چیست، پاسخ‌های بسیار متفاوتی دریافت خواهید کرد. کسی که ریاضیات مدرن را در سطح دانشگاهی آموخته باشد، احتمالاً با اینشتین [۶، ۲۲] موافق خواهد بود که (به نقل از [۷، ۱۱]) می‌گوید: «تا جایی که قوانین ریاضیات به واقعیت اشاره دارند، قطعی نیستند؛ و تا جایی که قطعی‌اند، به واقعیت اشاره ندارند». قطعیت در ریاضیات، که به معنای سازگاری درونی آن است، برای ریاضیات بسیار مهم است. اما هنگامی



شکل ۱: مدل چندوجهی کپلر [۱۶] به عنوان مثالی از نمایش ارتباط ریاضیات و فیزیک

که ریاضیات به واقعیت ارجاع داده می‌شود، این قطعیت از بین می‌رود. این مفهوم انتزاعی-صوری از ریاضیات که حدود ۱۰۰ سال پیش توسط دیوید هیلبرت [۱۲] توسعه یافت، منجر به افزایش چشمگیر بهره‌وری در ریاضیات شد. زیرا حوزه موضوعی ریاضیات به‌طور قابل‌توجهی گسترش یافت [۲]. به عنوان مثال، در هندسه، پیش از هیلبرت، تنها فضاهایی تا بُعد سه بررسی می‌شدند، زیرا فضاهای با ابعاد بالاتر از نظر فیزیکی غیرواقعی به شمار می‌آمدند [۲۵]. از زمان هیلبرت [۱۲]، ریاضیات به عنوان نمونه اولیه علوم صوری-انتزاعی تلقی شده و با ویژگی‌های زیر تعریف می‌شود:

- ساختار اصل موضوعی
- جدا از واقعیت
- علم سیستم‌های انتزاعی تفسیر نشده (تمرکز بر ساختارها)
- مفهوم مطلق حقیقت (سازگاری درونی)

به‌طور خلاصه، می‌توان با استناد به فرودنتال [۸] گفت: «پیوند ریاضیات با واقعیت توسط هیلبرت قطع شده است». بر اساس یک فرضیه مستند در آموزش ریاضی، باور دانش‌آموزان نسبت به ریاضیاتی که در کلاس درس کسب می‌کنند، متفاوت است [۳۴]. تلاش‌ها برای آموزش ریاضیات در قالبی انتزاعی-صوری در مدارس در دهه ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ (جنبش «ریاضیات جدید») با شکست مواجه شد. در عوض، معلمان سعی دارند ریاضیات را به‌صورت ملموس و با کمک ابزارهای دیداری و رسانه‌های آموزشی تدریس کنند. مطالعات تجربی یک دوراهی را آشکار می‌کند: در حالی که برخی از معلمان مایل‌اند یک نظریه ریاضی انتزاعی-صوری را منتقل کنند، دانش‌آموزان در عمل یک نظریه تجربی-نمایشی درباره چگونگی استفاده از ابزارهای بصری و مفهومی را فرا می‌گیرند [۳۱، ۳۷]. به نظر می‌رسد، معلمان و دانش‌آموزان برداشت‌های متفاوتی از ریاضیات دارند — این مشاهده برای توسعه بیشتر آموزش ریاضی بسیار مهم است. در این شرایط، نظریه‌های دانش‌آموزان، نظریه‌های «فیزیکی» هستند، به این معنا که پدیده‌های واقعی، یعنی تجسم‌سازی، توصیف و تبیین می‌شوند. وجه اشتراک این دو، جنبه تجربی آن‌هاست: هدف، توصیف و توضیح پدیده‌های تجربی (فیزیکی) است.

دو مثال زیر نشان می‌دهند که چگونه درک دانش‌آموزان از ریاضیات مدرسه‌ای با درک انتزاعی-صوری ریاضیات در سطح دانشگاهی تفاوت دارد. مثال اول: هندسه مدرسه‌ای. هندسه اقلیدسی برای نخستین بار توسط دیوید هیلبرت [۱۲] به‌طور کامل بر اساس اصول موضوعی بنا نهاده شد. این دستگاه شامل ۲۰ اصل موضوعه است. با این حال، در آموزش هندسه در مدارس، این دستگاه اصل موضوعی انتزاعی-صوری در ابتدا ارائه نمی‌شود، بلکه هندسه با کمک شکل‌هایی که بر روی کاغذهای رسم یا تخته سیاه ترسیم می‌شوند، تدریس می‌شود. به این ترتیب، دانش‌آموزان هندسه انتزاعی-صوری را به معنای کتاب «مبانی هندسه» هیلبرت، که صرفاً با کمک شکل‌های ترسیمی ماهرانه به تصویر کشیده شده است، فرا نمی‌گیرند، بلکه یک نظریه تجربی-نمایشی از شکل‌های ترسیمی را می‌آموزند [۲۴]. این موضوع در مطالعات تجربی شونفیلد [۳۲، ۳۳] تأیید شده است. او با مشاهده دانش‌آموزان هنگام حل مسائل هندسی و بررسی «نظام باورهای» آن‌ها، به این نتیجه رسید که دانش‌آموزان دارای یک «نظام باور تجربی» هستند، در حالی که ریاضی‌دانان از یک «نظام باور ریاضی» پیروی می‌کنند.

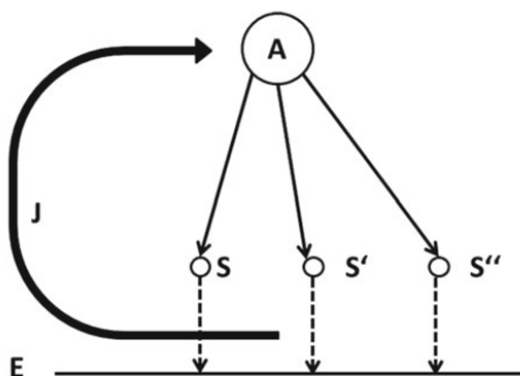
مثال دوم، آنالیز مدرسه‌ای است. موضوع اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال مدرن، توابع هستند. این توابع اشیایی جبری یا روابطی انتزاعی-صوری هستند که ویژگی‌های نظری خاصی را برآورده می‌کنند. از آنجا که مجموعه اعداد حقیقی در مدارس تنها به‌صورت ابتدایی تدریس می‌شود و به‌ویژه مفهوم کامل بودن آن معمولاً مورد بحث قرار نمی‌گیرد، تدریس حساب دیفرانسیل و انتگرال در مدارس نمی‌تواند همانند سطح دانشگاهی انجام شود. در عوض، نمایش بصری توابع از طریق نمودارها (ترسیم گراف‌ها)، که اغلب بر اساس رسم دستی یا نمایش روی ماشین حساب‌های گرافیکی است، پایه تدریس قرار می‌گیرد. در نتیجه، دانش‌آموزان در واقع یک نظریه تجربی درباره نمودارهای ترسیمی یاد می‌گیرند، نه یک نظریه انتزاعی درباره توابع [۳۷]. با این حال، یک درک تجربی-عینی از ریاضیات در مدرسه لزوماً یک نقص نیست. تحلیل‌های تاریخی [۳۵] نشان می‌دهند که بسیاری از ریاضیدانان در تاریخ ریاضیات چنین ایده‌ای داشته‌اند: مثال‌هایی از آن‌ها، موریتس پاش برای هندسه و لایبنتس و همچنین یاکوب و یوهان برنولی در حساب دیفرانسیل و انتگرال هستند. این مطالعات موردی تاریخی نشان می‌دهد که یک مفهوم تجربی-فیزیکی از ریاضیات به ویژه برای آموزش در مدرسه مناسب به نظر می‌رسد.

یک نظام باورهای تجربی از ریاضیات را می‌توان با نکات زیر مشخص کرد:

- یک حوزه موضوعی واقعی
- توضیح دانش از طریق استدلال منطقی و ارجاع به دانش شناخته‌شده
- تثبیت دانش از طریق تجربه‌گرایی

۳. شباهت‌های معرفت‌شناختی بین ریاضیات مدرسه‌ای و فیزیک

از زمان گالیله، نه تنها استقرا، بلکه استنتاج نیز نقش مهمی در فیزیک ایفا می‌کنند [۲۴]. تعمیم استقرایی پدیده‌های طبیعی به‌تنهایی منجر به تولید دانش علمی نمی‌شود. اگرچه تلاش‌هایی برای تثبیت استقرا به‌عنوان روشی نظام‌مند برای شکل‌گیری نظریه در فیزیک انجام شده است، اما این تلاش‌ها چندان موفقیت‌آمیز نبوده‌اند. مشهورترین مثال این نوع رویکرد، روش استقرایی فرانسس بیکن است. او با مشاهده نظام‌مند و ثبت داده‌ها (همان جدول‌های مثبت و منفی معروف بیکن) در یک فرایند تکراری، سعی کرد بینش جدیدی (نتیجه خطی مرحله اول، مرحله دوم و غیره) به دست آورد. اگرچه او با این روش ارتباطی بین گرما و حرکت کشف کرد، اما سیمونی [۳۰] در بررسی‌های تاریخی خود می‌نویسد: «در عمل، روش دقیق بیکن برای کشف قوانین واقعی طبیعت قابل استفاده نیست و هیچ قانون جدیدی از این طریق کشف نشده است». این بدفهمی از ماهیت فیزیک بسیار رایج است، اینشتین بارها در نوشته‌های خود درباره فلسفه علوم طبیعی، علیه دیدگاه‌های استقرایی صرف موضع گرفته است. هولتون [۱۳] درباره نظرات اینشتین چنین توضیح می‌دهد: «رشد و پیشرفت یک علم در مراحل ابتدایی، اغلب به شکل صعود از یک نردبان منطقی است که در آن، گزاره‌های کلی با استفاده از استقرا از مشاهدات جزئی حاصل می‌شوند». اینشتین گفته است [۶]: «هیچ روش استقرایی وجود



شکل ۲: مدل EJASE اینشتین

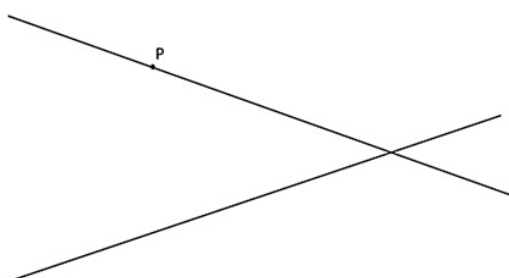
ندارد که به فرضیه‌های بنیادی فیزیک منجر شود. عدم درک این واقعیت، خطای بنیادی فلسفی است که بسیاری از پژوهشگران قرن نوزدهم را گمراه کرده است». او علم را این‌گونه توصیف می‌کند [۶]: علم تلاشی است برای سازگار کردن تنوع آشفته تجربیات حسی با یک دستگاه فکری منسجم و منطقی؛ در این دستگاه، تجربیات فردی باید به‌گونه‌ای به ساختار نظری مرتبط شوند، که نتیجه این ارتباط منحصربه‌فرد و قانع‌کننده باشد. تجربیات حسی، داده‌های اولیه هستند. اما نظریه‌ای که هدف تفسیر آن‌هاست، ساخته دست انسان است. این نظریه نتیجه یک فرآیند تطبیق بسیار طاقت‌فرسا، فرضی، نه کاملاً نهایی، و همواره در معرض پرسش‌ها و تردیدهاست.

در نامه‌ای که اینشتین در سال ۱۹۵۲ به دوست خود موریس سولوون نوشت، دیدگاه خود را درباره ماهیت علم تبیین کرد. این مدل که در مقالات علمی به نام مدل EJASE شناخته می‌شود، توسط هولتون [۱۳]، کوهن [۱۹] و کراوزه [۱۷] تحلیل و بازنشر شده است. هسته اصلی توضیح او در طرح شکل ۲ خلاصه شده است.

در این مدل خط E نشان‌دهنده تجربیات است. اما نقطه شروع واقعی این فرآیند، طبق نظر اینشتین، اصول موضوعه هستند که می‌توان آن‌ها را به عنوان یک آفرینش ذهنی آزاد و در نتیجه ساخته دست بشر در نظر گرفت. پیکان منحنی به سمت اصول موضوعه، که «جهش» نامیده می‌شود، بدون شک بیشترین سوالات را در این مدل ایجاد می‌کند. اینشتین در این باره به طور دقیق توضیح می‌دهد (نامه اینشتین به سولوون، نقل شده از هولتون [۱۳])، ترجمه توسط نویسنده: از نظر روانشناختی، A بر E استوار است. هیچ مسیر منطقی از E به A وجود ندارد، بلکه فقط یک ارتباط شهودی (روانشناختی) وجود دارد که همواره در معرض نقض شدن است.

تعیین دقیق عوامل دخیل در خلق اصول موضوعه یک نظریه دشوار است. بی‌شک تجربیات حاصل از آزمایش عامل بسیار مهمی در خلق اصول موضوعه یک نظریه است، اما «ایده‌های جسورانه» دیگر، که شاید از اعتقادات متافیزیکی ریشه گرفته باشند نیز ممکن است در این امر دخیل باشند. از مجموعه اصول موضوعه و تعاریف، گزاره‌هایی قابل استخراج هستند (S در شکل ۲). روابط بین A و S فقط استنتاجی هستند و به خودی خود تحت تأثیر هیچ داده تجربی قرار نمی‌گیرند.

گزاره‌های استخراج شده باید در نظریه تجربی مبتنی بر تجربه، صحت خود را نشان دهند. اینشتین این نکته را با پیکان‌های از S به خط مستقیم E مشخص می‌کند. در فیزیک، این کار معمولاً از طریق آزمایش‌ها انجام می‌شود. اصول موضوعه A، گزاره‌های استنتاج شده S و ارتباط بین آنها، هسته ریاضیاتی نظریه را تشکیل می‌دهند. مفاهیم نظری به خودی خود هیچ ارجاع تجربی ندارند. در این مدل، یک افزودنی دیگر به استنتاج نهایی مبتنی بر استنتاج گالیله‌ای و استدلال‌های قیاسی-ربایشی وجود دارد. خلق اصول



شکل ۳: یک تکلیف هندسی برای پی بردن به نظام باورها

موضوعه، تعمیم استقرایی تجربیات حسی نیست. کمان از E به A بیشتر به عنوان ربایش شناخته می‌شود. این منطق توسط چارلز سندرز پیرس (۱۹۱۴-۱۸۳۹) در پایان قرن نوزدهم و آغاز قرن بیستم [۲۷] وارد حوزه نظریه دانش شد.

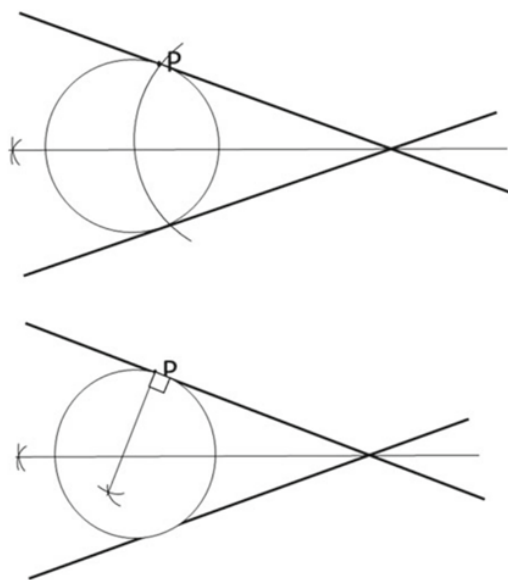
نقطه شروع ربایش معمولاً یک واقعیت غیرمنتظره، یک پرسش یا یک ناسازگاری حل نشده است و قاعده‌ای را پیشنهاد می‌کند که به پرسش پاسخ می‌دهد یا تردید را برطرف می‌کند. این قاعده از پیش فرضها استنتاج نمی‌شود، بلکه به شکل موقت وضع می‌شود. از این اصول موضوعه، گزاره‌هایی در یک استدلال منطقی دیگر استخراج می‌شوند. داده‌های تجربی حاصل از آزمایش، برای سنجش این قضایا به کار می‌روند. بنابراین، ربایش، استنتاج و، به نوعی، استقرا نیز در این فرآیند تولید دانش نقش دارند. بدیهی است که این روند به صورت خطی و مرحله‌ای نخواهد بود. شکل‌گیری نظریه با تکرار این مراحل بهبود می‌یابد.

مدل EJASE اینشتین، که به عنوان الگویی برجسته برای تبیین ماهیت علم مطرح است، با دیدگاه تجربی حاکم بر ریاضیات که شونفیلد [۳۲] به آن پرداخته، همخوانی‌هایی دارد.

برای نشان دادن شباهت‌های بین ریاضیات مدرسه‌ای و فیزیک، می‌خواهیم نگاهی دقیق‌تر به مسئله‌ای بیندازیم که شونفیلد [۳۲] برای تحقیقات خود از آن استفاده کرد: دو خط راست متقاطع و نقطه‌ای به نام P روی یکی از این دو خط داده شده‌اند. نشان دهید چگونه می‌توان فقط با استفاده از پرگار و خطکش، دایره‌ای را رسم کرد که دو خط راست متقاطع بر آن مماس باشند و نقطه P، نقطه تماس با یکی از خطوط باشد (شکل ۳). رونوشت‌هایی که شونفیلد [۳۲] تهیه کرد، الگویی از رفتار دانشجویان را نشان می‌دهد که مانند «تجربه‌گرایان محض» عمل می‌کنند و ایده‌ها و فرضیات خود را منحصراً با رسم شکل تولید و تأیید می‌کنند. در مقابل، یک ریاضی‌دان از اصطلاحات و تعاریف استفاده می‌کند. بررسی فرضیه‌های هندسی توسط دانشجویان فقط بر اساس رسم شکل انجام می‌شود. وقتی که ریاضی‌دان از رسم استفاده نمی‌کند، میزان دقت افزایش می‌یابد. شکل ۴ نشان می‌دهد که استدلال منطقی برای دانشجویان به اندازه یک رسم ظاهراً صحیح اهمیت ندارد، زیرا آن‌ها می‌توانند دو راه حل متفاوت (از نظر منطقی ناسازگار) را بپذیرند، اگر هر دو مناسب به نظر برسند.

۴. جمع‌بندی و پیشنهادات پژوهشی

ریاضیات و فیزیک اشتراکات محتوایی گسترده‌ای دارند. علاوه بر این، شباهت‌های معرفت‌شناختی بین این دو رشته اجازه می‌دهد که آن‌ها را با یکدیگر مقایسه کنیم. به‌ویژه، ریاضیات مدرسه‌ای، که از منظر محدودیت‌های هستی‌شناختی در ارتباط با واقعیت، با ریاضیات نوین تفاوت دارد، وجوه مقایسه‌پذیری را با فیزیک نمایان می‌کند. بر این اساس، ریاضیات مدرسه‌ای را می‌توان به عنوان یک علم شبه طبیعی قلمداد کرد. این مقایسه شامل ظرفیت‌های پژوهشی جدیدی برای هر دو رشته است: پژوهش‌های بنیادی باید هم‌افزایی‌های دقیق بین این دو حوزه را بررسی کرده و پیامدهای آن‌ها برای آموزش را مشخص کنند. این پژوهش‌ها باید با تحقیقات



شکل ۴: دانش‌آموزان هر دو راه حل را می‌پذیرند، با وجود اینکه از لحاظ منطقی متناقض هستند، چون تصویر درست به نظر می‌رسد [۳۱، p. ۱۷۰].

تجربی همراه شود، به طور مثال، پژوهش‌هایی که باورهای ریاضیاتی و درک دانشجویان از ماهیت علم را در چارچوب نظری موجود، شناسایی می‌کنند. علاوه بر این، لازم است مداخلاتی طراحی و مورد ارزیابی قرار گیرند. به عنوان مثال، می‌توان یک دوره بین‌رشته‌ای در تربیت معلم طراحی کرد که در آن، دبیران ریاضی و فیزیک، وجوه اشتراک و تفاوت‌های این دو رشته را در سطح محتوایی و در فرا-سطح معرفت‌شناختی مورد بحث و بررسی قرار دهند.

مراجع

1. A. Baumann, *Eine kritische Betrachtung zum Thema "Modellierungsaufgaben" anhand von Beispielen aus dem hessischen Zentralabitur 2009*, Mathematikinformation 55 (2011), 15–23.
2. A. Büchter and H. W. Henn, *Schulmathematik und Realität – Verstehen durch Anwenden*. In: Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B., Weigand, H.-G. (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik*, Springer, Heidelberg (2015), 19–50.
3. H. Caviola, *Wie Fächer miteinander ins Gespräch kommen: Modelle der Fächervernetzung und ihre Lernziele*. In: Caviola, H., et al. (Hrsg.), *TriOS: Nr. 2/2012. Interdisziplinarität*, LIT-Verlag, Münster (2012), 5–36.
4. P. J. Davis, R. Hersh, E. A. Marchisotto, *The Mathematical Experience*, Study Edition, Boston (1995).
5. R. Defila, and A. Guilio *"Interdisziplinarität" in der wissenschaftlichen Diskussion und Konsequenzen für die Lehrerbildung*. In: Wellensiek, A. (Hrsg.), *Beltz Wissenschaft: Bd. 38*.

- Interdisziplinäres Lehren und Lernen in der Lehrerbildung, Perspektiven für innovative Ausbildungskonzepte, Beltz, Weinheim, Basel (2002).
6. A. Einstein, *Aus meinen späten Jahren*, Deutsche Verlagsanstalt, Stuttgart (1952).
 7. L. D. English, *Advancing elementary and middle school STEM education*, Int. J. Sci. Math. Educ. 15 (2017), 5–24.
 8. H. Freudenthal, *Die Grundlagen der Geometrie um die Wende des 19. Jh.*, Vortrag auf der DMV-Tagung in Utrecht (1972).
 9. I. Galili, *Physics and mathematics as interwoven disciplines in science education*, Sci. Educ. 27 (2018), 7–37.
 10. D. Granzer, *Interdisziplinäres Lehren und Lernen – Leitgedanken für einen neuen Lernbereich*. In: Wellensiek, A. (Hrsg.), Beltz Wissenschaft: Bd. 38. Interdisziplinäres Lehren und Lernen in der Lehrerbildung, Beltz, Weinheim, Basel (2002), 72.
 11. C. G. Hempel, *Am. Math. Mon. 52 (1945)*. Reprinted in: Feigl, H., Sellars, W. (Hrsg.), *Readings in Philosophical Analysis*, Appleton-Century-Crofts, New York (1949). Reprinted in: Newman, J. R. (Hrsg.), *The World of Mathematics*, vol. III, Simon and Schuster, New York (1956).
 12. D. Hilbert, *Grundlagen der Mathematik*, Leipzig (1900).
 13. G. J. Holton, *Thematische Analyse der Wissenschaft: Die Physik Einsteins und seiner Zeit* (1. Aufl.), Suhrkamp-Taschenbuch Wissenschaft 293, Frankfurt am Main (1981).
 14. T. Jahnke, *Zur Authentizität von Mathematikaufgaben*. Universitätsbibliothek Dortmund, (2013).
 15. R. T. Kelly, J. G. Knowles, *A conceptual framework for integrated STEM education*, Int. J. STEM Educ. 3, (2016) 11.
 16. J. Kepler, *Harmonice mundi* (1619). Reprinted in: Caspar, M. (Hrsg.), *Gesammelte Werke*, Band 1, Mysterium Cosmographicum, 405 (1995).
 17. E. Krause, *Das EJASE-Modell: Einstein als Ausgangspunkt physikdidaktischer Forschungsfragen – Anregungen aus einem Modell zur Natur der Naturwissenschaft*, Physik und Didaktik in Schule und Hochschule (PhyDidA) 1/16 (2017), 57.
 18. O. Krey, *Zur Rolle der Mathematik in der Physik: Wissenschaftstheoretische Aspekte und Vorstellungen Physiklerner*, Dissertation, Universität Potsdam (2012), 163–208.
 19. W. Kuhn, *Das Wechselspiel von Theorie und Experiment im physikalischen Erkenntnisprozess*. In: Praxis der Naturwissenschaften – Physik 12 (1983), 355–362.
 20. P. Labudde, *Fächerübergreifender naturwissenschaftlicher Unterricht – Mythen, Definitionen, Fakten*, Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften 20(1) (2014), 11.
 21. P. Labudde, *Naturwissenschaften vernetzen – Horizonte erweitern: Fächerübergreifender Unterricht konkret* (1. Aufl.), Klett/Kallmeyer, Seelze-Velber (2008).

22. M. LaForce, E. Noble, H. King, J. Century, C. Blackwell, S. Holt, A. Ibrahim, S. Loo, *The eight essential elements of inclusive STEM high schools*, Int. J. STEM Educ. 3, (2016) 21.
23. C. Michelsen, *Expanding context and domain: a cross-curricular activity in mathematics and physics*, ZDM 30 (1998), 100–106.
24. I. Militschenko, and S. Kraus *Entwicklungslinien der Mathematisierung der Physik – die Rolle der Deduktion in der experimentellen Methode*, Der Mathematikunterricht 63(5), Friedrich Verlag, Seelze (2017), 21–29.
25. F. Möbius, *Der barycentrische Calcul*, Barth, Leipzig (1827).
26. K. Moegling, *Kompetenzaufbau im fächerübergreifenden Unterricht: Förderung vernetzten Denkens und komplexen Handelns*, vol. 2, Prolog-Verlag, Immenhausen bei Kassel (2010).
27. C. S. Peirce, *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, Harvard University Press, Cambridge (1985).
28. G. Pospiech and R. Karam *Mathematik im Physikunterricht*. In: Naturwissenschaften im Unterricht – Physik 153, no. 154 (2016), 27.
29. C. Schier and E. Schwinger *Pädagogik, Interdisziplinarität und Transdisziplinarität als Herausforderung akademischer Bildung: Innovative Konzepte für die Lehre an Hochschulen und Universitäten*, De Gruyter, Bielefeld, Berlin (2014).
30. K. Schimony, *Kulturgeschichte der Physik*, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt (1990).
31. S. Schlicht, *Zur Entwicklung des Mengen- und Zahlenbegriffs*, Springer, Heidelberg (2016).
32. A. H. Schoenfeld, *Mathematical problem solving*, Academic Press, Orlando (1985).
33. A. H. Schoenfeld, *How We Think: A Theory of Goal-Oriented Decision Making and Its Educational Applications*, Routledge, New York (2011).
34. H. Struve, *Grundlagen einer Geometriedidaktik*, BI, Mannheim (1990).
35. I. Witzke, *Die Entwicklung des Leibnizschen Calculus: Eine Fallstudie zur Theorieentwicklung in der Mathematik*, Franzbecker, Hildesheim (2009).
36. I. Witzke, *Zur Problematik der empirisch gegenständlichen Analysis des Mathematikunterrichtes*, Der Mathematikunterricht 60, no. 2 (2014): 19–32.
37. I. Witzke and Spies, S. *Domain-specific beliefs of school calculus*, J. Math. Didaktik 37(1) (2016), 131–161.
38. H. Winter, *Mathematikunterricht und Allgemeinbildung*. Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 4, no. 2 (1996): 35–41.



THE DYNAMICS OF RESISTANCE TO LEARNING: A RE-READING OF EPISTEMOLOGICAL OBSTACLES IN ADVANCED MATHEMATICS ENGLISH

MOHAMAD SABZI ^{1*}, MEHRDAD NANDARI ², AND MOHAMMAD ALI SIAVOSHI ³

¹Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Shahid Chamran University of Ahvaz
Ahvaz, Iran

sabzi.mohamad@gmail.com

²Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Shahid Chamran University of Ahvaz
namdari@scu.ac.ir

³Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Shahid Chamran University of Ahvaz
m.siavosshi@scu.ac.ir

Abstract. This paper addresses the question of why learning failures in mathematics occur even when learners possess the relevant knowledge and strategies. Drawing on Bachelard's notion of the epistemological obstacle, we argue that many persistent learning failures cannot be reduced to superficial misunderstandings; rather, they stem from deep-seated, prior cognitive structures that resist new knowledge. We show that Schoenfeld's theory of problem solving, particularly the components of beliefs and control, can be understood as a metacognitive reformulation of the same Bachelardian logic. We also demonstrate that concepts such as diSessa's p-prims, Fischbein's coercive intuitions, and Tall and Vinner's concept image are all distinct forms of Bachelardian obstacles. The theoretical framework of the paper is based on the Mathematical Knowledge Architecture (MKA), which introduces five mechanisms, translation, compression, reconfiguration, coordination, and epistemic shift, as the core processes underpinning the construction and evolution of knowledge. Using this framework, an analysis of three instructional vignettes on infinite cardinality, the harmonic series, and the quotient group reveals how a single epistemological obstacle can systematically disrupt multiple MKA mechanisms.

2020 Mathematics Subject Classification. 47A55, 39B52, 34K20, 39B82

Keywords. Epistemological obstacle, Mathematical knowledge architecture, Failures of control, Conceptual development in Mathematics, Mathematics education

Date: Received 1-12-2025 Accepted 15-12-2025 Available Online 20-12-2025

©Ferdowsi University of Mashhad.



سازوکار مقاومت در برابر یادگیری؛ بازخوانی موانع معرفتی در ریاضیات پیشرفته

محمد سبزی*، مهرداد نامداری، و محمدعلی سیاوشی

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهیدچمران اهواز

sabzi.mohamad@gmail.com

namdari@scu.ac.ir

m.siaavoshi@scu.ac.ir

چکیده. این مقاله به این پرسش می‌پردازد که چرا شکست‌های یادگیری در ریاضیات، حتی با وجود برخورداری یادگیرنده از دانش و استراتژی، رخ می‌دهد. با تکیه بر مفهوم موانع معرفتی باشلار، استدلال می‌کنیم که بسیاری از شکست‌های پایدار یادگیری را نمی‌توان به سوتفاهم‌های سطحی تقلیل داد؛ بلکه این شکست‌ها ریشه در ساختارهای پیشینی و مقاوم ذهن دارند که در برابر دانش جدید می‌ایستند. نشان می‌دهیم که می‌توان نظریه حل مساله شونفلد، به‌ویژه دو مولفه باورها و کنترل را به‌مثابه بازصورت‌بندی فراشناختی همین منطق باشلاری تفسیر کرد. هم‌چنین نشان می‌دهیم که مفاهیمی چون خُرده‌شهودهای دی‌سسا، شهودهای قهری فیشبین، تصویر مفهومی تال و وینر همگی اشکال گوناگونی از مقاومت‌های باشلاری‌اند. چارچوب نظری مقاله بر معماری دانش ریاضی استوار است که پنج مکانیسم ترجمه، فشرده‌سازی، بازآرایی، هماهنگی و گذار معرفتی را به‌عنوان سازوکارهای ساخت و تحول دانش معرفی می‌کند. براساس این چارچوب، تحلیل سه وینیت آموزشی درباره کاردینالیته نامتناهی، سری هارمونیک و گروه خارج‌قسمتی نشان می‌دهد که چگونه یک موانع معرفتی واحد می‌تواند به‌طور سیستماتیک چندین مکانیسم معماری دانش را مختل کند. نتایج نشان می‌دهد که شکست‌های یادگیری، پدیده‌هایی چندلایه و معماری‌محورند و از طریق تحلیل هم‌زمان موانع معرفتی و مکانیسم‌های معماری دانش ریاضی قابل فهم‌اند.

2010 Mathematics Subject Classification. 47A55, 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. موانع معرفتی، معماری دانش ریاضی، شکست در کنترل، تحول مفهومی ریاضی، آموزش ریاضی.

تاریخ: دریافت ۱۴۰۴/۰۹/۱۰ پذیرش ۱۴۰۴/۰۹/۲۴ انتشار برخط ۱۴۰۴/۰۹/۲۹

نحوه ارجاع به این مقاله: م. سبزی، م. نامداری و م.ع. سیاوشی، سازوکار مقاومت در برابر یادگیری؛ بازخوانی موانع معرفتی در ریاضیات پیشرفته، به سوی علوم ریاضی، ۵ (۱۴۰۴)، شماره ۱، ۸۰-۶۸.

©دانشگاه فردوسی مشهد.

۱. مقدمه

هشتاد سال از انتشار کتاب کلاسیک جورج پولیا^۱، چگونه مساله حل کنیم [۱۴]، می‌گذرد؛ اثری که با معرفی چهار مرحله حل مساله و مجموعه‌ای از رهیافت‌ها^۲، چارچوبی هنجاری برای رفتار حل‌کننده ایده‌آل ارائه کرد. اما با وجود تاثیر گسترده آن، مدل پولیا در پاسخ به پرسش تشخیصی بنیادین ناتوان بود: چرا دانش‌آموزان، حتی زمانی که رهیافت‌ها را می‌دانند، در به‌کارگیری آن‌ها شکست می‌خورند؟ این شکاف نظری، تا چند دهه بی‌پاسخ ماند.

آلن شونفلد^۳ کوشید این خلا را پر کند. او با افزودن سه مولفه منابع^۴، کنترل^۵ و باورها^۶ [۱۵] و [۱۶]، مدل پولیا را از چارچوبی هنجاری به چارچوبی توصیفی-تحلیلی تبدیل کرد. نوآوری اصلی شونفلد، برجسته‌سازی نقش باورها و کنترل به‌عنوان عوامل تعیین‌کننده موفقیت/شکست حل‌کنندگان بود؛ عواملی که می‌تواند بیش از دانش محتوا یا رهیافت‌ها بر فرآیند حل مساله اثرگذار باشد. در این مقاله استدلال می‌شود که مفهوم باورها را در نظریه شونفلد می‌توان در پرتو مفهوم کلاسیک موانع معرفتی^۷ گاستون باشلار^۸ بازخوانی کرد. به‌نظر باشلار، یادگیری علمی نه از فقدان دانش، بلکه از مقاومت دانش قبلی در برابر دانش جدید نشأت می‌گیرد. این مقاومت می‌تواند منشأ تجربی، شهودی، زبانی یا مفهومی داشته باشد و ماهیتی ساختاری دارد، نه این‌که صرفاً یک اشتباه سطحی باشد [۳]. اگر چنین دیدگاهی پذیرفته شود، باورهای شونفلدی را می‌توان بازتابی فراشناختی از همین موانع دانست: ساختارهایی پایدار که منابع شناختی را محدود و فرایند کنترل را مختل می‌کنند.

ادبیات معاصر (آموزش ریاضی) نیز این خط فکری را، به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم، پیش برده‌است. مفهوم شهودهای قهری^۹ در فیشبین^{۱۰} [۱۰]، نظریه بار بودن ادراک^{۱۱} در هانسون^{۱۲} [۱۱]، خُرده‌شهودها^{۱۳} در دی‌سسا^{۱۴} [۷] و تصویر مفهومی^{۱۵} در مقابل تعریف مفهومی^{۱۶} در تال^{۱۷} و وینر^{۱۸} [۱۹] همگی نشان می‌دهند که مقاومت‌های ذهنی ریشه‌دار چگونه فهم ریاضی را محدود می‌سازد. افزون بر این، در برخی رویکردها، همچون کارهای سیرپینسکا در مورد درک مفهوم حد، یا تحلیل‌های بروسو در نظریه موقعیت‌های

¹George Polya²Heuristics³Alan H. Schoenfeld⁴Resources⁵Control⁶Beliefs⁷Epistemological Obstacles⁸Gaston Bachelard⁹Coercive Intuitions¹⁰Efraim Fischbein¹¹Theory-laden¹²Norwood Russell Hanson¹³p-prims (Phenomenological Primitives)¹⁴Andrea A. diSessa¹⁵Concept Image¹⁶Concept Definition¹⁷David Tall¹⁸Shlomo Vinner

دی‌داتیک، اصطلاح جدیدی برای این مقاومت‌ها وضع نشده است؛ اما همان منطق باشلاری به‌صورت ضمنی توسعه یافته و در قالب تضادهای شناختی و موانع مفهومی بنیادی بازتولید شده است.

این مقاله با عبور از دوگانگی فلسفه علم و روان‌شناسی یادگیری، یک سنتز نظری ارائه می‌دهد که در آن، باورهای شونفلدی به‌عنوان تجلی فراشناختی همان موانع معرفتی باشلاری تبیین می‌شود. در ادامه، با تکیه بر چارچوب معماری دانش ریاضی (MKA) [۱]، سه موقعیت کلاسی بازسازی‌شده تحلیل می‌شود تا سازوکار این مقاومت‌های معرفتی در عمل نشان داده‌شود. هدف، ارائه تصویری روشن از این است که چرا شکست‌های یادگیری در ریاضیات، اغلب ناشی از یک بدفهمی ایزوله نیست، بلکه پیامد یک معماری شناختی ناپایدار است.

۱.۱. روش‌شناسی. روش‌شناسی داده‌های اصلی این مقاله شامل سه وینیت آموزشی بازسازی‌شده^{۱۹} است که با محوریت موانع معرفتی کلاسیک در ریاضیات پیشرفته (کاردینالیتی نامتناهی، سری هارمونیک و گروه خارج‌قسمتی) طراحی شده‌اند. این وینیت‌ها داده‌های خام تجربی نیستند، بلکه ماهیتی شبیه به آزمایش‌های فکری^{۲۰} دارند که با جزئیات واقعی غنی شده‌اند. محتوای این روایت‌ها، حاصل تلفیق مشاهدات کلاسی و تحلیل روایت‌های آموزشی همکاران است. هدف از به‌کارگیری این روش، نه دستیابی به تعمیم‌پذیری آماری، بلکه تبیین نظری و آشکارسازی سازوکارهای شکست شناختی در مواجهه با یک مانع معرفتی باشلاری است. این رویکرد که بر مبنای ایزوله‌کردن و توجه‌کردن^{۲۱} به لحظات بحرانی استوار است [۱۳]، این امکان را فراهم می‌سازد تا مکانیسم‌های شناختی فعال‌شده/ شکست‌خورده در این لحظات را، با وضوح تحلیلی بالا بررسی کنیم. این روش‌شناسی از منطق تعمیم تحلیلی [۲۰] پیروی می‌کند و اعتبار آن در انسجام تبیینی است، نه در نمایندگی آماری داده‌ها.

چارچوب تحلیلی بر پنج مکانیسم معماری دانش ریاضی (MKA) استوار است و تحلیل وینیت‌ها به‌گونه‌ای سازمان‌دهی شده‌است که نشان‌دهنده چگونه یک مانع معرفتی می‌تواند مکانیسم‌های MKA را مسدود کند. در بخش نظری، ایده‌های باشلار، شونفلد و دیگران از منظر MKA بازخوانی می‌شود، اما هدف مقاله مقایسه این نظریه‌ها نیست؛ بلکه یکپارچه‌سازی آن‌ها در قالب یک چارچوب تشخیصی واحد برای توضیح شکست شناختی است. این انتخاب روش‌شناسی ما را قادر می‌سازد که تمایز میان سوتفاهم‌های سطحی و موانع معرفتی ساختاری را نشان دهیم و دلالت‌های آموزشی آن را استخراج کنیم.

۲. پیشینه نظری

۱.۲. موانع معرفتی و بازتاب آن در پژوهش‌های آموزش ریاضی. مفهوم مانع معرفتی نخستین بار توسط گاستون باشلار در فلسفه علم معرفی شد. از نظر باشلار، یادگیری علم یک حرکت پیوسته و انباشتی نیست؛ بلکه فرایندی گسسته است که در آن یادگیرنده باید از دانش پیشین خود عبور کند. این دانش پیشین، برخاسته از تجربه خام، شهودهای طبیعی و تفسیرهای بدیهی جهان، نه‌تنها ناپدید نمی‌شود، بلکه در برابر تغییر مقاوم است و می‌تواند مسیر یادگیری مفاهیم علمی را مسدود کند [۳]. باشلار نشان داد که مانع معرفتی نوعی اقناع کاذب ایجاد می‌کند: ساختاری که از نظر یادگیرنده معتبر به‌نظر می‌رسد، اما درحقیقت با معماری مفاهیم علمی ناسازگار است. از این رو، یادگیری نیازمند نوعی گسست معرفتی^{۲۲} است؛ گسستی که تنها از طریق مواجهه آگاهانه با تضادهای شناختی و بازسازی مفهومی رخ می‌دهد. این دیدگاه درباره مشکل‌زایی دانش پیشین باشلار، نقطه آغاز بسیاری از تبیین‌های معاصر درباره دشواری‌های یادگیری ریاضیات است. در ادامه نشان می‌دهیم که چگونه نظریه‌های کلیدی آموزش ریاضی، باوجود تفاوت‌های ماهیتی و ریشه‌ای، در لحظه یادگیری، همگی نقشی مشابه مقاومت در برابر دانش جدید ایفا می‌کنند.

¹⁹Reconstructed Vignettes

²⁰Thought Experiments

²¹Noticing

²²Epistemological Rupture

نخستین بازتاب این دیدگاه را می‌توان در سطح فراشناختی و در کارهای شونفلد مشاهده کرد. شونفلد یادگیری ریاضی را حاصل تعامل میان دانش، کنترل و باورها می‌داند. او نشان می‌دهد که حتی وقتی دانش‌آموزان دانش یا استراتژی لازم را برای حل مساله دارند، باورهای ریشه‌دار آنان درباره ماهیت ریاضی می‌تواند آنان را از به‌کارگیری آن دانش بازدارد [۱۵، ۱۶]. برای نمونه، باورهایی نظیر «ریاضی یعنی سرعت و اجرای الگوریتم»، «اگر جواب سریع پیدا نشد، مساله فراتر از توان ماست» یا «تفکر خلاق اتلاف وقت است»، ساختار کنترلی حل مساله را از کار می‌اندازد و یادگیرنده را به رفتارهای ناکارآمد سوق می‌دهد [۱۲]؛ ساختارهای ذهنی به‌ظاهر قابل اعتماد، درعمل یادگیری را مختل می‌کنند. در این معنا، باورهای شونفلدی را می‌توان صورت فراشناختی موانع معرفتی دانست.

درحالی‌که شونفلد بر باورهای کلان تمرکز دارد، دی‌سسا این منطق را در سطحی خردتر و ساختاری‌تر دنبال می‌کند. در نظریه دانش تکه‌تکه^{۲۳} او، دانش یادگیرنده شبکه‌ای از قطعه‌های کوچک شهودی به نام خُرده‌شهودها است. این عناصر شهودی اولیه، از نظر یادگیرنده کاملاً طبیعی و قابل اطمینان‌اند، اما در مسائل جدید اغلب نادرست عمل می‌کنند و دربرابر تغییر مقاوم‌اند [۷]. می‌توان این خرده‌شهودها را موانع معرفتی خرد دانست: عناصر شهودی‌ای که به‌ظاهر بدیهی‌اند اما مانع شکل‌گیری مدل‌های رسمی ریاضی می‌شوند. ویژگی‌هایی چون پایداری، مقاومت دربرابر آموزش و قدرت اقناع درونی، همان ویژگی‌های مانع معرفتی نزد باشلار هستند. هم‌سو با همین نگاه به نقش بازدارنده شهود، فیشبین بر جنبه روان‌شناختی و قدرت اجبارکننده آن تاکید می‌کند. فیشبین نشان می‌دهد که برخی شهودها اقتدار و قدرت اقناع بی‌واسطه دارند؛ یعنی به‌مثابه یک واقعیت بدیهی تجربه می‌شوند و مسیر استدلال ریاضی را کنترل می‌کنند. این شهودهای قهری نه‌تنها خطاهای مفهومی ایجاد می‌کنند، بلکه آموزش رسمی نیز به‌آسانی آن‌ها را اصلاح نمی‌کند [۵، ۱۰]. این ایده به‌طور مستقیم با منطق باشلار هم‌خوان است: شهود طبیعی، اگرچه از نظر یادگیرنده کاملاً پذیرفتنی است، اما می‌تواند یک ساختار معرفتی نادرست و مقاوم ایجاد کند که باعث توقف یادگیری شود.

تجلی دیگر این تقابل میان ساختار ذهنی و دانش رسمی را می‌توان در نظریه تال و وینر یافت. آن‌ها با معرفی مفهوم تصویر مفهومی درمقابل تعریف مفهومی، می‌گویند که یادگیرنده برای هر مفهوم ریاضی یک تصویر ذهنی دارد که ممکن است ناقص، نادرست، یا بیش‌ازحد محدود باشد [۱۹]. هنگامی‌که تصویر مفهومی (که ریشه در تجربیات قبلی دارد) با تعریف رسمی در تعارض قرار می‌گیرد، یادگیری دچار تنش و تضاد شناختی می‌شود. برای مثال، تال و وینر می‌گویند بسیاری از دانشجویان هنگام مواجهه با $0.999... = 1$ شهود آن‌ها بی‌نهایت را یک فرایند ناتمام می‌بیند، نه یک مقدار کامل؛ بنابراین نمی‌توانند بپذیرند که فرایندی بی‌نهایت مرحله‌ای می‌تواند مقدار نهایی داشته‌باشد. این ساختار بازنمایی‌شده شهودی، نوعی مانع از جنس شهود طبیعی است.

درنهایت، باید اشاره کرد که نفوذ منطق باشلاری محدود به نظریاتی نیست که اصطلاحات جدید وضع کرده‌اند. در برخی رویکردهای آموزش ریاضی، مانند تحلیل سیرپینسکا [۱۸] از درک ریاضی یا نظریه موقعیت‌های آموزشی بروسو [۴]، نام جدیدی برای مانع معرفتی ارائه نشده و همان منطق بنیادین حفظ شده‌است. در این نظریه‌ها نیز دانش پیشین به‌ظاهر طبیعی، ساختار مساله را برای یادگیرنده تحریف می‌کند و تنها ازطریق بازسازی مفهومی و مواجهه با تضادهای شناختی است که یادگیری عمیق رخ می‌دهد. این آثار نشان می‌دهند که نفوذ باشلار در آموزش ریاضی گسترده‌تر از آن است که صرفاً ازطریق ارجاعات مستقیم قابل‌ردیابی باشد.

۲.۲. معماری دانش ریاضی (MKA): مکانیسم‌های ساخت، اصلاح و عبور از موانع. نظریه معماری دانش ریاضی (MKA) چارچوبی ساختاری است که چگونگی ساخت، سازمان‌دهی و تحول دانش ریاضی را ازطریق پنج مکانیسم شناختی بنیادی توضیح می‌دهد: ترجمه، فشرده‌سازی، بازآرایی، هماهنگی و گذار معرفتی. این مکانیسم‌ها مجموعه‌ای از کنش‌های مهندسی شناختی هستند که یادگیرنده برای ساخت مفاهیم جدید، یکپارچه‌سازی معماری‌های موجود و مواجهه با چالش‌های مفهومی به‌کار می‌گیرد [۱].

²³Knowledge-in-Pieces

در پیشینه نظری این مقاله، معماری دانش ریاضی (MKA) دو نقش کلیدی و محوری ایفا می‌کند:

- نشان می‌دهد که عبور از مانع معرفتی یک فرایند چندمرحله‌ای و تدریجی است (و نه صرفاً یک تغییر ناگهانی و آنی)؛
- امکان تحلیل شکست‌های یادگیری را فراهم می‌کند؛ از طریق تشخیص این‌که کدام مکانیسم مشخص (مانند ترجمه یا گذار معرفتی) مختل شده‌است.

لازم است تأکید کنیم که در این پژوهش، MKA صرفاً به‌عنوان یک تبیین بهینه موجود برای شکست‌های سیستمی مشاهده‌شده در وینیت‌ها پیشنهاد می‌شود؛ نه این‌که وینیت‌ها اثبات‌کننده صحت MKA باشد. درواقع، تلاش ما نشان دادن این است که MKA یک لنز تحلیلی قدرت‌مند برای مشاهده و درک زوایای پنهان این شکست‌ها فراهم می‌سازد.

اگر نظریه‌هایی چون شونفلد، دی‌سسا یا فیشبین مانع یادگیری را توصیف می‌کنند، MKA می‌گوید که یادگیرنده برای عبور از این مانع به چه حرکاتی نیاز دارد. این پیوند میان منطق باشلاری و مکانیسم‌های معماری دانش، زیربنای تحلیل موردی در بخش‌های بعدی مقاله است.

در ادامه هریک از این پنج مکانیسم را معرفی می‌کنیم:

ترجمه. ^{۲۴} ترجمه جابه‌جایی نظام‌مند یک سازه مفهومی از یک نظام بازنمایی به نظامی دیگر است. شرط اساسی ترجمه معتبر، حفظ ساختار معنایی عمیق آن سازه است، حتی اگر ابزارهای نمایش کاملاً تغییر کنند. حوزه اثر این مکانیسم معمولاً میان دو معماری یا دو نظام بازنمایی متفاوت است (مثلاً هندسه و جبر) و کارکرد اصلی آن، دسترس‌پذیر ساختن ابزارهای یک حوزه برای حل مسائل حوزه‌ای دیگر است. همانند ابداع دستگاه مختصات توسط دکارت که پلی بین معماری‌های عظیم هندسه اقلیدسی و جبر نمادین است.

فشرده‌سازی. ^{۲۵} فشرده‌سازی فرآیندی شناختی است که در آن یک فعالیت پیچیده، چندمرحله‌ای و زمان‌بر به یک سازه یا مفهوم واحد، ایستا و قابل‌دستکاری بدل می‌شود. این مکانیسم، ابزار ساز اصلی در معماری دانش است. این مکانیسم به‌صورت فرکتالی در مقیاس‌های مختلف عمل می‌کند. در سطح خرد، این همان فرآیندی است که طی آن، رویه $a \times a \times \dots \times a$ به سازه مفهومی a^n فشرده می‌شود. در مقیاس کلان تاریخی، فرآیند طولانی و چند دهه‌ای کار بر روی رویه‌های محاسباتی پراکنده در حوزه جایگشت‌ها، در نهایت در سازه انتزاعی گروه فشرده شد.

بازآرایی. ^{۲۶} بازآرایی زمانی رخ می‌دهد که ورود یک ایده، ابزار یا مثال نقض جدید، روابط میان اجزای دانش موجود را بازچینش می‌کند و شبکه‌ای تازه و کارآمدتر می‌سازد. این مکانیسم نقش مهندس نوسازی و مقاوم‌سازی را دارد. حوزه اثر آن درون یک معماری است و کارکردش حل تناقضات، رفع بدفهمی‌ها و افزایش انسجام شبکه مفهومی. مانند بازآرایی ریمان در سری‌های نامتناهی، که منجر به حل بحران مفهومی از طریق خلق یک معماری پیچیده‌تر با دسته‌بندی‌های جدید (همگرایی مشروط/ غیرمشروط) شد.

هماهنگی. ^{۲۷} هماهنگی فرآیند خلافت‌آه‌ای است که دو یا چند معماری یا ساختار مفهومی مجزا را در یک نظام نو و یکپارچه ادغام می‌کند. این مکانیسم نقش شهرساز کلان را دارد. برخلاف ترجمه که تنها پلی بین دو حوزه می‌سازد، هماهنگی با تغییر قوانین و ایجاد زیرساخت‌های تازه، معماری‌ای نو خلق می‌کند. هماهنگی فرآیندی است که در آن دو معماری درهم ادغام می‌شوند و یک معماری

²⁴Translation

²⁵Compression

²⁶Reconfiguration

²⁷Coordination

کاملا جدید با قوانین و موجودیت‌های خاص خود پدید می‌آید. مانند خلق هندسه تحلیلی به واسطه محاسبه‌پذیر کردن استدلال‌های هندسی از طریق معرفی دستگاه مختصات.

گذار معرفتی.^{۲۸} گذار معرفتی به معنای تغییر در معیارهای بنیادین صدق و اعتبار در دانش ریاضی است؛ زمانی که جامعه ریاضی یا یک یادگیرنده، چارچوبی نو برای تشخیص ریاضیات معتبر اتخاذ می‌کند. این مکانیسم نقش انقلاب و بازنویسی قانون اساسی را دارد. حوزه اثر آن بر اصول بنیادین یک معماری است و برخلاف تغییرات تکاملی، یک دگرگونی ریشه‌ای در نحوه شناخت، استدلال و اعتباربخشی است. مانند رویارویی با هندسه هذلولوی و به چالش کشیدن بدهت اقلیدسی و گذار از هندسه اقلیدسی به نااقلیدسی و تغییر بنیادین در معیار حقیقت؛ تغییر از انطباق با شهود به سازگاری منطقی درونی یک سیستم.

۳. تحلیل موانع معرفتی بنیادین: کالبدشکافی با MKA

اکنون که چارچوب نظری موانع معرفتی و ابزار تحلیلی (MKA) را ایجاد کردیم، از این چارچوب برای کالبدشکافی سه موقعیت کلاسیک استفاده می‌کنیم. سه وینیت کاردینالیتی نامتناهی، سری هارمونیک و گروه خارج قسمتی به این دلیل انتخاب شده‌اند که نمونه بارز موانع معرفتی باشلاری هستند؛ شهودهای ریشه‌دار (دانش پیشین) مستقیماً با تعریف صوری ریاضی (دانش جدید) در تضاد قرار می‌گیرد.

همان‌طور که در تحلیل شونفلدی اشاره شد، این مانع به صورت باور و شکست در کنترل ظاهر می‌شود. در ادامه، ما نشان می‌دهیم که این شکست فراشناختی، در سطح شناختی، یک شکست زنجیروار است که در آن، مانع معرفتی واحد، مکانیسم‌های MKA را به‌طور سیستماتیک مختل می‌کند.

وینیت ۱ (کاردینالیتی نامتناهی). در کلاس مبانی ریاضی، استاد گزاره‌ای بنیادین از نظریه کانتور را بیان می‌کند:

«تعداد اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) با تعداد اعداد زوج ($\mathbb{E}$) برابر است.»

سپهر، بلافاصله واکنش نشان می‌دهد: «استاد چطور ممکن است؟ مگر می‌شود یک زیرمجموعه، هم‌تعداد با کل مجموعه باشد؟ $\mathbb{N}$ که هم اعداد زوج را دارد و هم فرد! پس قطعاً بزرگ‌تر است.»

استاد تعریف رسمی هم‌اندازه بودن را ارائه می‌دهد: «دو مجموعه هم‌اندازه‌اند اگر و تنها اگر یک تناظر یک‌به‌یک بین آن‌ها وجود داشته باشد.» سپس تابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{E}$ را که با $f(n) = 2n$ تعریف شده‌است، روی تخته می‌نویسد و نشان می‌دهد که این تابع، یک‌به‌یک و پوشاست.

سپهر فرمول را می‌فهمد، منطق جبری تابع را می‌پذیرد، اما همچنان قانع نشده است و می‌گوید: «ولی هنوز فکر می‌کنم غلط است! ما در $\mathbb{N}$ به‌تعداد دو برابر $\mathbb{E}$ عدد داریم.»

واکنش سپهر یک شکست ساده در یادگیری نیست؛ بلکه یک مقاومت فعال است. این، نمونه بارز یک مانع معرفتی به معنای باشلاری آن است: دانش قبلی (شهود متناهی) که زمانی مفید بوده، اکنون به مانع اصلی معرفتی در پذیرش دانش جدید (کاردینالیتی نامتناهی) تبدیل شده‌است.

در این وینیت، شکست یادگیری صرفاً ناتوانی در پذیرش یک تعریف جدید نیست؛ بلکه واکنشی ساختاری است که از برخورد شهود متناهی با معماری صوری بی‌نهایت ناشی می‌شود. همان‌طور که خواهیم دید، این واکنش در مکانیسم‌های MKA قابل ردیابی است.

تحلیل وینیت. شکست اصلی سپهر، یک شکست در بازآرایی است. معماری دانش او بر یک اصل نانوخته اما قدرت‌مند بنا شده‌است: «جز، کوچک‌تر از کل است.» این اصل، در دنیای متناهی تجربیات روزمره، یک قانون مطلق است. گزاره استاد

²⁸Epistemic Shift

$(|\mathbb{N}| = |\mathbb{E}|)$ صرفاً یک داده ناسازگار^{۲۹} نیست [۶]؛ بلکه یک بحران مفهومی است که این اصل موضوعی را به‌طور مستقیم مورد هدف قرار می‌دهد.

سپهر به‌جای تخریب و بازسازی این ساختار قدیمی (یک بازآرایی پرهزینه)، ترجیح می‌دهد داده جدید (تابع $f(n) = 2n$) را به حاشیه براند [۶] و آن را به‌عنوان یک حيله منطقی رد کند، نه یک حقیقت. این مقاومت در برابر بازسازی، همان ایستایی ذهنی باشلاری است [۳]. تال و وینر این مانع بازآرایی را تضاد تصویر مفهومی ریشه‌دار با تعریف مفهومی می‌نامند [۱۹].

شکست در بازآرایی، مستقیماً توسط یک مانع عمیق‌تر پشتیبانی می‌شود: شکست در گذار معرفتی. سپهر در یک معیار حقیقت قدیمی گیر کرده‌است. مانع معرفتی در این‌جا، اتکای شهودی است. معیار حقیقت برای سپهر، سازگاری با شهود تجربی و فیزیکی است. اما استاد در حال ارائه یک معیار حقیقت جدید است: سازگاری منطقی درونی با تعریف رسمی. این ایستایی معرفتی^{۳۰}، یعنی گیرکردن در یک معیار حقیقت قدیمی‌تر و نپذیرفتن معیارهای جدید، در ادبیات شونفلد به‌صورت یک باور محدودکننده ظاهر می‌شود؛ باوری که می‌گوید ریاضیات نباید با شهود فیزیکی در تضاد باشد، و همین باور سیستم کنترل سپهر را از پایش^{۳۱} منطقی باز می‌دارد. همان باور که «ریاضیات باید با عقل سلیم سازگار باشد»، و این باور، مانع از پذیرش قانون اساسی جدید در دنیای نامتناهی می‌شود. این همان شهود قهری فیشبین است؛ شهود «جز کوچک‌تر از کل است» آن قدر قدرت‌مند و بدیهی جلوه می‌کند که درمقابل اثبات منطقی (تابع) مقاومت می‌کند. در این‌جا می‌بینیم که گذار از معنا به تعریف چقدر می‌تواند دشوار باشد. این گذار مستلزم پذیرش آن است که ریاضیات می‌تواند برخلاف شهود طبیعی حرکت کند. مانع گذار معرفتی قدرت شهود قهری در برابر منطق صوری است.

این دو شکست بنیادین (در بازآرایی و گذار معرفتی)، منجر به شکست در ترجمه نیز می‌شود. سپهر باید کلمه تعداد را از زبان روزمره (مبتنی بر شمارش متناهی) به زبان منطق آنالیز (مبتنی بر تناظر یک‌به‌یک) ترجمه کند.

چیزی که در این‌جا باعث ایجاد مانع می‌شود این است که سپهر کلمه تعداد را با فرآیند شمارش یکسان می‌داند. او نمی‌تواند این نماد (کلمه تعداد) را از آن فرآیند رها و معنای جدید (تناظر) را به آن متصل کند. او تابع را می‌بیند، اما این ترجمه را باور نمی‌کند؛ او فکر می‌کند این تابع، چیزی غیر از تعداد را نشان می‌دهد. در این‌جا سپهر باید مفهوم اندازه متناهی را به مفهوم کاردینالیته نامتناهی ترجمه کند.

حتی زمانی که سپهر تلاش می‌کند تابع را بررسی کند، شکست دیگری رخ می‌دهد: شکست در فشرده‌سازی. او تابع را به‌عنوان یک رویه بی‌پایان می‌بیند: ۱ به ۲ می‌رود، ۲ به ۴ می‌رود، ۳ به ۶ می‌رود ...

سپهر در این فرآیند الگوریتمی گیر کرده‌است. او قادر نیست این رویه نامتناهی را در یک سازه مفهومی واحد و ایستا فشرده کند؛ سازه‌ای به نام هم‌توانی. این شکست در فشرده‌سازی، مانع از آن می‌شود که او بتواند از برابری کاردینالیته به‌عنوان یک ابزار مفهومی در ساختارهای پیچیده‌تر استفاده کند (مقایسه کنید با کپسوله‌سازی^{۳۲} دوبینسکی^{۳۳} و شی‌انگاری^{۳۴} اسفارد^{۳۵} [۲، ۸، ۱۷]). در این‌جا دانشجو باید مفهوم تناظر یک‌به‌یک را فشرده‌سازی کند و بپذیرد که این تعریف کاردینالیته است.

²⁹Anomalous Data

³⁰Epistemic Fixation

³¹Monitoring

³²Encapsulation

³³Ed Dubinsky

³⁴Reification

³⁵Anna Sfard

شکست سپهر به یک موضوع ویژه نظریه مجموعه‌ها محدود نیست. منطق مانع معرفتی او، اتکای بیش‌ازحد به شهود طبیعی، در حوزه‌های دیگر ریاضی نیز تکرار می‌شود. در وینیت بعد، می‌بینیم که همین ساختار شناختی چگونه در زمینه‌ای دیگر (سری‌ها در آنالیز) دوباره ظاهر می‌شود.

وینیت ۲ (سری هارمونیک). در درس آنالیز، استاد مبحث همگرایی سری‌ها را تدریس می‌کند. او سری هارمونیک را روی تخته می‌نویسد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

استاد پس از نوشتن چند جمله اول سری، می‌گوید: «این سری، با این که جمله عمومی‌اش $(\frac{1}{n})$ به صفر میل می‌کند، واگرا است.» او با استفاده از روش گروه‌بندی جملات و سپس آزمون انتگرال (مساحت زیر نمودار $f(x) = 1/x$) اثبات می‌کند که این سری واگرا است و مجموع آن به بی‌نهایت میل می‌کند و می‌نویسد $S_n \rightarrow \infty$. کیهان، به شدت مقاومت می‌کند: «استاد، ولی جملات دارند مرتباً کوچک‌تر می‌شوند. مگر می‌شود مجموع چیزهایی که تقریباً هیچ‌اند، بی‌نهایت شود؟»

سپس استاد نمودار تابع را رسم می‌کند و مساحت زیر نمودار را به نمایش می‌گذارد و نشان می‌دهد این مساحت نامحدود است و دلیل واگرایی همان است.

ولی کیهان این را فقط یک ترفند هندسی می‌داند. در ذهن او واقعیت عددی عوض نمی‌شود. باخود می‌گوید: «وقتی ورودی به صفر می‌رود، چیزی برای اضافه شدن نمی‌ماند. پس باید یک جایی متوقف شود.»

در ظاهر، مساله کیهان یک مساله محاسباتی ساده درباره سری‌هاست؛ اما مکانیسم شکست او نشانه‌ای از همان مقاومت باشلاری است که در وینیت نخست دیده شد. این بار، نه شهود متناهی جز-کل، بلکه شهود دینامیکی «زوال جز منجر به توقف کل می‌شود» در برابر معماری صوری سری‌ها مقاومت می‌کند.

تحلیل وینیت. شکست کیهان، ناتوانی در محاسبه نیست؛ او حد $\frac{1}{n}$ را به درستی صفر می‌داند. شکست او یک مانع معرفتی تمام‌عیار است: باور به این که «زوال جز، توقف کل را تضمین می‌کند».

دانشجو ناچار است معیار حقیقت برای همگرایی را تغییر دهد. در دنیای شهودی و دنباله‌ها، کوچک شدن نشانه پایان است. اما در دنیای سری‌ها، معیار حقیقت جدید، سرعت همگرایی است. او ناچار است از معیار شهودی کوچک شدن جملات به معیار تحلیلی سرعت زوال گذر کند.

در این جا مانع معرفتی به صورت «اگر خروجی یک فرآیند به صفر می‌رود، اثرش بر سیستم باید ناپدید شود» دیده می‌شود. این باور مانع از فهم این دگرگونی مفهومی می‌شود که صفر شدن شرط لازم است، نه کافی.

درک سری‌ها نیازمند هماهنگی [در سطح خرد] هم‌زمان دو فرآیند پویاست: فرآیند زوال جملات $(a_n \rightarrow 0)$ و فرآیند انباشت مجموع‌های جزیی $(S_n \rightarrow \infty)$.

کیهان دچار پدیده تمرکز موضعی است. ذهن او فقط روی تک جملات متمرکز است و نمی‌تواند این فرآیند خرد را با فرآیند کلان (انباشت) هماهنگ کند. در معماری دانش او، منطق جمله بر منطق مجموع سایه انداخته است.

برای غلبه بر این شهود، دانشجو باید بتواند مساله را از معماری گسسته (جمع اعداد) به معماری پیوسته (سطح زیر نمودار $1/x$) ترجمه کند (مقایسه کنید با [۹]). اما کیهان نمودار و انتگرال را ترفند محاسباتی می‌بیند؛ در نتیجه نمی‌تواند بفهمد که $(\ln x)$ خود تبلور هندسی و مفهومی همان انباشت آرام سری است. این شکست ترجمه‌ای، مهم‌ترین مانع اوست.

در این جا می بینیم که چگونه مانع معرفتی، کنترل را از کار می اندازد. کیهان به جای زیر سوال بردن شهود خود، از آن دفاع می کند: «با عقل جور در نمی آید.» این جمله نشان دهنده تعلیق فعالیت ارزیابی است و بنابراین، تفکر تحلیلی متوقف می شود. تا این جا دو نمونه از موانع معرفتی را دیدیم که هر دو ریشه در شهودهای عددی و تحلیلی دارند. اما موانع باشلاری محدود به محتواهای عددی نیستند؛ در سطوح بالاتر جبر نیز، گاهی مانع معرفتی خود ساختار است. وینیت سوم این نوع خاص از مانع را نشان می دهد: جایی که یادگیرنده نمی تواند سطوح هستی شناسی^{۳۶} مفاهیم ریاضی را بپذیرد.

وینیت ۳ (گروه خارج قسمتی). در درس جبر، استاد مفهوم چالش برانگیز گروه خارج قسمتی را تدریس می کند. او توضیح می دهد که عناصر این گروه جدید، دیگر اعداد یا عناصر منفرد نیستند، بلکه هم دسته ها هستند؛ یعنی هر عضو ساختار جدید، خود یک مجموعه از عناصر G به شکل aH است. سپس عمل گروه را معرفی می کند:

$$(aH)(bH) = (ab)H.$$

ناهید، با دیدن این تعریف دچار چالش می شود و می گوید: «استاد، این تعریف منطقی نیست. aH یک عدد یا یک عنصر نیست؛ مجموعه ای از عنصر است. چطور می شود مجموعه ها را به جای عناصر در هم ضرب کرد؟ ضرب برای عناصر تعریف شده است، نه برای کل یک دسته.»

سپس به مثال اعداد صحیح اشاره می کند: «مثلا کلاس 2 شامل بی نهایت عدد گسسته $..., 2, 5, 8, ...$ است. چطور ممکن است تمام این ها ناگهان به یک شی واحد تبدیل شوند؟»

این واکنش اولیه ناهید، که یک مجموعه نمی تواند نقش یک عنصر را بپذیرد، از همان جنس مقاومت های قبلی است؛ اما این بار در سطح ساختارهای جبری. در ادامه نشان می دهیم چگونه همین مقاومت، مکانیسم های فشرده سازی و بازآرایی را به طور مستقیم مختل می کند.

تحلیل وینیت. واکنش ناهید شکستی محاسباتی نیست؛ او قوانین ضرب، هم نهشتی، و حتی کار با کلاس های باقیمانده را می داند. او با یک مانع معرفتی درگیر است؛ نمی تواند بپذیرد که یک مجموعه در یک سطح، در سطحی بالاتر می تواند عنصر شود. برای ناهید عنصر یعنی چیزی تجزیه ناپذیر، و یک مجموعه هرگز نمی تواند جای عنصر بنشیند. بنابراین نمی تواند aH را شی ببیند؛ تنها لیستی از عناصر است. این همان شکست در مکانیسم فشرده سازی است.

از طرفی، درک کلاس های هم ارزی مستلزم بازآرایی سلسله مراتب ریاضی است؛ یک موجودیت می تواند در سطح پایین مجموعه باشد و در سطح بالا عنصر. او این نسبیت لایه ها را نمی پذیرد؛ و این مقاومت ساختاری باعث می شود نتواند جهان مفهومی جدید را سازمان دهی کند. در نتیجه در مکانیسم بازآرایی شکست می خورد.

در نهایت مفهوم گروه خارج قسمتی، که ماهیتی چندلایه و ساختاری دارد، برای او غیر قابل فهم می شود و تعریف ضرب در G/H را ذاتا متناقض می پندارد. در این جا می بینیم که مانع باشلاری، چگونه به یک باور شونفلدی تبدیل شده است: «عملیات ریاضی فقط روی اعداد تعریف می شوند، نه روی ساختارها.» این باور، سیستم کنترل ناهید را فلج می کند و اجازه نمی دهد او تعاریف صوری را حتی به صورت آزمایشی اجرا کند.

۴. بحث و نتیجه گیری

تحلیل سه وینیت کلاسی متمایز، کاردینالیته نامتناهی، سری هارمونیک و گروه خارج قسمتی، نشان داد که دشواری های یادگیری در سطوح پیشرفته ریاضیات، خطاهای موضعی یا بدفهمی های ایزوله نیستند؛ بلکه نمادهایی از یک فروپاشی سیستمی در معماری

³⁶Ontological

شناخت یادگیرنده‌اند. به عبارت دیگر، این دشواری‌ها زمانی رخ می‌دهد که مکانیسم‌های ضروری شناخت، مانند توانایی بازآرایی ساختارهای قدیمی یا فشرده‌سازی رویه‌ها به سازه‌های مفهومی، در مواجهه با مفاهیم جدید فعال نشود. پافشاری سپهر بر شهود «جز کوچک‌تر از کل»، مقاومت کیهان در برابر واگرایی مجموع جملات زوال یافته و ناتوانی ناهید در پذیرش مجموعه به مثابه عنصر، تجلی سازوکارهای شناختی زیربنایی مشترک است؛ مقاومت ساختارهای شناختی پیشین در برابر دانش جدید. در این مقاله استدلال کردیم که این مقاومت‌ها، نمونه‌های بارز موانع معرفتی به معنای باشلاری است که اکنون می‌توانیم آن‌ها را در چارچوب‌های مدرن‌تر شناسایی کنیم.

ریشه‌یابی شکست: ظهور مانع معرفتی باشلاری. نخستین لایه تحلیل، بازگشت به ریشه‌های باشلاری است. باشلار یادآور می‌شود که یادگیرندگان جهان را با شهودهای باستانی می‌خوانند؛ معرفت‌هایی که تلاش می‌کنند مفاهیم جدید را به قالب‌های آشنای خود تحمیل کنند [۳]. سه وینیت این مقاله تجلی روشن همین پدیده در سه قلمرو متفاوت ریاضیات بودند:

- در کاردینالیتی، دانشجو شهود متناهی را بر نامتناهی تحمیل کرد؛
 - در سری هارمونیک، شهود دینامیکی توقف بر تحلیل همگرایی سایه انداخت؛
 - در گروه خارج قسمتی، تصور هستی‌شناسی شی منفرد مانع از پذیرش ساختار جدید شد.
- در هر سه مورد، مقاومت نه ناشی از ناآشنایی با تعریف رسمی، بلکه ناشی از سیطره نظام پیشینی فهم بود.

ترجمه مانع به رفتار: خوانش شونفلدی. اما این مانع معرفتی چگونه در رفتار حل مساله ظاهر می‌شود؟ تحلیل شونفلدی نشان می‌دهد که این موانع باشلاری، مستقیماً به شکست در لایه کنترل تبدیل می‌شود. در وینیت‌های بررسی شده، دیدیم که مانع معرفتی باعث شد معیار قضاوت دانشجو از مبانی نظری به عقل سلیم تغییر کند (کاردینالیتی)، یا در برابر تناقض ظاهری، راهبرد بازیابی را رها کند (سری هارمونیک)، و یا مسیر استدلال رسمی را به نفع معیارهای شهودی کنار بگذارد (گروه خارج قسمتی). بدین ترتیب، ما نشان دادیم که شکست کنترلی شونفلد، درواقع لایه فراشناختی همان پدیده‌ای است که باشلار در لایه معرفت‌شناسی ریشه‌یابی می‌کرد.

کالبدشکافی شکست: نقش معماری دانش ریاضی (MKA). حال سوال این است که این شکست کنترلی، کدام چرخ‌دنده‌های ذهنی را از کار می‌اندازد؟ تحلیل ما می‌گوید که اگرچه سازوکار شناختی زیربنایی کلی (مانع معرفتی) یکسان است، اما هر وینیت بیانگر اختلال در یک مکانیسم محوری خاص است:

- کاردینالیتی: شکست در بازآرایی؛ ناتوانی در تخریب شبکه مفهومی اندازه؛
- سری هارمونیک: شکست در گذار معرفتی؛ ناتوانی در تغییر معیار حقیقت همگرایی؛
- گروه خارج قسمتی: شکست در فشرده‌سازی؛ ناتوانی در بازنمایی مجموعه به مثابه شی واحد.

این تفاوت‌های ظاهری درواقع سه تجلی از یک فرآیند واحد هستند: ناسازگاری بین ساختار مفهومی لازم برای فهم مفهوم جدید و ساختار موروثی از تجربه قبلی.

دلالت‌های آموزشی. اهمیت این تفکیک نظری زمانی آشکار می‌شود که به بافت‌های آموزشی خاص، مانند آموزش ریاضی در ایران، می‌نگریم. یکی از انگیزه‌های اصلی این تحقیق، پُرکردن خلا مفهومی در ادبیات پژوهشی داخلی است؛ جایی که مفهوم مانع معرفتی تقریباً غایب است و اغلب با بدفهمی^{۳۷} خلط می‌شود. تحلیل ما نشان داد که این تمایز، بنیادین است: بدفهمی یک خطای محتوایی است، اما مانع معرفتی ذاتاً محصول دانش پیشین موفق است. فقدان این تمایز باعث شده است بخش مهمی از تحلیل‌های مفهومی

³⁷Misconception

در ایران سطحی باقی بماند. بازگشودن بحث موانع معرفتی، ابزاری نظری فراهم می‌کند که می‌تواند خطاهای پایدار یادگیرندگان ایرانی را بادقت بسیار بیشتری تحلیل کند و آن را از سطح اشتباهات موردی به سطح ساختارهای شناختی ارتقا دهد.

محدودیت‌ها و پیشنهادها. تحلیل ارائه شده در این مقاله، اگرچه از نظر نظری غنی است، اما دارای محدودیت‌هایی است. این مقاله یک پژوهش مفهومی است که بر ابعاد شناختی موانع یادگیری تمرکز دارد. عوامل حیاتی دیگر مانند عوامل انگیزشی، باورهای عاطفی و تاثیر بافت اجتماعی-فرهنگی بر یادگیری دانشجو، به‌طور آگاهانه در این پژوهش بررسی نشده‌است. این پژوهش بر سه وینیت متمرکز بود که اگرچه به‌دقت انتخاب شده‌اند، اما لزوماً نماینده تمام موانع معرفتی در یادگیری نیستند. برای تایید تجربی فرضیه‌ها، به مطالعات کمی در مقیاس بزرگ نیاز است. پیشنهاد می‌شود که در پژوهش‌های آتی آزمون‌هایی طراحی شود که به‌طور مستقیم ناتوانی دانشجو در ترجمه، بازآرایی یا فشرده‌سازی را اندازه‌گیری و ارتباط آن با شکست در یادگیری مفاهیم پیشرفته را بررسی کند.

سخن پایانی. شکست در یادگیری ریاضی زمانی فهم‌پذیر می‌شود که موانع معرفتی باشلاری را جدی بگیریم و آن‌ها را با مدل‌های معاصر شناختی و فراشناختی یکپارچه کنیم. MKA چنین امکانی را فراهم می‌سازد و نشان می‌دهد که چرا تحلیل‌های شونفلد، تال، فیشبین و دیگران در واقع تجلی‌های مختلف یک چالش مشترک هستند؛ مقاومت ساختاری دانش در برابر تحول. بازاندیشی در این مفهوم می‌تواند به شکل‌گیری نسل جدیدی از طراحی‌های آموزشی منجر شود؛ طراحی‌هایی که نه‌صرفاً به انتقال محتوا، بلکه به معماری گذارهای شناختی می‌اندیشند.

مراجع

- [۱] سبزی، محمد و بهمانی، رضا. نظریه معماری دانش ریاضی: تحلیل و تبیین مکانیسم‌های شناختی در پرتو دیالکتیک تعمیم و انتزاع، و هم‌راستایی معرفتی (۱۴۰۴) (تحت داوری).
- [2] M. Asiala, A. Brown, D. J. DeVries, E. Dubinsky, D. Mathews, and K. Thomas, A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Res. Coll. Math. Educ.* **2** (1996), 1–32.
- [3] G. Bachelard, *The formation of the scientific mind: A contribution to a psychoanalysis of objective knowledge*. Clinamen Press, 2002 (Original work published 1938).
- [4] G. Brousseau, *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic, 1997.
- [5] C.-H. Huang, Students' use of intuitive reasoning to decide on the validity of mathematical statements. *Amer. J. Educ. Res.* **4**(14) (2016), 1025–1029.
- [6] C. A. Chinn and W. F. Brewer, The role of anomalous data in knowledge acquisition: A theoretical framework and implications for science instruction. *Rev. Educ. Res.* **63**(1) (1993), 1–49.
- [7] A. A. diSessa, Knowledge in pieces. In G. Forman and P. Pufall, eds., *Constructivism in the Computer Age*, Lawrence Erlbaum, 1988, pp. 49–70.
- [8] E. Dubinsky, Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall, ed., *Advanced mathematical thinking*, Springer, 1991, pp. 95–123.

- [9] R. Duval, *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Springer, 2017.
- [10] E. Fischbein, *Intuition in Science and Mathematics*. Kluwer, Dordrecht, 1987.
- [11] N. Hanson, *Patterns of discovery: An enquiry into the conceptual foundations of science*. Cambridge University Press, Cambridge, 1958.
- [12] P. Kloosterman and F. K. Stage, Measuring beliefs about mathematical problem solving. *Sch. Sci. Math.* **92**(3) (1992), 109–115.
- [13] J. Mason, *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Routledge, 2002.
- [14] G. Polya, *How to solve it*. Princeton University Press, 1945.
- [15] A. H. Schoenfeld, *Mathematical problem solving*. Academic Press, 1985.
- [16] A. H. Schoenfeld, Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making. In D. Grouws, ed., *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, Macmillan, 1992, pp. 334–370.
- [17] A. Sfard, On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as two sides of the same coin. *Educ. Stud. Math.* **22**(1) (1991), 1–36.
- [18] A. Sierpińska, Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educ. Stud. Math.* **18**(4) (1987), 371–397.
- [19] D. Tall and S. Vinner, Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educ. Stud. Math.* **12** (1981), 151–169.
- [20] R. K. Yin, *Case study research: Design and methods*, 5th ed. Sage Publications, 2014.



Towards Mathematical Sciences

Volume 5, Issue 1, 2025



Publisher

Ferdowsi University of Mashhad

Director-in-Charge

Mohammad Sal Moslehian

Editor-in-Chief

Fateme Helen Ghane

Executive Manager

Mohammad Janfada

Editorial Board

Shirin Hejazian, Ferdowsi University of Mashhad

Masoud Ariannejad, University of Zanjan, Zanjan

*Mohammad Janfada, Ferdowsi University of
Mashhad*

Arezou Habibirad, Ferdowsi University of Mashhad

Davod Khojasteh Salkuyeh, University of Guilan

Amir Daneshgar, Sharif University of Technology

Mahdi Doostparast, Ferdowsi University of Mashhad

Ali Dolati, Yazd University

Farzad Radmehr, Ferdowsi University of Mashhad

*Habib Rajabi Mashhadi, Ferdowsi University of
Mashhad*

Bakhtiyar Shabani, Ferdowsi University of Mashhad

Ahmad Safapour, Vali-E-Asr University of Refsanjan

*Massoumeh Fashandi, Ferdowsi University of
Mashhad*

*Gholam Reza Mohtashami Borzadaran, Ferdowsi
University of Mashhad*

Ehsan Momtahn, Yasouj University

Ali Asghar Molavi, Hakim Sabzevari University

Madjid Mirzavaziri, Ferdowsi University of Mashhad

Advisory Board

*Faezeh Toutounian Mashhad, Ferdowsi University of
Mashhad*

Rahim Zare Nahandi, University of Tehran

*Omid Ali Shehni Karamzadeh, Shahid Chamran
University of Ahvaz*

*Mohammad Ghasem Vahidi Asl, Shahid Beheshti
University*

Bahman Honary, Ferdowsi University of Mashhad

All rights are reserved for Ferdowsi University of Mashhad.

Mailing Address: TMSJ Office, Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran. P. O. Box 91775-1159.

Website Address: <https://tmsj.um.ac.ir>

Email: tmsj@um.ac.ir

Phone: +98-51-38806234

Fax: +98-51-38807358



فهرست مطالب

چهار مرکز اصلی مثلث و مکان‌های هندسی..... ۱

س. صالحی پور مهر

درباره چند جمله‌ای‌های متقارن دومتغیره و کاربرد آنها..... ۱۰

ز. سعیدیان و ر. کهکشان

از تصمیم‌سازی تا طرحواره‌سازی: تلفیق ساخت و ساز گرای، تصمیم‌سازی و طرحواره‌های ذهنی در

آموزش ریاضی برای ارتقای تدریس و یادگیری ریاضی..... ۲۴

ع. محمدی

تحلیل چالش‌های ساختاری آموزش ریاضی متوسطه در ایران با رویکرد سطوح سلسله‌مراتبی هم‌تعیینی

تعلیم و تربیت..... ۳۸

ف. رضوانی فرد

ریاضیات - یک «علم شبه طبیعی» در آموزش مدرسه‌ای..... ۵۸

م. افشاری و ح.ر. کاشفی

سازوکار مقاومت در برابر یادگیری؛ بازخوانی موانع معرفتی در ریاضیات پیشرفته..... ۶۸

م. سبزی، م. نامداری و م.ع. سیاوشی