



دوره ۶، شماره ۱، بهار ۱۴۰۵



به سوی علوم ریاضی

شاپا الکترونیک ۵۱۶۲-۲۷۸۳

tmsj.um.ac.ir



بسم الله الرحمن الرحيم

به سوی علوم ریاضی

دارای پروانه انتشار شماره ۸۶۳۹۶ به تاریخ ۱۳۹۹/۲/۱۵ از وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی، شاپا الکترونیک 2783-5162

دوره ۶، شماره ۱، بهار ۱۴۰۵

صاحب امتیاز: دانشگاه فردوسی مشهد

مدیر مسئول

محمد صالح مصلحیان

سر دبیر

بهرز مشایخی فرد

مدیر اجرایی

محمد جانفدا

علی اصغر مولوی، دانشگاه حکیم سبزواری

مجید میرزا وزیری، دانشگاه فردوسی مشهد

اعضای هیات تحریریه

مسعود آیین نژاد، دانشگاه زنجان

محمد جانفدا، دانشگاه فردوسی مشهد

آرزو حبیبی راد، دانشگاه فردوسی مشهد

شیرین حجازیان، دانشگاه فردوسی مشهد

داود خجسته سالکویه، دانشگاه گیلان

امیر دانشگر، دانشگاه صنعتی شریف

مهدی دوست پرست، دانشگاه فردوسی مشهد

علی دولتی، دانشگاه یزد

فرزاد راد مهر، دانشگاه فردوسی مشهد

حبیب رجبی مشهدی، دانشگاه فردوسی مشهد

بختیار شعبانی ورکی، دانشگاه فردوسی مشهد

احمد صفاپور، دانشگاه ولیعصر رفسنجان

معصومه فشنندی، دانشگاه فردوسی مشهد

فاطمه هلن قانع، دانشگاه فردوسی مشهد

غلامرضا محتشمی برزادران، دانشگاه فردوسی مشهد

احسان ممتحن، دانشگاه یاسوج

اعضای مشورتی هیات تحریریه

فائزه توتونیان مشهد، دانشگاه فردوسی مشهد

رحیم زارع نهندی، دانشگاه تهران

امیدعلی شهنی کرم زاده، دانشگاه شهید چمران اهواز

محمد قاسم وحیدی اصل، دانشگاه شهید بهشتی

بهمن هنری، دانشگاه فردوسی مشهد

ویراستار

زهره وثاقلی، دانشگاه فردوسی مشهد

این نشریه به صورت دوفصلنامه (دو شماره در سال) منتشر می شود.

کلیه حقوق برای دانشگاه فردوسی مشهد محفوظ است

نشانی:

مجله‌ی به سوی علوم ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، ص.ب. ۱۱۵۹، مشهد ۹۱۷۷۵

ایمیل: tmsj@um.ac.ir

آدرس وبسایت: <https://tmsj.um.ac.ir>

فاکس: ۰۵۱-۳۸۸۰۷۳۵۸

تلفن: ۰۵۱-۳۸۸۰۶۲۲۲

مجله به سوی علوم ریاضی با هدف عمومی سازی ریاضیات، کمک به آشنایی جامعه به طور عام و جامعه دانشگاهی به طور خاص با جنبه‌های مختلف و کاربردهای ریاضی، آمار، و کامپیوتر و ارتباط آنها با سایر علوم در قالب چاپ مقالات علمی-ترویجی مرتبط می‌باشد.

این مجله مقالات در زمینه‌های ریاضی محض، ریاضی کاربردی، آمار و احتمال، علوم کامپیوتر، آموزش ریاضی، تاریخ و فلسفه ریاضی، کاربردهای ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر در سایر علوم، و نقدهای علمی را برای بررسی می‌پذیرد. همچنین ترجمه مقالاتی در موضوعات گفته شده نیز با شرایط خاص مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مقالات باید به گونه‌ای نوشته شوند که قابل فهم برای افرادی با اطلاعات پایه‌ای ریاضی در سطح کارشناسی یا دانشجویان تحصیلات تکمیلی باشند.

ارسال مقاله به این مجله به این معنی است که کلیه نویسندگان مقاله از این ارسال آگاه بوده، اصالت محتوای علمی آن را تأیید و با ارسال آن به مجله‌ی به سوی علوم ریاضی موافق بوده‌اند و به علاوه متعهد هستند که مقاله ارسالی به این مجله به‌طور همزمان در مراحل بررسی و یا چاپ در هیچ نشریه دیگری نیست. با ارسال مقاله به این مجله، همه نویسندگان متعهد می‌شوند که حقوق مالکیت فکری و اخلاق پژوهشی را رعایت نموده‌اند و کلیه حقوق استفاده از محتوا، جداول، تصاویر و ... را به ناشر واگذار کرده‌اند.

ارسال مقاله تنها از طریق لینک <https://tmsj.um.ac.ir> و به صورت الکترونیک امکان‌پذیر است. همچنین راهنمای نویسندگان و [فایل فشرده فرمت مجله](#) در این لینک قابل مشاهده است.

فهرست مطالب

مشتق‌گیری خودکار به‌عنوان چارچوبی عمومی برای حل رده‌ای از مسائل بهینه‌سازی ۱

م. امین‌طوسی

تفسیرهای اقتصادی تحلیل پوششی داده‌ها ۱۵

ح. عزیزی

در سوگ نورما پرزمگ، ۲۰۲۶-۱۹۴۲: یک یادنامه ۳۲

س. رشید

نمونه‌ای متقدم از یک دستگاه عددنویسی ارزش‌مکانی غیردهی ۳۹

ا. امیری

به یادبود: جیم بنت (۲۰۲۳-۱۹۴۷) ۵۲

ح. عزیزی

الگوریتم‌ها: از دوران باستان تا عصر رایانه ۶۱

ج. الماسی زاده



مشتق‌گیری خودکار به‌عنوان چارچوبی عمومی برای حل رده‌ای از مسائل بهینه‌سازی

محمود امین‌طوسی*

گروه علوم کامپیوتر، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

m.amintoosi@um.ac.ir

چکیده. مشتق‌گیری خودکار یکی از ابزارهای کلیدی در پیاده‌سازی روش‌های مبتنی بر گرادیان در یادگیری ماشین است که امکان محاسبه‌ی دقیق و کارای مشتق‌ها را برای توابع پیچیده فراهم می‌کند. در این مقاله الگوریتم کلاسیک گرادیان کاهشی، در چارچوب مشتق‌گیری خودکار با نمایش چند مثال جذاب بازخوانی شده است. در این رویکرد، مسئله‌ی بهینه‌سازی به‌صورت یک تابع هدف قابل ارزیابی در برنامه‌نویسی فرموله می‌شود، حتی در مواردی که تابع هدف دارای بیان تحلیلی ساده یا متعارف در ریاضیات کلاسیک نیست، گرادیان‌ها به‌طور خودکار محاسبه می‌شوند و الگوریتم گرادیان کاهشی بدون تغییر مفهومی به‌کار گرفته می‌شود. نکته‌ی اصلی آن است که بسیاری از مسائل ظاهراً ناهمگون را می‌توان صرفاً با تعریف مناسب تابع هدف، در یک چارچوب محاسباتی مشترک حل کرد. برای تبیین تدریجی این دیدگاه، چهار مثال با پیچیدگی فزاینده بررسی شده‌اند. رگرسیون خطی به‌عنوان نخستین مثال انتخاب شده است، زیرا مسئله‌ای آشنا با فرم بسته‌ی تحلیلی است و بستری شفاف برای نمایش ارتباط میان گرادیان کاهشی، مشتق‌گیری خودکار، و الگوریتم‌های پایه‌ی یادگیری ماشین فراهم می‌کند. در ادامه، مثال‌هایی ارائه می‌شوند که اگرچه در ریاضیات کلاسیک تابع هدف صریح و تمیز ندارند، اما در قالب یک تابع هدف محاسباتی قابل بیان، و با استفاده از مشتق‌گیری خودکار قابل حل هستند. هدف مقاله، ارائه‌ی متنی آموزشی و انگیزه‌بخش است که نشان دهد چگونه مشتق‌گیری خودکار می‌تواند پلی میان بهینه‌سازی عددی کلاسیک و کاربردهای مدرن یادگیری ماشین ایجاد کند، به‌گونه‌ای که برای دانشجویان علوم ریاضی و علوم کامپیوتر قابل درک و الهام‌بخش باشد.

2020 Mathematics Subject Classification. 68T07, 68U10, 68U10, 68T45.

واژگان کلیدی. مشتق‌گیری خودکار، گرادیان کاهشی، یادگیری ماشین، تابع هدف، بهینه‌سازی عددی.
تاریخ: دریافت ۱۴۰۴/۱۱/۰۳ بازنگری ۱۴۰۴/۱۱/۲۳ پذیرش ۱۴۰۵/۰۳/۳۱ انتشار برخط ۱۴۰۵/۰۳/۳۱
نحوه ارجاع به این مقاله: م. امین‌طوسی، مشتق‌گیری خودکار به‌عنوان چارچوبی عمومی برای حل رده‌ای از مسائل بهینه‌سازی، ۶ (۱۴۰۵)، شماره ۱، ۱-۱۴.
©دانشگاه فردوسی مشهد.

۱. پیش‌گفتار

در بسیاری از متون کلاسیک بهینه‌سازی و یادگیری ماشین، تمرکز اصلی بر طراحی مدل‌ها و استخراج روابط تحلیلی برای گرادین‌ها است. در این رویکرد، فرم صریح تابع هدف و مشتقات آن نقش تعیین‌کننده‌ای در امکان‌پذیری حل مسئله ایفا می‌کنند. با این حال، ظهور چارچوب‌های مشتق‌گیری خودکار^۱ این نگاه را دگرگون کرده است. در این چارچوب‌ها، دیگر نیازی به محاسبه‌ی تحلیلی گرادین‌ها وجود ندارد؛ کافی است مسئله به صورت یک فرآیند/تابع محاسباتی مشتق‌پذیر فرموله شود.

هدف این مقاله تأکید بر این نکته‌ی کلیدی است که اهمیت اصلی مشتق‌گیری خودکار نه در سرعت محاسبه‌ی گرادین‌ها، بلکه در آزادی عمل برای تعریف تابع هدف/زیان نهفته است. به بیان دیگر، هر مسئله‌ای که بتوان آن را به صورت یک نگاشت محاسباتی مناسب از متغیرهای تصمیم به یک مقدار اسکالر تعریف کرد، در چارچوب بهینه‌سازی مبتنی بر گرادین قابل حل خواهد بود؛ حتی اگر این مسئله دارای ماهیتی غیرکلاسیک باشد.

در این مقاله، به جای تمرکز بر یک کاربرد خاص، یک الگوی مشترک حل مسئله مورد توجه قرار می‌گیرد و نشان داده می‌شود که چگونه مسائل ظاهراً نامرتب می‌توانند ذیل این الگو قرار گیرند. مثال‌ها به صورت هدفمند از ساده به پیچیده مرتب شده‌اند: از رگرسیون خطی به عنوان یک مسئله‌ی کلاسیک و آشنا، تا چیدمان گراف، انتقال سبک عصبی، و در نهایت نقاشی با شبکه‌های عصبی. در تمامی این مثال‌ها، الگوریتم بهینه‌سازی تغییری نمی‌کند و تنها تعریف متغیرهای تصمیم و تابع زیان متفاوت است. مخاطب اصلی مقاله دانشجویان و پژوهشگران علوم ریاضی و علوم کامپیوتر هستند که با مفاهیم پایه‌ای بهینه‌سازی و یادگیری ماشین آشنایی دارند، اما لزوماً پیش‌زمینه‌ای در حوزه‌هایی مانند گرافیک کامپیوتری، پردازش تصویر، یا فیزیک محاسباتی ندارند. تمام مثال‌ها به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که بدون نیاز به دانش تخصصی میان‌رشته‌ای قابل فهم باشند و نقش مشتق‌گیری خودکار را به صورت شفاف برجسته کنند.

در ادامه‌ی مقاله، این چارچوب کلی از طریق مجموعه‌ای از مثال‌ها با پیچیدگی فزاینده بررسی می‌شود. ترتیب مثال‌ها به گونه‌ای انتخاب شده است که خواننده به تدریج از یک مسئله‌ی کلاسیک با ساختار تحلیلی روشن به مسائلی برسد که در آن‌ها تعریف تابع زیان پیچیده‌تر، فضای متغیرها بزرگ‌تر، و مشتق‌گیری تحلیلی عملاً غیرممکن است. هدف آن است که نشان داده شود بدون تغییر در الگوریتم گرادین کاهشی، و صرفاً با بازتعریف تابع زیان، می‌توان طیف گسترده‌ای از مسائل را در یک چارچوب محاسباتی واحد حل کرد.

۲. چارچوب کلی حل مسائل بهینه‌سازی با مشتق‌گیری خودکار

در تمامی مثال‌های ارائه شده در این مقاله، مسئله به صورت کمینه‌سازی یک تابع زیان^۲ مشتق‌پذیر بر حسب متغیرهای تصمیم فرموله می‌شود و سپس با استفاده از الگوریتم گرادین کاهشی حل می‌گردد. نکته‌ی اساسی آن است که گرادین‌ها نه به صورت تحلیلی، بلکه با استفاده از مشتق‌گیری خودکار محاسبه می‌شوند. چارچوب کلی این فرآیند در الگوریتم^۱ خلاصه شده است.

¹Automatic Differentiation

²Loss Function

الگوریتم ۱ چارچوب کلی بهینه‌سازی مبتنی بر گرادیان کاهشی با مشتق‌گیری خودکار

ورودی: تابع زیان $\mathcal{L}(x)$ ، مقدار اولیه‌ی متغیرهای تصمیم x_0 ، نرخ یادگیری $\eta > 0$ ، شرط توقف خروجی: مقدار بهینه‌شده‌ی متغیرها (پارامترها)

۱: مقداردهی اولیه: $x \leftarrow x_0$

۲: تا زمانی که شرط توقف برقرار نشده است به صورت زیر پارامترها را بروزرسانی کن:

$$x \leftarrow x - \eta \nabla_x \mathcal{L}(x)$$

▷ محاسبه‌ی گرادیان با مشتق‌گیری خودکار

۳: x را به عنوان مقدار بهینه‌ی پارامترها برگردان

مشتق‌گیری خودکار چیست؟

مشتق‌گیری خودکار روشی عددی برای محاسبه‌ی دقیق گرادیان‌هاست که بر پایه‌ی تجزیه‌ی تابع به عملیات ابتدایی و استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای عمل می‌کند. برخلاف مشتق‌گیری نمادین، منجر به فرمول‌های تحلیلی نمی‌شود و برخلاف تفاضلات متناهی، دچار خطای تقریب نیست. مشتق‌گیری خودکار یک الگوریتم بهینه‌سازی نیست؛ بلکه ابزاری برای محاسبه‌ی گرادیان‌هاست. این ابزار زمانی بیشترین اهمیت را پیدا می‌کند که تابع هدف به‌صورت یک فرآیند محاسباتی پیچیده تعریف شده باشد، به‌گونه‌ای که مشتق‌گیری دستی از آن عملاً امکان‌پذیر نباشد.

در بخش‌های بعدی نشان داده می‌شود که اگرچه این الگوریتم از نظر ظاهری بسیار ساده است، اما انتخاب مناسب متغیرهای تصمیم و تعریف تابع زیان به‌صورت یک فرآیند محاسباتی مشتق‌پذیر، امکان حل طیف گسترده‌ای از مسائل را فراهم می‌کند؛ از مسائل آماری کلاسیک گرفته تا فرآیندهای تولیدی پیچیده. در چهار بخش بعد به حل چهار مسأله‌ی زیر با این روال کلی مبتنی بر مشتق‌گیری خودکار پرداخته خواهد شد:

(۱) رگرسیون خطی

(۲) ترسیم (نمایش) گراف در فضای دوبعدی

(۳) انتقال سبک عصبی

(۴) نقاشی با شبکه‌های عصبی

هر یک از این موارد در بخش مربوطه تعریف خواهد شد.

۳. رگرسیون خطی و گرادیان کاهشی: نقطه‌ی شروع

به‌عنوان نقطه‌ی شروع، مسئله‌ی رگرسیون خطی بررسی می‌شود؛ مثالی آشنا برای اغلب دانشجویان علوم ریاضی که امکان تمرکز بر چارچوب کلی بهینه‌سازی را بدون درگیر شدن با پیچیدگی‌های محاسباتی فراهم می‌کند. به فرض مجموعه‌ای از داده‌ها به‌صورت $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ در اختیار است و هدف، تقریب این داده‌ها با یک مدل خطی از فرم $\hat{y} = w_0 + w_1 x$ می‌باشد.

۱.۳. رگرسیون به عنوان یک مسئله‌ی بهینه‌سازی. در رگرسیون خطی، برای سنجش کیفیت تقریب، تابع خطای میانگین مربعات (MSE)^۳ به‌عنوان تابع هدف انتخاب می‌شود:

$$\mathcal{L}(w_0, w_1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (w_0 + w_1 x_i - y_i)^2.$$

^۳Mean Squared Error (MSE)

که به صورت یک مسئله بهینه‌سازی، به عنوان یک مسئله یادگیری - پیدا کردن w_j ها - قابل بیان است:

$$\min_{w_0, w_1} \mathcal{L}(w_0, w_1).$$

برای حل این مسئله، از الگوریتم گرادیان کاهشی (الگوریتم ۱)^۴ استفاده می‌شود که در آن پارامترها به صورت تکراری و بر اساس گرادیان تابع خطا به روزرسانی می‌شوند:

$$w_j \leftarrow w_j - \eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_j}$$

که در آن η نرخ یادگیری است.

در این مثال، مشتق‌های جزئی تابع خطا نسبت به پارامترها به صورت تحلیلی به سادگی قابل محاسبه هستند و حتی فرم حل بسته‌ی^۵ مسئله نیز وجود دارد، اما در مواردی که روش حل بسته کارا نیست و منجمله در شبکه‌های عصبی و یادگیری عمیق از الگوریتم گرادیان کاهشی برای حل آن استفاده می‌شود [۱].

۲.۳. نقش مشتق‌گیری خودکار. محاسبه مشتق تابع هدف (تابع زیان، تابع خطا یا تابع انرژی)^۶ بخشی ضروری در الگوریتم گرادیان کاهشی هست و چارچوب‌های یادگیری ماشین مانند پای‌تورچ^۷ و تانسورفلو^۸ امکان مشتق‌گیری خودکار تابع هدف را دارند و محاسبه‌ی گرادیان‌ها می‌تواند به قابلیت مشتق‌گیری خودکار این ابزارها واگذار گردد. در این حالت، تابع خطا صرفاً به عنوان یک فرآیند محاسباتی تعریف شده و گرادیان آن نسبت به پارامترها به صورت خودکار محاسبه می‌شود، بی‌آنکه نیازی به استخراج و پیاده‌سازی مشتق‌های تحلیلی وجود داشته باشد. در مسئله‌ای به سادگی رگرسیون خطی فوق‌الذکر، مشتق‌گیری خودکار مزیت بنیادینی نسبت به روش‌های کلاسیک ایجاد نمی‌کند اما پایه و اساس همه روش‌های یادگیری در شبکه‌های عصبی و مدل‌های یادگیری عمیق است [۱، ۳، ۸]. هدف از طرح این مثال، نمایش چارچوب کلی حل مسئله و آماده‌سازی ذهن خواننده برای مثال‌های بعدی است که در آن‌ها محاسبه‌ی تحلیلی مشتق‌ها عملاً امکان‌پذیر نخواهد بود.

۳.۳. نتیجه‌ی محاسباتی. اجرای الگوریتم بهینه‌سازی منجر به برازش یک خط بر روی داده‌ها می‌شود که کمینه‌کننده‌ی تابع خطای تعریف شده است. نمایش گرافیکی این خط در کنار داده‌های اولیه، به خوبی همگرایی الگوریتم و صحت فرموله‌سازی مسئله را نشان می‌دهد. در شکل ۱، نتیجه‌ی روال بهینه‌سازی الگوریتم ۱ برای برآورد رگرسیون خطی تعدادی داده مصنوعی نشان داده شده است. داده‌های واقعی با نقاط آبی نمایش داده شده‌اند. در مثال‌های بعدی، مشاهده خواهد شد که اگرچه ساختار کلی الگوریتم تغییری نمی‌کند، اما ماهیت تابع هدف و پیچیدگی محاسبه‌ی گرادیان‌ها به طور چشمگیری افزایش می‌یابد.

هدف از طرح این مثال، نه ارائه‌ی یک روش جدید، بلکه تثبیت چارچوب کلی حل مسئله است؛ چارچوبی که در مثال‌های بعدی بدون تغییر باقی می‌ماند، در حالی که ماهیت مسئله به طور چشمگیری پیچیده‌تر می‌شود. در این مثال، چارچوب کلی بهینه‌سازی کاملاً با الگوریتم ۱ منطبق است؛ تنها تابع هدف و متغیرهای تصمیم مشخص شده‌اند. در ادامه‌ی مقاله، با افزایش تدریجی پیچیدگی مسائل، نشان داده خواهد شد که مشتق‌گیری خودکار از یک ابزار کمکی به یک مؤلفه‌ی ضروری در حل مسئله تبدیل می‌شود.

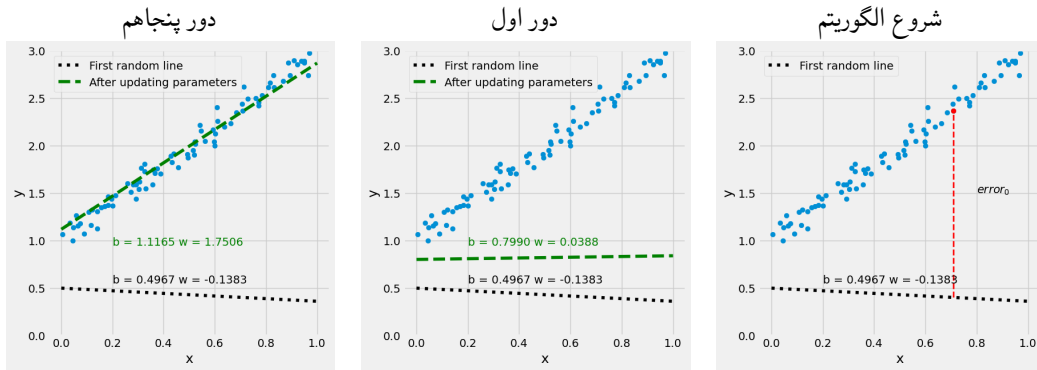
⁴Gradient Descent

⁵Closed Form Solution

⁶Objective, Loss, Error or Energy Function

⁷PyTorch

⁸TensorFlow



شکل ۱: برازش رگرسیون خطی $y = wx + b$ با استفاده از گرادینان کاهشی و مشتق‌گیری خودکار در پای‌تورچ. نقاط آبی داده‌های نویزی تولیدشده را نشان می‌دهند. خط‌چین سیاه بیانگر مقداردهی اولیه‌ی مدل و خط‌چین سبز مراحل دوم و آخر روال بهینه‌سازی است.

۴. ترسیم گراف به‌عنوان یک مسئله‌ی بهینه‌سازی

در این بخش، مسئله‌ی ترسیم گراف به‌عنوان یک مسئله‌ی بهینه‌سازی پیوسته بررسی می‌شود. این مسئله، اگرچه در ظاهر ماهیتی بصری دارد، اما در بنیان خود کاملاً ریاضی بوده و می‌توان آن را در قالب کمینه‌سازی یک تابع هدف اسکالر فرموله کرد. فرض کنید یک گراف بدون جهت $G = (V, E)$ با مجموعه‌ی رأس‌ها V و مجموعه‌ی یال‌ها E داده شده است. هدف، انتساب یک موقعیت دوبعدی به هر رأس

$$v \in V \mapsto \mathbf{p}_v = (x_v, y_v) \in \mathbb{R}^2$$

به‌گونه‌ای است که نمایش حاصل، از نظر ساختاری و بصری خوانا باشد. شکل ۲ یک چیدمان تصادفی از یک گراف مصنوعی مشبک را نشان می‌دهد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، با اینکه می‌دانیم گراف، یک گراف مشبک هست اما با انتخاب تصادفی مختصات رأس‌ها، نمایش نامنظمی دارد. هدف آن هست که مختصات رئوس گراف در صفحه به گونه‌ای پیدا شوند که گراف نمایش مناسبی داشته باشد. به این ترتیب، مسئله‌ی ترسیم گراف به یافتن یک ماتریس مختصات X تقلیل می‌یابد.

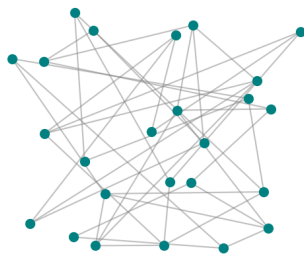
$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{|V|}^\top \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{|V| \times 2}.$$

۱.۴. فرم ریاضی مسئله. برای تبدیل مسئله‌ی ترسیم گراف به یک مسئله‌ی بهینه‌سازی، مجموعه‌ای از معیارهای کیفی در قالب یک تابع هدف/انرژی/زیان تعریف می‌شود. این معیارها معمولاً شامل موارد زیر هستند:

- نزدیک‌بودن رأس‌های متصل توسط یال،
- فاصله‌گرفتن رأس‌های غیرمتصل از یکدیگر،
- جلوگیری از هم‌پوشانی رأس‌ها.

این ملاحظات به‌صورت جملات ریاضی در تابع هدف $\mathcal{L}(X)$ ترکیب می‌شوند.

۲.۴. تعریف تابع هدف. تابع هدف از دو مؤلفه‌ی اصلی جاذبه و دافعه تشکیل شده است:



شکل ۲: چیدمان تصادفی رئوس گراف در فضای دو بعدی.

۱. جمله‌ی جاذبه (یال‌ها). برای هر یال $(u, v) \in E$ ، رأس‌های متناظر باید به یکدیگر نزدیک باشند. این ویژگی با جمله‌ی زیر مدل می‌شود:

$$L_{\text{attract}}(X) = \sum_{(u,v) \in E} \|\mathbf{p}_u - \mathbf{p}_v\|^2.$$

۲. جمله‌ی دافعه (رأس‌ها). برای جلوگیری از تجمع و هم‌پوشانی رأس‌ها، تمام جفت‌های متمایز رأس‌ها یک نیروی دافعه را تجربه می‌کنند:

$$L_{\text{repulse}}(X) = \sum_{u \neq v} \frac{1}{\|\mathbf{p}_u - \mathbf{p}_v\| + \varepsilon},$$

که در آن $\varepsilon > 0$ یک مقدار کوچک برای جلوگیری از تقسیم بر صفر است. تابع هدف نهایی. با ترکیب دو مؤلفه‌ی فوق، تابع هدف نهایی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L}(X) = L_{\text{attract}}(X) + \lambda L_{\text{repulse}}(X),$$

که در آن $\lambda > 0$ ضریب تنظیم تعادل بین جاذبه و دافعه است. در نتیجه، مسئله‌ی ترسیم گراف به مسئله‌ی بهینه‌سازی زیر تقلیل می‌یابد:

$$\min_{X \in \mathbb{R}^{|V| \times 2}} \mathcal{L}(X).$$

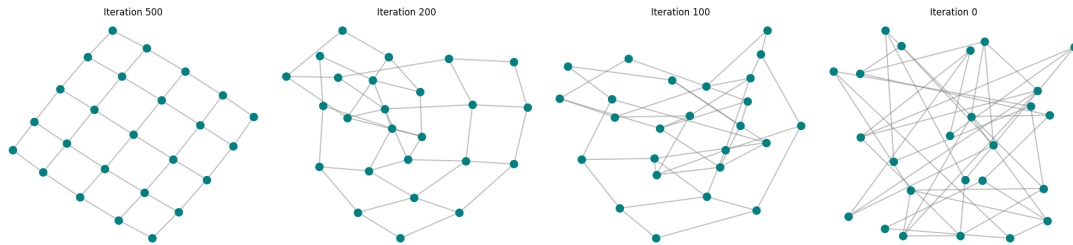
۳.۴. چالش مشتق‌گیری تحلیلی. اگرچه هر یک از جملات تابع هدف به‌تنهایی ساختاری ساده دارند، اما در عمل:

- تعداد جملات تابع هدف با اندازه‌ی گراف رشد می‌کند،
- هر متغیر مکانی به‌طور هم‌زمان در جملات متعدد ظاهر می‌شود،
- و تغییر یا افزودن معیارهای جدید مستلزم بازنویسی کامل گرادیان‌ها است.

در چنین شرایطی، مشتق‌گیری تحلیلی از تابع $\mathcal{L}(\cdot)$ فرآیندی پیچیده، مستعد خطا و فاقد انعطاف‌پذیری خواهد بود.

۴.۴. نقش مشتق‌گیری خودکار. در چارچوب مشتق‌گیری خودکار، تابع هدف $\mathcal{L}(X)$ صرفاً به‌عنوان یک نگاشت محاسباتی تعریف می‌شود و گرادیان آن نسبت به متغیرهای مکانی $-\nabla_X \mathcal{L}$ - به‌صورت خودکار محاسبه می‌گردد. در این رویکرد:

- مختصات رأس‌ها به‌عنوان متغیرهای قابل مشتق در نظر گرفته می‌شوند،
- تابع هدف می‌تواند شامل توابع غیرخطی و غیرساده باشد،
- و الگوریتم گرادیان نزولی بدون مشتق‌گیری دستی اجرا می‌شود.



شکل ۳: بهینه‌سازی چیدمان گراف با کمیینه‌سازی تابع انرژی $\mathcal{L}$. نمایش موقعیت رأس‌ها در چند تکرار مختلف از الگوریتم بهینه‌سازی.

در شکل ۳، وضعیت گراف در چند تکرار مختلف از فرایند بهینه‌سازی نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که ساختار منظم گراف به تدریج از مقداردهی اولیه تصادفی بازیابی می‌شود.

۵.۴. نتیجه‌ی محاسباتی. اجرای فرایند بهینه‌سازی منجر به جابه‌جایی تدریجی رأس‌ها و کاهش یکنواخت مقدار تابع هدف $\mathcal{L}(\cdot)$ می‌شود. در نتیجه، آرایشی از رأس‌ها حاصل می‌گردد که ساختار گراف را به شکل منظم‌تری بازتاب می‌دهد. نکته‌ی قابل توجه آن است که ساختار کلی الگوریتم بهینه‌سازی در این مثال هیچ تفاوت مفهومی با مثال رگرسیون خطی ندارد؛ تفاوت اصلی صرفاً در تعریف و پیچیدگی تابع هدف نهفته است. این مثال نشان می‌دهد که:

- تابع هدف می‌تواند حاصل ترکیب معیارهای متنوع و غیرساده باشد،
- یک مسئله‌ی گرافی را می‌توان به صورت یک مسئله‌ی پیوسته مدل کرد،
- و مشتق‌گیری خودکار ابزاری کلیدی برای حل چنین مسائل پیچیده‌ای است.

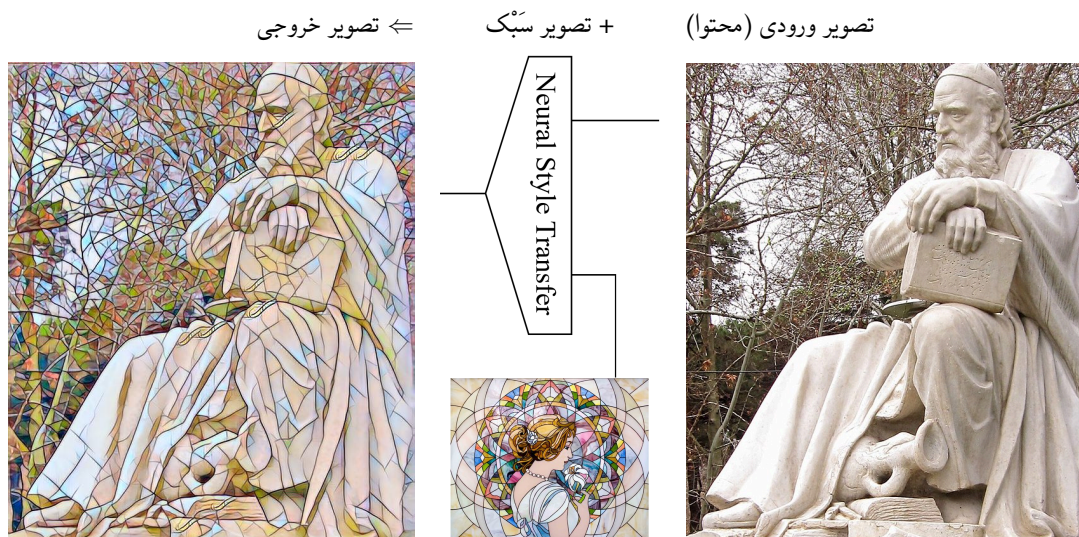
در مقایسه با مثال رگرسیون خطی، در اینجا مشتق‌گیری تحلیلی نه تنها زمان‌بر، بلکه از نظر پیاده‌سازی نیز غیرمنعطف است؛ در حالی که چارچوب مشتق‌گیری خودکار امکان آزمایش و تغییر سریع تابع هدف را فراهم می‌کند. از دیدگاه الگوریتم کلی، تفاوتی میان این مثال و رگرسیون خطی وجود ندارد؛ تنها ساختار و پیچیدگی تابع هدف تغییر کرده است. در مثال بعدی، نشان داده خواهد شد که همین ایده برای داده‌هایی با ساختار پیچیده‌تر، مانند تصاویر، نیز قابل استفاده است.

۵. انتقال سبک عصبی در چارچوب بهینه‌سازی مبتنی بر مشتق‌گیری خودکار

در این بخش، مسئله‌ای را خواهیم دید که در آن متغیر تصمیم دارای هزاران و یا میلیون‌ها مؤلفه است. مسئله‌ی انتقال سبک عصبی^۹ [۴] یک نمونه از چنین مسائلی است که در همان چارچوب کلی بهینه‌سازی معرفی شده در ابتدای مقاله تحلیل می‌شود. منظور از انتقال سبک عصبی^۹ [۵، ۶، ۷]؛ روشی است که با بهره‌گیری از شبکه‌های عصبی پیچشی^{۱۰} می‌تواند سبک بصری یک تصویر را به تصویر دیگر منتقل سازد. شکل ۴ یک نمونه انتقال سبک عصبی را نشان می‌دهد که در آن سبک (استایل) تصویر وسط بر روی تصویری از مجسمه‌ی عمر خیام اعمال شده است. هدف در این بخش آن است که نشان داده شود بدون تغییر در ساختار الگوریتم

^۹Neural Style Transfer

^{۱۰}Convolutional Neural Networks (CNNs)



شکل ۴: تصویر وسط به عنوان سبک (استایل) بر روی تصویری از عمر خیام (به عنوان ورودی) اعمال شده و تصویر خروجی به دست آمده است. برنامه مرتبط با این شکل از گیت‌هاب زیر قابل دسترس است: <https://github.com/eriklindernoren/Fast-Neural-Style-Transfer>.

بهینه‌سازی، تنها با تغییر در تعریف تابع هدف $\mathcal{L}(\cdot)$ ، می‌توان از مسائل بسیار ساده (رگرسیون خطی) به مسائلی با ابعاد بسیار بالا (اعمال سبک تصویر) گذر کرد.

۱.۵. متغیر تصمیم. برخلاف مثال‌های پیشین، در این مسئله متغیر تصمیم پارامترهای یک مدل نیست، بلکه خودِ تصویر خروجی است. به عبارت دیگر، تصویر $x \in \mathbb{R}^{H \times W \times 3}$ به‌عنوان بردار متغیرها در نظر گرفته می‌شود. هر پیکسل (و هر کانال رنگی) یک مؤلفه از این بردار را تشکیل می‌دهد. شبکه‌ی عصبی پیچشی از پیش آموزش‌دیده (مانند VGG-19 [۱۰]) در طول فرآیند ثابت نگه داشته می‌شود و صرفاً به‌عنوان نگاشتی غیرخطی برای استخراج ویژگی‌ها به‌کار می‌رود.

۲.۵. تعریف تابع هدف $\mathcal{L}(\cdot)$. مطابق چارچوب کلی بهینه‌سازی، تابع هدف به‌صورت یک تابع اسکالر از متغیر تصمیم تعریف می‌شود [۲]:

$$\mathcal{L}(x) = \alpha L_{\text{content}}(p, x) + \beta L_{\text{style}}(a, x),$$

که در آن:

- p تصویر محتوا،
- a تصویر سبک،
- α و β ضرایب موازنه‌ی اهداف هستند.

۱.۲.۵. جزء محتوایی تابع هدف. جزء محتوایی تابع هدف اختلاف میان نگاشت‌های ویژگی تصویر محتوا و تصویر متغیر در یک لایه‌ی مشخص l_c از شبکه را اندازه‌گیری می‌کند:

$$L_{\text{content}}(p, x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(F_{ij}^{l_c}(x) - F_{ij}^{l_c}(p) \right)^2.$$

در این عبارت، $F^l(\cdot)$ خروجی شبکه در لایه‌ی l است.

۲.۲.۵. جزء سبکی تابع هدف. جزء سبکی تابع هدف بر پایه‌ی ماتریس گرام ویژگی‌ها تعریف می‌شود. برای هر لایه‌ی l ، ماتریس گرام به‌صورت

$$G^l(x) = F^l(x) F^l(x)^\top$$

محاسبه شده و هم‌بستگی آماری بین کانال‌های ویژگی را نمایش می‌دهد. زیان سبک در لایه‌ی l برابر است با:

$$L_{\text{style}}(a, x, l) = \frac{1}{4N_l^2 M_l^2} \sum_{i,j} (G_{ij}^l(x) - G_{ij}^l(a))^2,$$

و زیان نهایی سبک با جمع وزن‌دار این مقادیر روی چند لایه به‌دست می‌آید و مسئله‌ی انتقال سبک عصبی به‌صورت زیر فرموله می‌شود:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^{H \times W \times 3}} \mathcal{L}(x).$$

از دیدگاه الگوریتم کلی، بردار پارامترها با تصویر x جایگزین شده و تابع هدف همان $\mathcal{L}(x)$ است؛ الگوریتم بهینه‌سازی بدون تغییر اجرا می‌شود.

۳.۵. نقش مشتق‌گیری خودکار در چارچوب الگوریتم. در هر تکرار از الگوریتم:

- (۱) مقدار تابع هدف $\mathcal{L}(x)$ از طریق عبور رو به جلو در شبکه محاسبه می‌شود؛
- (۲) گرادیان تابع هدف $(\nabla_x \mathcal{L})$ با استفاده از مشتق‌گیری خودکار محاسبه می‌گردد؛
- (۳) تصویر x با یک گام گرادیانی به‌روزرسانی می‌شود.

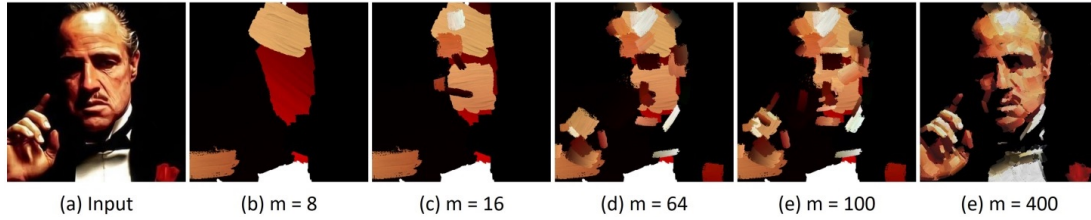
تمام این مراحل دقیقاً با همان الگوریتم کلی گرادیان نزولی انجام می‌شود، با این تفاوت که:

- گراف محاسباتی بسیار عمیق است،
- تعداد متغیرها بسیار زیاد است،
- و محاسبه‌ی دستی گرادیان‌ها عملاً غیرممکن است.

با اجرای این فرآیند، تصویر اولیه (نویز یا تصویر محتوا) به‌تدریج به تصویری تبدیل می‌شود که مقدار تابع هدف $\mathcal{L}$ را کمینه می‌کند. تصویر نهایی، هم ساختار هندسی تصویر محتوا و هم الگوهای آماری تصویر سبک را بازتاب می‌دهد (شکل ۴). این مثال، مشابه مثال قبل است:

- الگوریتم بهینه‌سازی تغییری نکرده است،
- تنها تعریف تابع هدف $\mathcal{L}(\cdot)$ و ماهیت متغیر تصمیم تغییر کرده است،
- و مشتق‌گیری خودکار امکان تعمیم مستقیم این چارچوب به مسائل با میلیون‌ها متغیر را فراهم کرده است.

از این منظر، انتقال سبک عصبی ادامه‌ی طبیعی همان مسیری است که از رگرسیون خطی آغاز شد و با ترسیم گراف گسترش یافت. در بخش بعد کاربرد جذاب دیگری را خواهیم دید.



شکل ۵: مراحل نقاشی یک چهره با روش نقاشی عصبی، بازنشر بخشی از شکل ۷ از [۱۲]. تصاویر (b) تا (e) مرحله‌ای از نقاشی چهره مرجع (a) توسط قلم مو و آبرنگ با روش نقاشی عصبی را نشان می‌دهند.

۶. نقاشی عصبی در چارچوب بهینه‌سازی مبتنی بر مشتق‌گیری خودکار

در این بخش، مسئله‌ی نقاشی با شبکه‌های عصبی که از آن با عنوان نقاشی عصبی^{۱۱} یاد می‌شود را به‌عنوان یک مسئله‌ی بهینه‌سازی پیوسته و مشتق‌پذیر فرموله می‌کنیم. هدف، تولید یک تصویر نهایی از طریق توالی‌هایی از ضربات نقاشی^{۱۲} است؛ به‌گونه‌ای که تصویر حاصل، از نظر بصری با یک تصویر مرجع داده‌شده بیشترین تطابق را داشته باشد [۹، ۱۱، ۱۲]. شکل ۵ یک نمونه را نشان می‌دهد که چگونه این روش، مراحل نقاشی شدن یک چهره روی بوم نقاشی با قلم مو و آبرنگ را می‌تواند به نمایش بگذارد. این مثال نشان می‌دهد که چگونه یک فرآیند تولیدی پیچیده و غیرپیکسلی را می‌توان در قالب یک تابع هدف قابل مشتق‌گیری تعریف کرد و با استفاده از مشتق‌گیری خودکار بهینه نمود.

۱.۶. **فرم ریاضی مسأله.** فرض کنید $I^* \in \mathbb{R}^{H \times W \times 3}$ تصویر مرجع (هدف) باشد. نقاشی نهایی I نه به‌صورت مستقیم در فضای پیکسل‌ها، بلکه از طریق پردازش زدن^{۱۳} (رندرینگ)^{۱۴} مشتق‌پذیر مجموعه‌ای از ضربات تولید می‌شود. این ضربات به‌صورت ترتیبی روی یک بوم خالی اعمال می‌شوند. اگر T تعداد کل ضربات باشد، آنگاه پارامترهای نقاشی را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_T\},$$

که در آن هر θ_t پارامترهای ضربه‌ی t -ام را مشخص می‌کند.

۲.۶. **متغیرهای تصمیم.** هر ضربه‌ی نقاشی با یک بردار پارامتر تعریف می‌شود:

$$\theta_t = (x_t, y_t, \alpha_t, \ell_t, c_t),$$

که در آن:

$$\bullet (x_t, y_t) \in \mathbb{R}^2: \text{موقعیت مرکز ضربه روی بوم؛}$$

$$\bullet \alpha_t \in [0, 2\pi): \text{زاویه‌ی ضربه؛}$$

¹¹Neural Painting

¹²Strokes

¹³ پردازش زدن (رندرینگ) و یا ارائه ماشینی تصاویر، عبارت است از نمایان‌سازی فرایند تولید ماشینی تصاویر بر پایه مدل‌های محاسباتی و سپس نمایش رایانه‌ای آن‌ها بر روی نمایشگر.

¹⁴Rendering

• $\ell_t \in \mathbb{R}^+$: طول یا مقیاس ضربه؛

• $c_t \in \mathbb{R}^3$: رنگ ضربه است.

در نتیجه، متغیر بهینه‌سازی اصلی، کل مجموعه‌ی پارامترهاست:

$$\Theta \in \mathbb{R}^{T \times d},$$

که d تعداد پارامترهای هر ضربه است. تمام مشتق‌گیری‌ها و به‌روزرسانی‌ها نسبت به همین متغیر Θ انجام می‌شود.

۳.۶. رندرینگ مشتق‌پذیر. یک تابع رندرینگ مشتق‌پذیر را در نظر می‌گیریم:

$$I = \mathcal{R}(\Theta),$$

که با دریافت پارامترهای ضربات، تصویر نهایی را تولید می‌کند. ویژگی کلیدی $\mathcal{R}$ این است که نسبت به تمام مؤلفه‌های Θ مشتق‌پذیر است، یعنی $\partial I / \partial \Theta$ وجود دارد. این ویژگی اجازه می‌دهد گرادیان خطا از فضای تصویر نهایی، از طریق فرآیند رندرینگ، به پارامترهای هندسی و رنگی ضربات منتقل شود.

۴.۶. تعریف تابع هدف L . هدف، یافتن پارامترهای Θ به‌گونه‌ای است که تصویر رندر شده I بیشترین شباهت را به تصویر مرجع I^* داشته باشد. تابع هدف کلی به‌صورت ترکیبی از دو جمله تعریف شده است:

$$\mathcal{L}(\Theta) = L_{\text{recon}}(\mathcal{R}(\Theta), I^*) + \lambda L_{\text{reg}}(\Theta).$$

۱. جمله‌ی بازسازی (Reconstruction Loss). این جمله میزان اختلاف بین تصویر تولید شده و تصویر هدف را اندازه‌گیری می‌کند. یک انتخاب متداول، نرم دوی اختلاف بین تصویر حاصل از مدل و تصویر مرجع است:

$$L_{\text{recon}} = \|\mathcal{R}(\Theta) - I^*\|_2^2.$$

این جمله مستقیماً کیفیت بصری نقاشی نهایی را هدف قرار می‌دهد و گرادیان آن نسبت به پارامترهای ضربات از طریق مشتق‌گیری زنجیره‌ای محاسبه می‌شود:

$$\frac{\partial L_{\text{recon}}}{\partial \Theta} = \frac{\partial L_{\text{recon}}}{\partial I} \cdot \frac{\partial I}{\partial \Theta}.$$

۲. جمله‌ی منظم‌سازی (Regularization). برای جلوگیری از تولید ضربات غیرطبیعی یا ناپایدار، از جملات منظم‌سازی استفاده می‌شود. به‌عنوان مثال:

$$L_{\text{reg}}(\Theta) = \sum_{t=1}^T (\|\ell_t\|^2 + \|\nabla c_t\|^2),$$

که در آن:

- جمله‌ی اول از بزرگ شدن بیش از حد ضربات جلوگیری می‌کند؛
- جمله‌ی دوم تغییرات شدید رنگ را جریمه می‌کند.

این جملات باعث می‌شوند فضای جست‌وجوی بهینه‌سازی هموارتر شده و گرادیان‌ها رفتار پایدارتری داشته باشند.

۵.۶. دیدگاه بهینه‌سازی و مشتق‌گیری. مسئله‌ی نهایی به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\min_{\Theta} \mathcal{L}(\Theta).$$

بهینه‌سازی با استفاده از الگوریتم‌های مبتنی بر گرادین (مانند SGD یا Adam) انجام می‌شود:

$$\Theta^{(k+1)} = \Theta^{(k)} - \eta \nabla_{\Theta} L(\Theta^{(k)}).$$

نکته‌ی کلیدی این است که:

- مشتق‌گیری نه نسبت به پیکسل‌ها،
- بلکه مستقیماً نسبت به پارامترهای هندسی و رنگی ضربات انجام می‌شود؛
- و کل فرآیند رندرینگ، بخشی از گراف محاسباتی قابل مشتق‌گیری است.

به این ترتیب، نقاشی عصبی نمونه‌ای گویا از کاربرد مشتق‌گیری خودکار در یک مسئله‌ی تولیدی غیرمتعارف است، که در آن متغیرهای تصمیم، ساختاری هندسی و معنایی دارند، نه صرفاً مقادیر عددی در یک شبکه‌ی کلاسیک. از این منظر، نقاشی عصبی نقطه‌ی پایانی مسیر ارائه‌شده در این مقاله است: جایی که یک فرآیند تولیدی پیچیده، با متغیرهایی دارای معنا و ساختار هندسی، در همان چارچوب ساده‌ی بهینه‌سازی مبتنی بر مشتق‌گیری خودکار و بدون هیچ تغییری در الگوریتم اصلی حل می‌شود.

۷. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله تلاش شد تا مشتق‌گیری خودکار نه صرفاً به عنوان یک ابزار پیاده‌سازی در یادگیری ماشین، بلکه به عنوان یک چارچوب مفهومی برای حل مسائل بهینه‌سازی پیوسته معرفی شود. ایده‌ی محوری مقاله آن است که با تعریف مناسب یک تابع هدف مشتق‌پذیر، می‌توان مسائل بسیار متنوعی را با استفاده از یک الگوریتم بهینه‌سازی مبتنی بر گرادین حل کرد. چهار مثال ارائه‌شده نشان دادند که این چارچوب از مسائل کلاسیک و کم‌بعد مانند رگرسیون خطی تا مسائل پیچیده و تولیدی مانند انتقال سبک و نقاشی عصبی قابل تعمیم است. در تمامی این موارد، تفاوت اصلی در ماهیت متغیرهای تصمیم و تابع هدف است، نه در الگوریتم بهینه‌سازی. این مشاهده، دیدگاهی یکپارچه نسبت به مسائل بهینه‌سازی فراهم می‌کند و مرز میان مدل‌های «ساده» و «پیچیده» را کمرنگ می‌سازد. از دیدگاه آموزشی، این چارچوب نشان می‌دهد مفاهیم کلاسیکی مانند گرادین، تابع هدف و بهینه‌سازی چگونه مستقیماً در کاربردهای مدرن و خلاقانه ظاهر می‌شوند. گرچه که بیان کامل دو مثال آخر فراتر از این نوشتار است، اما امید است این مقاله گامی کوچک در جهت پیوند عمیق‌تر میان آموزش ریاضیات، بهینه‌سازی عددی، و روش‌های نوین یادگیری ماشین باشد.

مراجع

- [۱] محمود امین طوسی، کاربرد بسط تیلور در کاهش حجم شبکه‌های عصبی پیچشی برای طبقه‌بندی نقاشی‌های سبک امپرسیونیسم و مینیاتور، نشریه ریاضی و جامعه ۵ (۱۳۹۹)، شماره ۱، صص. ۱-۱۶.
- [۲] محمود امین طوسی، انتقال سبک برای افزایش داده‌های آموزشی شبکه‌های کانولوشنی در شناسایی شعله آتش، هوش محاسباتی در مهندسی برق ۱۳ (۱۴۰۱)، شماره ۴، صص. ۹۷-۱۱۴.
- [۳] محمود امین طوسی، تمام متصل به تمام پیچشی: پلی به گذشته، رایانش نرم و فناوری اطلاعات ۱۱ (۱۴۰۱)، شماره ۱، صص. ۶۰-۷۲.

[4] A. Leon, A. Gatys, S. Ecker, and M. Bethge, *Image style transfer using convolutional neural networks*, 2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2016, 2414-2423.

- [5] Xun Huang and Serge Belongie, *Arbitrary style transfer in real-time with adaptive instance normalization*, Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV), 2017, 1510–1519.
- [6] Yongcheng Jing, Yezhou Yang, Zunlei Feng, Jingwen Ye, Yizhou Yu, and Mingli Song, *Neural Style Transfer: A Review*, IEEE Transactions on Visualization & Computer Graphics **26** (2020), no. 11, 3365–3385.
- [7] Yujun Jing, Yezhou Yang, Zunlei Feng, Jingdong Ye, Yingyu Yu, and Mingli Song, *Neural style transfer: A review*, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics **26** (2020), no. 11, 3365–3385.
- [8] Alex Krizhevsky, Ilya Sutskever, and Geoffrey E Hinton, *Imagenet classification with deep convolutional neural networks*, Advances in Neural Information Processing Systems 25 (F. Pereira, C. J. C. Burges, L. Bottou, and K. Q. Weinberger, eds.), Curran Associates, Inc., 2012, 1097–1105.
- [9] Reiichiro Nakano, *Neural painters: A learned differentiable constraint for generating brushstroke paintings*, arXiv preprint arXiv:1904.08410 (2019), Available at <https://arxiv.org/abs/1904.08410>.
- [10] Karen Simonyan and Andrew Zisserman, *Very deep convolutional networks for large-scale image recognition*, International Conference on Learning Representations, 2015.
- [11] Ning Xie, Hirotaka Hachiya, and Masashi Sugiyama, *Artist agent: A reinforcement learning approach to automatic stroke generation in oriental ink painting*, IEICE Transactions on Information and Systems **96** (2013), no. 5, 1134–1144.
- [12] Zhengxia Zou, Tianyang Shi, Shuang Qiu, Yi Yuan, and Zhenwei Shi, *Stylized Neural Painting*, 2021 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) (Los Alamitos, CA, USA), IEEE Computer Society, June 2021, 15684–15693.



AUTOMATIC DIFFERENTIATION AS A UNIFYING FRAMEWORK FOR A BROAD CLASS OF OPTIMIZATION PROBLEMS

MAHMOOD AMINTOOSI

Computer Science Dept. Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad
m.amintoosi@um.ac.ir

Abstract.

Automatic differentiation is a fundamental tool in gradient-based methods for machine learning, enabling efficient and accurate derivative computation for complex functions. This paper revisits classical gradient descent within automatic differentiation, illustrating it through increasingly intricate examples. Optimization problems are formulated as computable objective functions, even when lacking a closed-form analytical expression in classical mathematics. Gradients are automatically computed, and gradient descent is applied without conceptual modification. A central insight is that heterogeneous problems can be unified under a single computational framework via appropriate objective formulation. Four examples of increasing complexity are presented: linear regression as a familiar baseline, then cases where classical mathematics lacks explicit formulations yet become tractable through automatic differentiation. The goal is an accessible pedagogical exposition showing how automatic differentiation bridges classical numerical optimization and modern machine learning, making these concepts accessible for students in mathematics and computer science.

2020 Mathematics Subject Classification. 68T07, 68U10, 68U10, 68T45

Keywords. Automatic differentiation, Gradient descent, Optimization in machine learning, Objective function, Numerical optimization

Date: Received 23-01-2026 Revised 12-02-2026 Accepted 21-06-2026 Available Online 21-06-2026

©Ferdowsi University of Mashhad.



تفسیرهای اقتصادی تحلیل پوششی داده‌ها

حسین عزیزی*

گروه ریاضی کاربردی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

hossein.azizi@iau.ac.ir

چکیده. پژوهش در زمینه‌ی کارایی تولیدی در سطح بنگاه طی چند دهه‌ی اخیر به یکی از حوزه‌های مهم و فعال تحقیقاتی تبدیل شده است؛ حوزه‌ای که هم در پژوهش عملیاتی، هم در علم مدیریت و هم در اقتصاد جایگاه ویژه‌ای یافته است. در این مقاله، دو تعریف ظاهراً متفاوت از کارایی مورد بررسی قرار می‌گیرند، اما نشان داده می‌شود که زمانی که هر دو روش برآورد بر اساس حل مسائل برنامه‌ریزی خطی انجام شوند، این دو تعریف در واقع معادل و یکسان هستند. هدف این مقاله ارائه‌ی مفاهیم بنیادی تحلیل کارایی با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) به‌عنوان ابزاری برای پژوهشگرانی است که با تحلیل کارایی و روش DEA آشنایی چندانی ندارند. همچنین، مفهوم قیمت‌های سایه با دقت و توجه ویژه مورد بحث قرار گرفته است.

این مقاله ترجمه‌ی مقاله‌ی زیر می‌باشد:

F. R. Førsund, Economic interpretations of DEA, Socio-Econ. Plann. Sci. **61** (2018), 9–15.

2010 Mathematics Subject Classification. 90B50, 90C05.

واژگان کلیدی. اندازه‌های کارایی، تحلیل پوششی داده‌ها، برنامه‌ریزی خطی، قیمت‌های سایه .
تاریخ: دریافت ۱۴۰۴/۰۹/۰۵ بازنگری ۱۴۰۴/۱۱/۲۴ پذیرش ۱۴۰۵/۰۱/۲۴ انتشار برخط ۱۴۰۵/۰۳/۳۱
نحوه ارجاع به این مقاله: ح. عزیزی، تفسیرهای اقتصادی تحلیل پوششی داده‌ها، به سوی علوم ریاضی، ۶ (۱۴۰۵)، شماره ۱، ۳۱-۱۵.

© دانشگاه فردوسی مشهد.

۱. مقدمه

اندازه‌گیری کارایی تولیدی طی چند دهه‌ی اخیر به تدریج توسعه یافته و به یکی از حوزه‌های پژوهشی مهم در رشته‌های اقتصاد، علم مدیریت و پژوهش عملیاتی تبدیل شده است. دو اثر اولیه در این زمینه متعلق به فارل^۱ [۸] و چارنز^۲ و همکاران [۴] هستند. اگرچه مقاله‌ی دوم از تعریف کارایی ارائه شده در مقاله‌ی اول بهره می‌گیرد، اما رویکرد این دو اثر در نحوه‌ی تدوین و محاسبه‌ی اندازه‌های کارایی با یکدیگر متفاوت است. این تفاوت رویکردها تأثیر قابل توجهی بر مسیر تکامل این حوزه‌ی پژوهشی در اقتصاد، علم مدیریت و پژوهش عملیاتی داشته است، چراکه پژوهشگرانی با پیش‌زمینه‌ی علمی اخیر، غالباً سهم و اهمیت کار فارل [۸] را نادیده گرفته‌اند. هدف این مقاله، بررسی برخی از مسائل بنیادی در ادبیات مربوط به کارایی است، با تمرکز ویژه بر تفاوت‌های میان تفسیرهای اقتصادی و صورت‌بندی‌های مبتنی بر پژوهش عملیاتی در زمینه‌ی کارایی. از این رو، این مقاله می‌تواند به‌ویژه برای پژوهشگرانی از رشته‌هایی غیر از اقتصاد مفید واقع شود. علاوه بر این، مقاله می‌تواند به‌عنوان مقدمه‌ای بر تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)^۳ — اصطلاحی که نخستین بار در منبع [۴] ابداع شد — مورد استفاده قرار گیرد. در این مقاله، ضمن روشن ساختن موانع و چالش‌های بالقوه در تحلیل‌های کارایی، مبانی نظری تحلیل کارایی با استفاده از DEA به‌عنوان ابزاری برای پژوهشگرانی که آشنایی چندانی با تحلیل کارایی و روش DEA ندارند، تشریح می‌شود. فرض بر این است که خواننده با مفاهیم پایه‌ای برنامه‌ریزی (خطی) آشنایی دارد.

روند این مقاله به شرح زیر است: در بخش ۲، تعریف‌های اندازه‌های کارایی در دو مقاله‌ی اولیه‌ی فارل [۸] و چارنز و همکاران [۴] مرور و به تفاوت رویکردها اشاره شده است. بخش ۳ به بررسی تفسیر قیمت‌های سایه (متغیرهای دوگان یا وزن‌ها) در مسائل DEA که به‌صورت مسائل برنامه‌ریزی خطی تنظیم می‌شوند، می‌پردازد.^۴ بخش ۴ مرور کوتاهی بر دو پیشرفت مهم مرتبط با پیامدهای سیاستی ارائه می‌دهد. در بخش ۵، نتیجه‌گیری‌ها مطرح می‌شوند.

۲. تعریف‌های اندازه‌ی کارایی

۱.۲. مقدمه. تعریف بنیادین کارایی ظاهراً در دو مقاله‌ی اولیه متفاوت است؛ فارل [۸] تعریف خود را بر پایه‌ی مقیاس‌گذاری تناسبی لازم برای اینکه مشاهدات یک واحد ناکارا بر روی یک تابع تولید کارا (که بعدها «تابع مرز» نامیده شد) منتقل شوند قرار می‌دهد، و چارنز و همکاران [۴] تعریف خود را بر پایه‌ی شاخصی از خروجی‌های وزنی نسبت به ورودی‌های وزنی قرار می‌دهند که این نسبت را محدود می‌کنند تا کمتر یا مساوی نسبت مربوط به کاراترین واحد (نرمال شده برابر ۱) باشد.

برای انجام یک مطالعه درباره‌ی کارایی، سه عنصر باید مهیا باشند:

(i) تعریف اندازه‌های کارایی

(ii) روش‌های محاسبه‌ی اندازه‌های کارایی

(iii) داده‌های مرتبط درباره‌ی ورودی‌ها و خروجی‌های فعالیتی که می‌خواهیم کارایی آن را اندازه‌گیری کنیم.

فارل [۸] و چارنز و همکاران [۴] هم تعریف‌ها و هم روش‌ها را ارائه دادند. با این حال، زمانی که فارل در پی بحث مقاله‌اش در نشست انجمن سلطنتی آمار در ۱۹۵۶ (رجوع شود به [۸، ص. ۲۹۰]) یادداشت کرد که برنامه‌ریزی خطی تازه توسعه یافته می‌تواند

¹Farrell.

²Charnes.

³Data Envelopment Analysis (DEA).

^۴بخش‌های ۲ و ۳ همچنین از بخش‌هایی از اثر فورسوند [۱۴] اقتباس شده‌اند.

به‌کار گرفته شود، کاربرد ارائه‌شده در فارل و فیلدهاوس^۵ [۹] صرفاً برای پوشش حالت تک‌خروجی و بازدهی ثابت نسبت به مقیاس^۶ طراحی شده بود. چارنز و همکاران [۴] برنامه‌ریزی خطی را برای خروجی‌های چندگانه تعمیم دادند و از پیوند میان مسائل دوگان و اولیه استفاده کردند. این صورت‌بندی‌ها هنوز مورد استفاده‌اند و شاید توضیح دهد چرا این رویکرد بیشتر توسط پژوهشگرانی با پیش‌زمینه‌ی علم مدیریت و پژوهش عملیاتی دنبال شده است.

نیاز به داده‌های مرتبط در هر دو مقاله‌ی اولیه مورد تأکید قرار گرفت. نمایش مدل از جهان واقعی همواره باید یک ساده‌سازی باشد. از منظر روش‌شناختی بین تمرکز بر مجموعه‌ی محدودی از متغیرها و درجات آزادی یک مصالحه وجود دارد. کافی است گفته شود که انتخاب ثمربخش متغیرها بستگی به آگاهی از فعالیت‌های موردنظر دارد، همان‌گونه که توان استخراج نتایج مفید برای سیاست‌گذاری عملی نیز وابسته به آن است.

باید توجه داشت که از منظر نظری و روش‌شناختی تعیین علل تفاوت‌های کارایی میان واحدهای مورد تحلیل بسیار دشوار بوده است. بدون دانستن این علل، دشوار است که درباره‌ی سیاست‌هایی برای بهبود کارایی توصیه داد. با این حال، این مسأله خارج از محدوده‌ی اصلی مقاله است (برای بحث بیشتر رجوع کنید به فورسوند^۷ [۱۳])؛ ولی دو پیشرفت روش‌شناختی اخیر که می‌توانند فهم ما را بهبود بخشند، به‌اختصار در بخش ۴ مطرح خواهند شد.

۲.۲. تعریف‌های فارل از اندازه‌های کارایی. فارل [۸، ص. ۲۵۳] تعریف‌های رسمی از اندازه‌های کارایی ارائه نکرد، احتمالاً به این دلیل که می‌خواست بیان مطلب را ساده نگه دارد تا «برای طیف وسیعی از آمارگران اقتصادی، بازرگانان و کارمندان دولت — بسیاری از آنان که دانش اندکی از نظریه‌ی اقتصادی یا ریاضیات دارند — قابل فهم باشد». باین‌حال، نمودارهای او که به‌طور گسترده بازتولید شده‌اند، تعریف‌های کارایی او را به‌خوبی منتقل می‌کنند. شکل اصلی او، «نمودار ۱»، در شکل ۱ بازتولید شده است، اما برچسب‌های محورهای آن به نمادگذاری استاندارد ورودی تقسیم بر خروجی تغییر یافته‌اند.^۸

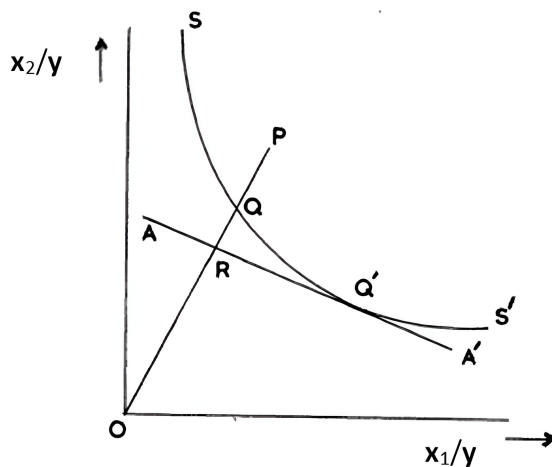


DIAGRAM 1.

شکل ۱: تصویر اصلی فارل [۸] برای اندازه‌های کارایی.

^۵Fieldhouse.

^۶Constant returns to scale.

^۷Førsund.

^۸در فارل [۸] از نمادهای x و y برای ضرایب ورودی استفاده شده است.

این تصویر بر پایه‌ی یک خروجی و دو ورودی بنا شده است. منحنی SS' ایزوکانت^۹ واحد تابع تولید کارا (یا مرزی) را نشان می‌دهد که فرض شده تحت بازدهی ثابت نسبت به مقیاس قرار دارد.^{۱۰} تمام اطلاعات فنی درباره‌ی تابع تولید در این حالت در ایزوکانت واحد در فضای ضرایب ورودی خلاصه می‌شود. واحد مورد مطالعه در نقطه‌ی P قرار دارد. کارایی فنی سپس به‌عنوان فاصله‌ی نسبی تا مرز تعریف می‌شود، در حالی که خروجی ثابت نگه داشته می‌شود اما استفاده‌ی ورودی‌ها به‌صورت متناسب کاهش می‌یابد تا به نقطه‌ی Q روی مرز برسیم؛ یعنی نسبت OQ/OP .

دانش درباره‌ی فناوری مرزی به دو روش قابل‌دستیابی است:

- مبتنی بر اطلاعات مهندسی درباره‌ی فعالیت تولیدی مربوطه، یا
- مبتنی بر مشاهداتی بهترین عملکرد موجود.

در کاربردهای تجربی معمولاً رویکرد دوم دنبال می‌شود.

اندازه‌های کارایی ورودی‌محور و خروجی‌محور فارل را می‌توان، در حالتی با چندین ورودی و خروجی، با استفاده از تابع تبدیل استاندارد بین ورودی‌ها و خروجی‌ها در اقتصاد تعمیم داد:

$$F(Y, X) \quad (F'_Y > 0, F'_X < 0), \quad (۱.۲)$$

که در آن X یک بردار ورودی و Y یک بردار خروجی است. می‌توانیم عبارت $F(Y, X) \leq 0$ را به‌عنوان نمایش عمومی امکانات تولید به‌صورت مجموعه‌ی زیر به‌کار ببریم:

$$T = \{(Y, X) : Y \geq 0 \text{ can be produced by } X \geq 0\}. \quad (۲.۲)$$

مرز این مجموعه متناظر با تابع تولید مرزی است، همان‌گونه که منحنی SS' در شکل ۱ نشان می‌دهد. یک بیان دیگر از مجموعه با استفاده از تابع تبدیل چنین است:

$$T = \{(Y, X) : F(Y, X) \leq 0, Y \geq 0, X \geq 0\}. \quad (۳.۲)$$

تساوی در رابطه‌ی تبدیل $F(Y, X) = 0$ یعنی روی مرز مجموعه هستیم، یعنی روی تابع مرزی؛ درحالی‌که نامساوی اکید به معنای وجود یک واحد ناکارا است. برای واحد j از میان n واحد، تعریف رسمی کارایی فنی چنین است:

$$E_{1j} = \text{Min}_{\varphi_j} \{\varphi_j : F(Y_j, \varphi_j X_j) = 0\}, \quad E_{1j} \in (0, 1], \quad j = 1, \dots, n. \quad (۴.۲)$$

فارل برای این اندازه‌ی کارایی فنی ورودی‌محور از نماد E_1 استفاده کرد.^{۱۱} فرض می‌شود که یک فناوری مرزی مشترک برای همه‌ی واحدها وجود دارد.

^۹Isoquant.

^{۱۰}بازدهی ثابت نسبت به مقیاس بدان معناست که اگر همه‌ی ورودی‌ها به‌صورت متناسبی و با همان ضریب افزایش یابند، خروجی(ها) نیز به همان نسبت افزایش خواهند یافت.

^{۱۱}فارل [۸، ص. ۲۵۹] از نمادهای با حروف کوچک e_1 و e_2 استفاده کرد، اما در فارل و فیلدهاوس [۹، ص. ۲۵۸] برای اندازه‌ی کارایی ورودی‌محور به نمادهای حرف بزرگ تغییر داد.

فارل همچنین یک اندازه‌ی کارایی فنی خروجی محور را مطرح کرد که به عنوان مقیاس‌گذاری خروجی‌ها با ثابت نگه داشتن ورودی‌ها تعریف می‌شود. او همچنین می‌خواست این اندازه، یعنی E_2 ، بین 0 و 1 باشد:

$$1/E_{2j} = \max_{\theta_j} \{\theta_j : F(\theta Y_j, X_j) = 0\}, \quad E_{2j} \in (0, 1], \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.2)$$

فارل برای اندازه‌ی خروجی محور، نمودار جداگانه‌ای ارائه نکرد، اما در حالت بازدهی ثابت نسبت به مقیاس این لازم نبود، زیرا همان‌طور که فارل اشاره کرد، این دو اندازه یکسان‌اند. نقطه‌ی P در نمودار ۱ او به نقطه‌ی مرزی Q بر روی SS' منتقل می‌شود، با افزایش خروجی برای مجموعه ورودی‌های داده‌شده، و SS' اکنون ایزوکانتی را نشان می‌دهد که خروجی قابل حصول روی مرز را مشخص می‌کند.

اندازه‌های کارایی فارل با مفهوم تابع فاصله که در شپرد^{۱۲} [۱۷، ۱۸] معرفی شد مطابقت دارند. تابع فاصله‌ی ورودی شپرد معکوس اندازه‌ی کارایی ورودی محور فارل است، و تابع فاصله‌ی خروجی شپرد با اندازه کارایی خروجی محور فارل یکسان است. خط AA' در شکل ۱ یک خط هزینه‌ی ثابت^{۱۳} است با شیبی برابر نسبت منفی قیمت ورودی محور عمودی به قیمت ورودی محور افقی. این خط در نقطه‌ی Q' با ایزوکانت واحد مماس می‌شود. در این حالت می‌توان اندازه‌هایی مبتنی بر هزینه تعریف کرد. کارایی فنی E_1 را می‌توان نسبت هزینه‌ها در نقطه‌ی مرزی Q به هزینه‌های مشاهده‌شده سنجید؛ یعنی دوباره OQ/OP ، با ثابت نگه داشتن سطح خروجی و قیمت‌های ورودی. فارل یک اندازه‌ی کارایی کلی (OE) معرفی کرد که به صورت OR/OP اندازه‌گیری می‌شود، و یک اندازه‌ی کارایی تخصیصی (AE) یا کارایی قیمتی که به صورت OQ/OR تعریف می‌شود. اندازه‌ی اخیر نشان می‌دهد که کاهش نسبی هزینه در هنگام حرکت از نقطه‌ی مرزی به نقطه‌ای که هزینه‌ی ورودی‌ها برای خروجی داده‌شده حداقل می‌شود چقدر است. روشن است که کارایی کلی به صورت ضربی به کارایی تخصیصی تجزیه می‌شود:

$$OE = OR/OP = OQ/OP \times OR/OQ = E_1 \times AE. \quad (6.2)$$

سه مفهوم هزینه که برای پیوند دادن اندازه‌ها به وضعیت عمومی با چندین خروجی و m ورودی و یک رابطه‌ی تبدیل تابع تولید مورد نیاز است، عبارتند از:

$$C_j^0 = \sum_{i=1}^m q_i x_{ij}^0, \quad (7.2)$$

$$C_j^Q = \sum_{i=1}^m q_i \varphi_j x_{ij}^0, \quad (8.2)$$

$$C_j^* = \min \sum_{i=1}^m q_i x_{ij} \quad \text{s.t.} \quad F(Y_j, X_j) = 0, \quad Y_j \geq Y_j^0. \quad (9.2)$$

در اینجا، C_j^0 هزینه‌ی مشاهده‌شده‌ی ورودی‌ها است (نقطه‌ی P در شکل ۱)، که در آن q_i قیمت ورودی i و x_{ij}^0 مقدار مشاهده‌شده‌ی ورودی i برای واحد j است. C_j^Q هزینه‌ی ورودی‌ها در نقطه‌ی مرزی Q است، با تعدیل ورودی‌ها بر اساس نمره‌ی کارایی θ_j . C_j^* هزینه‌ی کمینه‌سازی‌شده در نقطه‌ی Q' است که خروجی حداقل برابر خروجی مشاهده‌شده باشد. کارایی ورودی محور فارل به صورت $E_1 = C_j^Q/C_j^0$ ، و کارایی تخصیصی به صورت $AE = C_j^*/C_j^Q$ ، و کارایی کلی به صورت $OE = C_j^*/C_j^0$ تعریف می‌شود. واضح است که تجزیه‌ی ضربی مشابه قبل برقرار است.

¹²Shephard.

¹³Isocost.

توجه کنید که این تحلیل‌گر است که رفتار اقتصادی حداقل‌سازی هزینه را وارد مدل می‌کند، نه الزاماً واحدهای تحت بررسی. بنابراین، هزینه بهینه C_j^* فقط یک معیار هنجاری است و ممکن است رفتار هیچ واحد مشاهده‌شده‌ای را نشان ندهد. این نکته در ادبیات به راحتی بد تعبیر می‌شود: این تحلیل‌گر است که یک واحد مصنوعی معرفی می‌کند که فناوری مرزی را رعایت می‌کند و هیچ ناکارایی فنی ندارد. نقطه‌ی Q' در شکل ۱ یک معیار فرضی است.

فارل [۸، صص. ۲۶۰-۲۶۱] استدلال‌هایی درباره‌ی ضعف‌های کارایی تخصیصی یا قیمتی مطرح می‌کند و توصیه می‌کند تمرکز بر کارایی فنی باشد. نگرانی‌های او شامل این است که کارایی قیمتی نسبت به ورود مشاهدات جدید حساس است (به واسطه‌ی تأثیر بر شکل ایزوکانت‌ها یا خطاهای اندازه‌گیری قیمت‌ها) و اینکه ترکیب فعلی ورودی‌ها ممکن است مبتنی بر قیمت‌های گذشته یا پیش‌بینی‌شده باشد نه قیمت‌های جاری، و بنابراین تنها در یک وضعیت کاملاً ایستا یک اندازه‌ی مناسب ارائه می‌دهد.

۳.۲. روش‌های برآورد. دانش مربوط به یک فناوری مرزی را می‌توان به دو روش به دست آورد: یا بر اساس اطلاعات مهندسی درباره‌ی فعالیت تولیدی مورد نظر، یا بر اساس بهترین عملکرد مشاهده‌شده. روش دوم توسط فارل [۸] توصیه شد و معمولاً در مطالعات تجربی به کار می‌رود.

فارل [۸] روشی برای برآورد یک مرز بهترین عملکرد پیشنهاد کرد که در آن داده‌ها با استفاده از یک تابع خطی قطعه‌ای ناپارامتری پوشانده می‌شوند؛ تابعی که ایزوکانت‌های محدب با شیب منفی و بازدهی ثابت نسبت به مقیاس را تحمیل می‌کند. او توضیح می‌دهد که این شیوه‌ی برآورد تابع تولید ممکن است بهترین روش نباشد اگر صرفاً هدف، برآورد مرز باشد، اما «این روش فقط از این جهت انتخاب شد که بهترین اندازه‌ی کارایی فنی را ارائه می‌دهد» [۸، صص. ۲۶۲].^{۱۴} روش برآورد او، در «نمودار ۲» اصلی، در شکل ۲ نشان داده شده است؛ جایی که ضرایب ورودی همانند نمودار ۱ روی محورها اندازه‌گیری می‌شوند. تابع تولید مرزی تحت بازدهی ثابت نسبت به مقیاس با قطعات خطی که به وسیله‌ی مشاهدات بهترین عملکرد ایجاد شده‌اند، برآورد می‌شود. برای اینکه بخش‌های انتهایی ایزوکانت واحد موازی با محورها باقی بمانند و همان نوع ایزوکانت‌های محدبی که مدنظر داشت حاصل شوند، او دو واحد مصنوعی با مقادیر $(0, \infty)$ روی محور افقی و $(\infty, 0)$ روی محور عمودی برای ضرایب ورودی وارد کرد تا بخش‌های انتهایی SS' در شکل ۲ با محورها موازی شوند (در کاربردهای عملی، یک عدد بسیار بزرگ به جای ∞ کافی است). فارل [۸] رویکرد خود را تنها در حالت «یک خروجی» به کار برد. روش او برای برآورد نمرات کارایی بر پایه‌ی حل یک دستگاه معادلات خطی بود. در این روش بیان می‌شود که مشاهدات باید در سمت راست و بالا در شکل ۲ قرار گیرند یا روی قطعات مرزی؛ هیچ نقطه‌ای نمی‌تواند به مبدأ نزدیک‌تر باشد. در بحث مقاله‌ی فارل [۸] در نشست «انجمن سلطنتی آمار» در سال ۱۹۵۶، هافمن^{۱۵} [۸، صص. ۲۹۰] مداخله‌ی مهمی انجام داد و اشاره کرد که برنامه‌ریزی خطی—که به تازگی توسعه یافته بود—می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. در فارل و فیلدهاوس [۹] برای نخستین بار برنامه‌ریزی خطی برای مسأله‌ی کارایی به کار گرفته شد، با این حال هنوز به بازدهی ثابت نسبت به مقیاس و یک خروجی محدود بود. فارل و فیلدهاوس [۹] تعمیم‌هایی برای بازدهی متغیر نسبت به مقیاس و چندین خروجی پیشنهاد دادند، اما در انجام کامل آن موفق نبودند [۱۲]. یک گروه از اقتصاددانان کشاورزی در برکلی^{۱۶} روش فارل و فیلدهاوس را با موفقیت بیشتری صورت‌بندی کردند و برنامه‌ریزی خطی را به حالت چندخروجی بسط دادند [۲، ۳]. (برای منابع بیشتر درباره‌ی کارهای گروه برکلی، بنگرید [۱۰، ۱۱]).

^{۱۴} سپس او به پیشنهاد روش‌های آماری برای برآورد توابع مرزی پارامتریک می‌پردازد که در سه دهه‌ی اول پس از انتشار اثر بنیادین او در ادبیات اقتصادی دنبال شدند [۱۰، ۱۱].

^{۱۵}Hoffman.

^{۱۶}Berkeley.

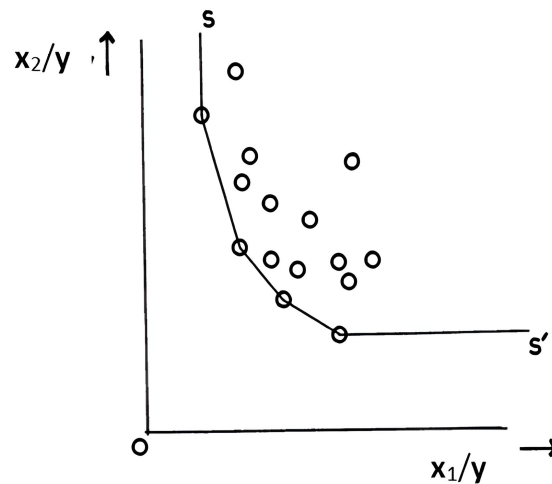


DIAGRAM 2.

شکل ۲: تصویر اصلی فارل [۸] از روش برآورد.

۴.۲. صورت نسبت محور اندازه‌ی کارایی. چارنز و همکاران [۴، ص. ۴۳] بحث خود را با بیان این موضوع آغاز می‌کنند که قصد دارند ایده‌های خود درباره‌ی اندازه‌گیری کارایی را با پیشرفت‌های رشته‌ی اقتصاد مرتبط سازند، بدین صورت که «به توابع تولید و مفاهیم مرتبط ...» ارجاع دهند. باین حال، آن‌ها همچنین می‌خواستند ایده‌های خود را به مهندسی نیز مرتبط کنند، و در واقع نقطه‌ی آغاز تعریف کارایی آن‌ها همین است؛ تعریفی که (به ظاهر) بر پایه‌ی چگونگی تعریف کارایی در آن حوزه استوار است. نقل قول کلیدی از ادبیات مهندسی چنین است: «کارایی نسبت مقدار واقعی گرمای آزاد شده در یک دستگاه به بیشترین مقدار گرمایی است که می‌توانست توسط سوخت آزاد شود». (منبع این نقل قول دانشنامه‌ی آمریکانا ص. ۴۳ است.) این نقل قول—که بیشتر شبیه تعریفی برای کارایی انرژی است تا یک تعریف عمومی از کارایی—به معرفی رویکرد نسبت محور می‌انجامد، یعنی بیشینه‌سازی نسبت خروجی‌های وزنی به ورودی‌های وزنی، مشروط بر اینکه این نسبت برای همه‌ی واحدها کمتر یا مساوی یک باشد؛ جایی که وزن‌ها متغیرهای درون‌زا هستند که باید تعیین شوند. این تعریف نسبت محور تنها در حالت بازدهی ثابت نسبت به مقیاس معتبر است. تعریف کارایی برای یک واحد j_0 (با استفاده از نمادهای اصلی در چارنز و همکاران [۴]) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } h_{j_0} &= \frac{\sum_{r=1}^s u_{rj_0} y_{rj_0}}{\sum_{i=1}^m v_{ij_0} x_{ij_0}} \\
 \text{s.t. } \frac{\sum_{r=1}^s u_{rj_0} y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ij_0} x_{ij}} &\leq 1, \quad j = 1, \dots, n \\
 u_{rj_0}, v_{ij_0} &\geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{۱۰.۲}$$

در رابطه‌ی (۱۰.۲)، h_{j0} اندازه‌ی کارایی است، x و y به ترتیب بردارهای خروجی و ورودی هستند، با s خروجی و m ورودی، تعداد واحدها n است، و u_{rj0} و v_{ij0} به ترتیب وزن‌های مرتبط با خروجی‌ها و ورودی‌ها هستند.^{۱۷}

نخستین عبارت نسبت‌محور در (۱۰.۲) که کارایی را تعریف می‌کند، همان چیزی است که در اقتصاد بهره‌وری نامیده می‌شود. ساخت شاخص‌های بهره‌وری در اقتصاد یک مسأله‌ی شناخته‌شده در حوزه‌ی تجميع است. شاخص بهره‌وری ارتباط نزدیکی با شاخص کارایی دارد. اگر شاخص بهره‌وری یک واحد با شاخص بهره‌وری بهره‌ورترین واحد مقایسه شود و از تقسیم این دو، نسبتی تشکیل گردد، این نسبت یک شاخص کارایی است که واحد بهره‌ورتر به عنوان الگو عمل می‌کند. این دقیقاً همان چیزی است که قیده‌ای اعمال شده بر شاخص بهره‌وری در تعریف چارنز و همکاران [۴] تحمیل می‌کنند.

۳. تفسیر قیمت‌های سایه

همان‌طور که در بخش ۱ اشاره شد، اصطلاح «تحلیل پوششی داده‌ها» (DEA) نخستین بار در چارنز و همکاران [۴] معرفی شد و اکنون معرف مدلی است که برای برآورد اندازه‌های کارایی مانند روابط (۴.۲) و (۵.۲) به کار می‌رود. روش استاندارد به دست آوردن نمرات کارایی، استفاده از برنامه‌ریزی خطی است.

۱.۳. مدل غیرپارامتری کارایی DEA. بنکر^{۱۸} و همکاران [۱] مدل‌های بازدهی ثابت نسبت به مقیاس فارل و فیلدهوس [۹] و چارنز و همکاران [۴] را با حفظ قابلیت حل شدن از طریق برنامه‌ریزی خطی، به بازدهی متغیر نسبت به مقیاس تعمیم دادند. مجموعه‌ی امکان تولید در مدل غیرپارامتری کارایی DEA می‌تواند به صورت زیر نمایش داده شود:

$$T = \left\{ Y, X : Y \leq \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j, X \geq \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n \right\}. \quad (۱.۳)$$

برای این رابطه، فرض می‌شود که اصول تحدب^{۱۹} و امکان‌پذیری آزاد^{۲۰} که در بنکر و همکاران [۱] بیان شده‌اند برقرار باشد. ضرایب اسکالر λ_j در ادبیات DEA «وزن‌های شدت» نامیده می‌شوند. تمام مقادیر باید نامنفی باشند و حداقل یک خروجی، یک ورودی و یک وزن شدت باید به طور اکیداً مثبت باشد. اگر شرط مجموع وزن‌ها برابر ۱ حذف شود، آنگاه بازدهی ثابت نسبت به مقیاس برقرار می‌شود (در این حالت فرض مخروط بودن مجموعه‌ی T مطرح می‌شود).

مجموعه‌ی T یک مجموعه‌ی چندوجهی است که نقاط $(\sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j, \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j)$ تمام ترکیب‌های ممکن بر اساس n مشاهده را نمایش می‌دهند. نقاط رأس، نقاط کارا هستند که مرز مجموعه‌ی امکان تولید را تشکیل می‌دهند. وزن‌های λ_j باید

^{۱۷} در ادامه‌ی مقاله، برای جلوگیری از صفر شدن وزن‌ها، مجموع اسلک‌ها به تابع هدف مدل ضربی افزوده می‌شود، به طوری که این مجموع با معکوس یک عدد نامتناهی غیرارشمیدسی بسیار بزرگ M وزن‌دهی می‌گردد (نگاه کنید به استفاده‌ی فارل از نقاط مصنوعی صفر و بی‌نهایت که پیش‌تر اشاره شد). در مقاله‌ی چارنز و همکاران [۵] بیان شده است که در صورت دوگان، این افزوده شدن به این معناست که $\varepsilon = 1/M$ به عنوان کران پایین وزن‌ها در رابطه‌ی (۱۰.۲) استفاده می‌شود. با این حال، از آنجا که این مقدار می‌تواند به طور دلخواه به صفر نزدیک شود، در عمل ممکن است نرخ‌های اقتصادی را در صفر یا بی‌نهایت باقی بگذارد، و این ساختار امروزه در مطالعات کاربردی تقریباً دیگر استفاده نمی‌شود. در حال حاضر، مدل در دو مرحله حل می‌شود تا واحدهای کارا و ناکارا از هم تفکیک شوند [۶]. همچنین دلایل رسمی‌تری نیز برای عدم استفاده از مقادیر غیرارشمیدسی وجود دارد [۱۶].

^{۱۸}Banker.

^{۱۹}Convexity.

^{۲۰}Free disposability.

به‌گونه‌ای برآورد شوند که با اصل «نزدیک‌ترین مجموعه‌ی محدب پوشاننده‌ی داده‌ها» سازگار باشند. با به‌دست‌آوردن مقادیر بهینه‌ی این وزن‌ها، تخمینی از مجموعه‌ی امکان تولید و نیز مرز آن—که اغلب «تابع تولید مرزی» نامیده می‌شود—به‌دست می‌آید. هنگامی که برای برآورد مرز و اندازه‌های کارایی از برنامه‌ریزی خطی استفاده می‌کنیم، یک رابطه‌ی بنیادی میان جواب اولیه و جواب دوگان یک جواب بهینه وجود دارد. از منظر فنی می‌توان گفت که این‌که کارایی بر مبنای مدل اولیه تعریف شود یا مدل دوگان، تفاوتی ایجاد نمی‌کند. با این حال، نباید فراموش کرد که تعریف بنیادی یک اندازه‌ی کارایی در اقتصاد بر مفهوم تابع تولید مرزی استوار است و در فضای ورودی-خروجی صورت‌بندی می‌شود. بنابراین، دست‌کم برای اقتصاددانان، طبیعی است که مسأله‌ی موسوم به مسأله‌ی پوششی در تحقیق در عملیات را برای مدل اولیه، و مسأله‌ی صورت‌بندی‌شده در فضای قیمت‌های سایه را برای مدل دوگان (که در ادبیات تحقیق در عملیات «مسأله‌ی ضرایب» خوانده می‌شود) در نظر بگیرند.

امروزه رایج‌تر آن است که صورت‌بندی که داده‌ها را—مانند نمایش شکل ۲—پوشش می‌دهد، مسأله‌ی اولیه نامیده شود. مسأله‌ی دوگان از نظریه‌ی برنامه‌ریزی خطی نتیجه می‌شود. تفسیر متغیرهای دوگان (که همچنین «وزن‌ها»، «ضرایب»، یا «قیمت‌های سایه»—که در اقتصاد اصطلاح رایج‌تری است—نامیده می‌شوند) برای درک مدل کارایی DEA اهمیت کلیدی دارد. متأسفانه، چنین درکی چندان به‌صراحت در مقالات مربوط به DEA بیان نمی‌شود.

۲.۳. قیمت‌های سایه. اصطلاح قیمت‌های سایه در زمینه‌های مختلفی به‌کار می‌رود؛ با این حال، این مفهوم نباید با هزینه‌های فرصت اشتباه گرفته شود. به‌عنوان مثال، هنگام محاسبه‌ی هزینه‌ی اجتماعی یک ارتش مبتنی بر سربازی اجباری، مفهوم هزینه، قیمت سایه نیست؛ بلکه هزینه‌ی فرصت است، به این معنا که سرباز اگر شغل بازاری پذیر متناسب با مهارت‌هایش داشت، چه میزان درآمد می‌توانست کسب کند. در تحلیل کارایی، قیمت‌های سایه ارتباطی اکیداً وابسته به مسأله‌ی برنامه‌ریزی مورد استفاده برای محاسبه‌ی نمره‌های کارایی دارند. مفهوم فنی/ریاضی قیمت سایه از تکنیک لاگرانژ در حل مسائل بهینه‌سازی با قیدها ناشی می‌شود. مسأله‌ی استاندارد اولیه در ادبیات معاصر DEA که از مدل بنکر و همکاران [۱] و مجموعه‌ی T در رابطه‌ی (۱.۳) برای برآورد نمره‌های کارایی فنی فارل برای واحد j_0 استفاده می‌کند—در حالت بازدهی متغیر نسبت به مقیاس و خروجی‌محور—به صورت زیر است (با استفاده از برنامه‌ریزی خطی)^{۲۱}:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_{yj_0}} &= \max_{\lambda, \theta} \theta_{j_0} \\ \text{s.t.} \quad &\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \theta_{j_0} y_{rj_0}, \quad r = 1, \dots, s \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{ij_0}, \quad i = 1, \dots, m \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \theta_{j_0} \text{ sign free.} \end{aligned} \quad (2.3)$$

در اینجا مقیاس‌گذاری تناسبی (یا شعاعی) خروجی‌های فارل—مانند آنچه در رابطه‌ی (۵.۲) دیده می‌شود—برای تصویرکردن یک واحد ناکارا بر روی مرز استفاده شده است.

مسأله‌ی دوگان متناظر با (۲.۳) عبارت است از:

^{۲۱} در فورسوند [۱۴] از یک مدل ورودی‌محور استفاده شده است.

$$\begin{aligned}
\min \quad & \left(\sum_{i=1}^m v_{ij_0} x_{ij_0} + u_{j_0} \right) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_{rj_0} y_{rj_0} = 1 \\
& - \sum_{r=1}^s u_{rj_0} y_{rj} + \sum_{i=1}^m v_{ij_0} x_{ij} + u_{j_0} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \\
& v_{ij_0}, u_{rj_0} \geq 0, \quad u_{j_0} \text{ sign free}.
\end{aligned} \tag{۳.۳}$$

متغیرهای u_{j_0} ، u_{rj_0} و v_{ij_0} قیمت‌های سایه روی قیدهای (۲.۳) هستند—به ترتیب، قیدهای ورودی، قیدهای خروجی و قید تحدب. در DEA معمولاً این متغیرها را ضرایب یا وزن‌ها نیز می‌نامند. نتیجه‌ی بنیادی دوگانگی برای یک جواب بهینه‌ی یکتا بیان می‌کند:

$$\theta_{j_0} = \sum_{i=1}^m v_{ij_0} x_{ij_0} + u_{j_0}. \tag{۴.۳}$$

علاوه بر مجموع وزنی ورودی‌ها—که در واحدهای بدون بعدِ اندازه‌ی کارایی بیان می‌شود—قیمت سایه‌ی u_{j_0} روی قید تحدب در حالت بازدهی متغیر به مقیاس ظاهر می‌شود. تفسیر متغیرهای دوگان بر پایه‌ی صورت‌بندی تابع لاگرانژ برای مسأله‌ی اولیه صورت می‌گیرد. با تنظیم تابع لاگرانژ برای مسأله‌ی بهینه‌سازی با قیدهای (۲.۳) برای واحد j_0 داریم:

$$\begin{aligned}
L = & \theta_{j_0} - \sum_{r=1}^s u_{rj_0} \left(\theta_{j_0} y_{rj_0} - \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \right) \\
& - \sum_{i=1}^m v_{ij_0} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} - x_{ij_0} \right) - u_{j_0} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j - 1 \right).
\end{aligned} \tag{۵.۳}$$

شرایط لازم مرتبه‌ی اول برای وجود یک جواب عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} &= \sum_{r=1}^s u_{rj_0} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{ij_0} x_{ij} - u_{j_0} \leq 0 \quad (= 0 \text{ for } \lambda_j > 0), \quad j = 1, \dots, n, \\
\frac{\partial L}{\partial \theta_{j_0}} &= 1 - \sum_{r=1}^s u_{rj_0} y_{rj_0} = 0, \\
u_{rj_0} &\geq 0 \quad (= 0 \text{ for } \theta_{j_0} y_{rj_0} < \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}), \quad r = 1, \dots, s, \\
v_{ij_0} &\geq 0 \quad (= 0 \text{ for } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} < x_{ij_0}), \quad i = 1, \dots, m.
\end{aligned} \tag{۶.۳}$$

از شرط اول نتیجه می‌شود که وزن شدت λ_{j_0} برای واحد j_0 در صورتی که واحد ناکارا باشد (یعنی $\theta_{j_0} > 1$) برابر صفر خواهد بود. با استفاده از نتیجه‌ی دوگانگی—یعنی برابری مقادیر هدف در (۲.۳) و (۳.۳)—داریم:

$$\sum_{r=1}^s u_{rj_0} y_{rj} = 1 \leq \sum_{i=1}^m v_{ij_0} x_{ij} + u_{j_0} = \theta_{j_0} \quad (۷.۳)$$

که نشان می‌دهد شرط اول در (۶.۳) با نامساوی اکید برقرار است. شرط دوم با تساوی برقرار می‌شود، زیرا ضریب گسترش آزاد است. مقدار غیرمثبت برای ضریب گسترش پذیرفتنی نیست، زیرا فرض می‌کنیم حداقل یک ورودی و یک خروجی اکیداً مثبت‌اند و حداقل یک وزن شدت باید مثبت باشد. همچنین، نمره‌ی کارایی ($1/\theta_{j_0}$) نمی‌تواند در جواب بهینه از یک بیشتر شود؛ خروجی‌ها باید برای واحدهای ناکارا افزایش یابند و برای واحدهای کارا ثابت بمانند، زیرا ماهیت مسأله، بیشینه‌سازی است. از دو شرط آخر مکمل بودن، نتیجه می‌شود که قیمت سایه برای متغیرهایی که اسلک نامنفی دارند، صفر می‌شود. فرم دوگان در (۳.۳) نشان می‌دهد که چنین متغیرهایی تأثیر مستقیمی بر واحد j_0 مورد ارزیابی ندارند. اگر این واحد درون یک وجه^{۲۲} قرار داشته باشد، آن وجه از بُعد کامل برخوردار نخواهد بود.

اگر برای مسأله‌ی (۲.۳) یک جواب یکتا داشته باشیم، آنگاه می‌توان قیمت‌های سایه‌ی قیدهای ورودی و خروجی را با به‌کارگیری قضیه‌ی پوشش برای یک واحد ناکارا تفسیر کرد. درباره‌ی تغییر در یک متغیر برون‌زا، طبق این قضیه قیمت سایه روی قید مربوطه برای یک واحد ناکارا، اثر افزایش حاشیه‌ای آن متغیر را بر تابع هدف—معکوس نمره‌ی کارایی—اندازه‌گیری می‌کند. با این حال، می‌دانیم که معمولاً ممکن است جواب‌های متعددی وجود داشته باشد، به‌ویژه برای قیمت‌های سایه. بنابراین فرض می‌کنیم برای واحدهای ناکارا که نقطه‌ی تصویرشان روی مرز در درون نسبی یک وجه قرار دارد، برای متغیرهای درون‌زا جواب‌های یکتا داریم. از این رو، با در نظر گرفتن واحد j_0 و با فرض داشتن یک جواب بهینه برای مسأله‌ی (۲.۳)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{j_0}}{\partial x_{ij_0}} &= \frac{\partial L}{\partial x_{ij_0}} = v_{ij_0} (1 - \lambda_{j_0}) = v_{ij_0}, \quad i = 1, \dots, m, \\ \frac{\partial \theta_{j_0}}{\partial y_{rj_0}} &= \frac{\partial L}{\partial y_{rj_0}} = -u_{rj_0} (\theta_{j_0} - \lambda_{j_0}) = -u_{rj_0} \theta_{j_0}, \\ \Rightarrow \frac{\partial \theta_{j_0}}{\partial (\theta_{j_0} y_{rj_0})} &= -u_{rj_0}, \quad r = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (۸.۳)$$

در بررسی تغییر ورودی i برای واحد j_0 در خط اول رابطه‌ی (۸.۳) داریم $\lambda_{j_0} = 0$. زیرا این واحد ناکاراست؛ این نتیجه از اولین شرط لازم در (۶.۳) حاصل می‌شود. با افزایش ورودی واحد j_0 ، ضریب گسترش افزایش می‌یابد؛ یعنی ناکارایی بیشتر می‌شود (نمره‌ی کارایی کوچک‌تر می‌گردد). طبق تعریف اندازه‌ی کارایی خروجی‌محور، بردار ورودی واحد j_0 روی مرز قرار دارد. واحد اندازه‌گیری قیمت سایه‌ی ورودی، «واحد ضریب گسترش به ازای واحد اندازه‌گیری ورودی» است.

در تفسیر رابطه‌ی (۸.۳) برای خروجی، پیش از پیکان نتیجه‌گیری، قیمت سایه‌ی قید خروجی در ضریب گسترش ضرب شده است. اما چون ضریب گسترش مقدار بهینه‌ی خود را دارد و می‌توان آن را ثابت در نظر گرفت، می‌توان اثر تغییر در قید خروجی را با ارزیابی تغییر در مقدار $(\theta_{j_0} y_{rj_0})$ که روی مرز قرار دارد، بررسی کرد. ضریب گسترش زمانی کاهش می‌یابد که خروجی یک واحد ناکارا افزایش یابد؛ یعنی نمره‌ی کارایی افزایش می‌یابد (واحد کارا تر می‌شود).

برای یک واحد ناکارا، قیمت سایه روی قید خروجی را می‌توان به صورت «میزان کاهش ضریب گسترش بر اثر افزایش حاشیه‌ای متغیر خروجی مورد نظر، ارزیابی شده در یک نقطه‌ی مرزی» تفسیر کرد. واحد اندازه‌گیری قیمت سایه، «واحد ضریب گسترش (بی‌بعد) به ازای یک واحد اندازه‌گیری خروجی» است.

^{۲۲}Face.

در ادبیات DEA، حاصل ضرب قیمت سایه و یک ورودی، یعنی $v_{ij_0} x_{ij_0}$ ، «ورودی مجازی» نامیده می‌شود؛ و به‌طور مشابه حاصل ضرب قیمت سایه و یک خروجی، یعنی $u_{rj_0} y_{rj_0}$ ، «خروجی مجازی» نام دارد. همان‌گونه که از تابع هدف مسأله‌ی دوگان در رابطه‌ی (۳.۳) دیده می‌شود، ورودی مجازی فقط سهم متغیر مربوطه را در نمره‌ی کارایی جواب بهینه بیان می‌کند. با این حال طبق اولین قید مسأله‌ی دوگان در (۳.۳)، خروجی مجازی تنها سهم خود را در مقدار ۱ بیان می‌کند و بی‌بعد است. برای به‌دست آوردن سهم آن در نمره‌ی کارایی، باید متغیر دوگان را در نمره‌ی کارایی ضرب کرد، همان‌گونه که در عبارت پیش از پیکان نتیجه‌گیری در خط سوم رابطه‌ی (۸.۳) دیده می‌شود.

تفسیر قیمت‌های سایه به‌صورت مفاهیم مرسوم تابع تولید را می‌توان به‌طور مستقیم با استفاده از مسأله‌ی دوگان (۳.۳) ارائه داد. قید دوم در جواب بهینه برای واحد j_0 با تساوی برقرار خواهد بود و معادله‌ی ابرصفحه‌ی وجه متناظر را تشکیل می‌دهد (اگر وجه از بعد کامل $m + s - 1$ باشد به آن رویه^{۲۳} گفته می‌شود). اگر واحد j را یک واحد کارا فرض کنیم، با مشتق‌گیری از معادله‌ی اول زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} -\sum_{r=1}^s u_{rj_0} y_{rj} + \sum_{i=1}^m v_{ij_0} x_{ij} + u_{j_0} &= 0 \\ -u_{rj_0} dy_{rj} + v_{ij_0} dx_{ij} &= 0 \Rightarrow \frac{dy_{rj}}{dx_{ij}} = \frac{v_{ij_0}}{u_{rj_0}}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

این همان مفهوم اقتصادی بهره‌وری نهایی ورودی i برحسب خروجی از نوع r است که در نقطه‌ای بر روی وجهی ارزیابی شده است که تصویر واحد ناکارای j_0 روی آن قرار دارد. (این نتیجه در مرجع [۴، ص. ۴۴۰]، بیان شده است). با استفاده از نوع خروجی r' و ورودی i' نیز به‌طور مشابه عبارات زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} -u_{rj_0} dy_{rj} - u_{r'j_0} dy_{r'j} &= 0 \Rightarrow \frac{dy_{rj}}{dy_{r'j}} = -\frac{u_{r'j_0}}{u_{rj_0}}, \\ v_{ij_0} dx_{ij} + v_{i'j_0} dx_{i'j} &= 0 \Rightarrow \frac{dx_{ij}}{dx_{i'j}} = -\frac{v_{i'j_0}}{v_{ij_0}}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

عبارت اول نرخ تبدیل حاشیه‌ای بین خروجی r' و r است و عبارت دوم نرخ جانشینی حاشیه‌ای بین ورودی i' و i . صورت «چندرویه‌ای» تابع تولید مرزی بدین معناست که این سه مفهوم بنیادی اقتصادی بر روی یک وجه ثابت‌اند اما از وجهی به وجه دیگر تغییر می‌کنند.

می‌دانیم که نقاط رأس، واحدهای کارای رأسی (واحدهای کارا با اسلک صفر) هستند؛ بنابراین جواب قیمت‌های سایه برای این واحدها لزوماً یکتا نخواهد بود، زیرا این واحدها به بیش از یک وجه در سطح تابع تولید مرزی تعلق دارند. از آنجا که شرط صلاحیت قید^{۲۴} برای واحدهای رأس برقرار نیست، نمی‌توانیم از قضیه‌ی پوشش برای بررسی اثر تغییر داده‌ها بر چنین واحدهایی استفاده کنیم. در ادبیات DEA گاهی اوقات قیمت‌های سایه به‌معنای متغیرهای دوگان u و v با قیمت‌های بازار هم‌معنا گرفته شده‌اند؛ اما در این‌جا باید محتاط باشیم. اگر واحدهایی را که در درون مرز قرار دارند فرض کنیم که راهبردهای اقتصادی مانند حداقل‌سازی هزینه یا بیشینه‌سازی سود را دنبال می‌کنند، آنگاه نسبت‌های قیمت‌های بازار با نسبت‌های متغیرهای دوگان در روابط (۹.۳) و (۱۰.۳) متناظر خواهند بود—به‌طوری‌که قیمت بازار یک ورودی می‌تواند جایگزین متغیر دوگان متناظر قید ورودی و قیمت بازار یک خروجی می‌تواند جایگزین متغیر دوگان قید خروجی شود. اما توجه داشته باشید که بدون اطلاعات بیشتر، نمی‌توانیم یک تناظر

²³Facet.

²⁴Constraint qualification.

میان یک متغیر دوگان و یک قیمت برقرار کنیم. افزون بر این، نمی‌توان درباره‌ی سازگاری اقتصادی یک واحد ناکارا چیز چندانی گفت؛ اگر برای این واحد اهداف عقلانی حداقل‌سازی هزینه یا حداکثرسازی سود در نظر بگیریم، لازم است توضیحاتی ارائه شود تا بتوان چنین واحدی را ناکارا اندازه‌گیری کرد.

از روابط (۹.۳) و (۱۰.۳) نتیجه می‌شود که مفاهیم اقتصادی بهره‌وری نهایی و نرخ‌های تبدیل و جانشینی حاشیه‌ای هنگامی قابل تدوین نیستند که متغیرهای دوگان برای ورودی‌ها یا خروجی‌ها روی وجه مربوطه صفر باشند؛ در این حالت مقادیر صفر یا (بعلاوه/منهای) بی‌نهایت به دست می‌آید. همه‌ی مفاهیم اقتصادی تنها برای وجه‌هایی با بعد کامل دارای تفسیر اقتصادی معنادار هستند. افزون بر این، صفر بودن یک متغیر دوگان مربوط به یک خروجی در مسأله‌ی (۳.۳) به این معناست که آن متغیر در شرط جمع‌شدن تا یک، مشارکتی ندارد. صفر بودن یک متغیر دوگان مربوط به یک ورودی بدان معناست که آن ورودی به‌طور مستقیم در نمره‌ی کارایی مشارکت نمی‌کند (نقش‌ها برای مسأله‌ی ورودی‌محور معکوس خواهند شد؛ رجوع کنید به مرجع [۱۴]). شیوع مقادیر صفر برای متغیرهای دوگان منجر به توسعه‌ی رویکردهایی شده است که آن‌ها را مقید به مثبت بودن کنند. با این حال، این رویکرد ما را با مسأله‌ی تعیین جواب‌ها توسط تحلیل‌گر در صورت قیدهای الزام‌آور مواجه می‌سازد [۱۴].

۳.۳. محاسبه‌ی قیمت‌های سایه. در ادبیات کارایی، علاقه‌ای به محاسبه‌ی قیمت‌های سایه وجود دارد. مرور جامعی در ژو^{۲۵} و همکاران [۲۰] ارائه شده است. یکی از مقالات اولیه، مقاله‌ی فره^{۲۶} و همکاران [۷] است که از روابط موجود در (۱۳) بر روی یک تابع فاصله‌ی پارامتریک برآوردشده استفاده می‌کند. با این حال، رویه‌ی یافتن قیمت‌های سایه دارای چالش‌هایی است. همان‌طور که گفته شد، قیمت‌های سایه در یک نقطه‌ی مرزی ارزیابی می‌شوند. اما همان‌طور که در بخش ۲ بیان شد، در DEA هیچ فروضی در مورد رفتار اقتصادی واحدها مطرح نیست. بنابراین، نقطه‌ی تصویر یک واحد ناکارا و ارزیابی قیمت‌های سایه در آن نقطه توسط تحلیل‌گر انجام می‌شود، و طبق فرض، هیچ واحد مشاهده‌شده‌ای وجود ندارد که در حال انجام بهینه‌سازی باشد. واحدهایی که در نهایت کارا شناخته می‌شوند عمدتاً در نقاط رأس قرار دارند، اما همان‌طور که پیش‌تر ذکر شد قیمت‌های سایه در این نقاط یکتا نیستند. علاوه بر این، اگر مدیر یک واحد ناگهان به درکی تازه از مرز تولید و چگونگی دستیابی به یک نقطه‌ی واقع بر مرز برسد، آنگاه نقطه‌ی تصویر صرفاً یکی از بسیار نقاطی خواهد بود که مدیر ممکن است به‌واسطه‌ی این بینش‌های جدید بخواهد به آن‌ها حرکت کند. گاهی نقاط تصویر به‌عنوان هدف (توسط تحلیل‌گر) برای واحدها به‌کار می‌روند، اما این ایده از همان ضعفی رنج می‌برد که نقطه‌ی تصویر تنها یکی از بسیاری نقاط ممکن برای تلاش جهت رسیدن است. یک نقطه‌ی تصویر شعاعی لزوماً تابع هدفی مانند مثلاً بیشینه‌سازی سود را نمایش نمی‌دهد.

به‌عنوان مثال، فرض کنیم تنها یک خروجی و دو ورودی داشته باشیم و نقطه‌ی Q' در شکل ۱ متناظر با یک نقطه‌ی گوشه‌ای در شکل ۲ باشد. اگر قیمت q_2 یکی از ورودی‌ها را بدانیم، می‌توانیم تلاش کنیم تا قیمت دیگر q_1 را با استفاده از رابطه‌ی دوم در (۱۰.۳) و با وارد کردن شرط حداقل‌سازی هزینه برآورد کنیم: $q_1 = q_2 v_1 / v_2$. با این حال، در نقاط گوشه‌ای قیمت‌های سایه تعریف‌شده نیستند و لذا باید از مقادیر سمت چپ یا سمت راست استفاده شود. همان‌طور که از شکل ۲ مشهود است، با فرض معلوم بودن قیمت q_2 ، برای نقاط گوشه‌ای مختلف که به‌عنوان معیارهای حداقل‌کننده‌ی هزینه برای مشاهدات عمل می‌کنند، برآوردهای متفاوتی برای q_1 به دست می‌آید.

²⁵Zhou.

²⁶Färe.

۴. پیشرفت‌های بیشتر در DEA

دو پیشرفت مهم در DEA عبارت‌اند از: توسعه‌ی تفسیر آماری برآوردهای نمره‌ی کارایی و به‌کارگیری روش‌های برآورد دومرحله‌ای برای رگرسیون نمرات کارایی بر متغیرهای توضیحی^{۲۷}. هر دو پیشرفت برای استفاده‌ی سیاست‌گذاران از تحلیل‌های DEA اهمیت دارند.

پیشرفت نخست، از بوت‌استرپینگ^{۲۸} برای کنترل واریانس نمونه استفاده می‌کند. حتی اگر تمام واحدهای مورد مطالعه مشاهده شده باشند، فرآیند استاندارد تولید داده معمولاً چنین فرض می‌کند که مشاهدات وابسته به تحقق‌های متغیرهای تصادفی هستند. بوت‌استرپینگ یک تکنیک آماری است که بر پایه‌ی تولید تعداد زیادی شبه‌مشاهده^{۲۹} بر اساس فرآیند تولید داده‌ی فرض‌شده بنا شده است (نگاه کنید به منبع [۱۹]). در این روش می‌توان سوگیری نمونه‌گیری را برآورد کرد و فواصل اطمینان را به‌گونه‌ای برقرار نمود که معیاری از میزان اتکاپذیری نمرات کارایی به‌دست دهد.

همان‌گونه که در بخش ۲ اشاره شد، دلایل ناکارایی به آسانی قابل شناسایی نیستند. یک مشکل روش‌شناختی نیز این است که به‌دلیل محدودیت درجه‌ی آزادی ناشی از تعداد مشاهدات، باید تعداد متغیرهای استفاده‌شده در تحلیل DEA محدود نگه داشته شود. از این رو، یک روش دومرحله‌ای به‌کار گرفته شده است که در آن نمرات کارایی بر مجموعه‌ای از متغیرها (که در تحلیل DEA استفاده نشده‌اند) و ارتباط آن‌ها با ناکارایی معقول به‌نظر می‌رسد، رگرسیون می‌شود. با این حال، استفاده از روش‌های دومرحله‌ای برای یافتن متغیرهایی که با نمرات کارایی هم‌بسته‌اند، بیشتر اکتشافی است تا مبتنی بر نظریه. یک مسأله‌ی کلیدی این است که آیا چنین متغیرهای موسوم به متغیرهای محیطی تنها بر نمره‌ی کارایی اثر می‌گذارند یا اینکه مجموعه‌ی امکان تولید را نیز تحت‌تأثیر قرار می‌دهند. مشکل روش‌شناختی اینجاست که این متغیرهای توضیحی ممکن است باعث ایجاد سوگیری شوند، زیرا می‌توانند بر مجموعه‌ی امکان تولید در روابط (۲.۲) یا (۱.۳) تأثیر بگذارند. تنها زمانی برآوردهای مرحله‌ی دوم بدون سوگیری هستند که متغیرهای توضیحی تنها بر نمره‌ی کارایی اثر بگذارند و مرز این مجموعه (یعنی تابع مرزی) را تغییر ندهند. با این حال، آزمودن آماری این‌که آیا بین مرز مجموعه و متغیرهای توضیحی وابستگی وجود دارد یا خیر، مسأله‌ی دشوار است.

۵. نتیجه‌گیری

اندازه‌های کارایی فنی فارل [۸] ستون فقرات تحلیل‌های کارایی را شکل می‌دهند. تصویرسازی‌های ارائه‌شده برای اندازه‌های کارایی در آن مرجع باید به خواننده‌ای که با تحلیل کارایی ناآشناست، درک فوری از مفاهیم کلیدی بدهد. همچنین رویکرد غیرپارامتری پوشاندن مشاهدات مربوط به بهترین عملکرد در مرجع [۸] روزه‌ای از فلسفه‌های برآوردی ارائه می‌کند که طی سال‌ها به‌طور گسترده مورد بررسی قرار گرفته‌اند؛ چه بر پایه‌ی برنامه‌ریزی خطی در حالت غیرپارامتری و چه با استفاده از مرزهای پارامتری مبتنی بر روش‌های اقتصادسنجی. فرم نسبت‌محور مقاله‌ی بنیادین چارلز و همکاران [۴] که مبتنی بر یک مفهوم بهره‌وری است، امروزه چندان مورد استفاده قرار نمی‌گیرد. با این حال، صورت‌بندی مدل برنامه‌ریزی خطی DEA در مقاله‌ی بنکر و همکاران [۱] که بازده به مقیاس متغیر را نمایش می‌دهد، بر بهترین نکات هر دو مقاله‌ی بنیادین تکیه دارد.

مفهوم قیمت‌های سایه به‌طور کلی توسط اقتصاددانان به‌عنوان نامی برای پارامترهای لاگرانژی به‌کار می‌رود که برای قیده‌های یک مسأله‌ی بهینه‌سازی هنگام استفاده از لاگرانژی به کار گرفته می‌شوند. با استفاده از مدل DEA ارائه‌شده در بنکر و همکاران [۱]، قیده‌های موجود در مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی که برای برآورد نمرات کارایی ایجاد می‌شود، شامل خروجی‌ها، ورودی‌ها، و تأمین تحذب است. برای فهمیدن جواب، حیاتی است که تفسیرهای مربوط به قیمت‌های سایه (که گاه وزن‌ها یا ضرایب نیز نامیده می‌شوند) روشن

²⁷Explanatory variables.

²⁸Bootstrapping.

²⁹Pseudo-observations.

باشند. در ادبیات DEA اغلب پیش می‌آید که این تفسیرها صریح بیان نمی‌شوند. تابع هدف، نمره‌ی کارایی برای مدل ورودی‌محور یا معکوس آن برای مدل خروجی‌محور است. قیمت‌های سایه در یک جواب بهینه بیانگر تغییر در تابع هدف، یعنی نمره‌ی کارایی، به دلیل تغییری در قید ناشی از تغییر در مشاهدات برون‌زای ورودی یا خروجی هستند. ارزیابی مشتق‌های تابع ارزش (با فرض وجود جواب‌های بهینه‌ی یکتا که در تابع هدف جای‌گذاری شده‌اند) با استفاده از قضیه‌ی پوشش نشان می‌دهد که قیمت‌های سایه، تغییرات نهایی در نمره‌ی کارایی (در ورودی‌محور یا ضریب گسترش در خروجی‌محور) برای یک واحد ناکارا با نقطه‌ی تصویر روی مرز درون یک وجه را از تغییرات نهایی خروجی‌ها و ورودی‌ها بیان می‌کنند. این امر پیوندی با مفاهیم اقتصادی نظیر نرخ‌های نهایی تبدیل میان خروجی‌ها، نرخ‌های نهایی جانشینی میان ورودی‌ها، و بهره‌وری‌های نهایی برقرار می‌کند. همه‌ی این مفاهیم از نسبت‌های مناسب قیمت‌های سایه به دست می‌آیند. استفاده از شرایط اقتصادی بهینگی برای استخراج اصطلاحاً قیمت‌های سایه، مسأله‌ساز است. یکی از مشکلات این است که یک نقطه‌ی گوشه‌ای هیچ جواب یکتایی برای قیمت‌های سایه ندارد. مشکل دیگر اینکه اگر قیمت یکی از ورودی‌ها یا خروجی‌ها معلوم باشد، برآورد قیمت‌های دیگر با تغییر مشاهده تغییر می‌کند؛ چیزی که احتمالاً با فرض استاندارد وجود قیمت‌های مشترک برای همه‌ی واحدها در تضاد است.

سپاس‌گزاری

این مقاله در چارچوب برنامه‌ی پژوهشی «Kostnadseffektiv drift av Forsvaret (KOSTER IV)» با عنوان (کارایی هزینه‌ای در دفاع) در سازمان پژوهش‌های دفاعی نروژ (FFI) نوشته شده است و بر بخش‌های ۲ و ۳ فورسوند [۱۵] بنا دارد. من قدردان توربیورن هانسن (Torbjørn Hanson) و کِنت لَوُلْد رُډسِت (Kenneth Løvold Rødseth) برای دیدگاه‌ها و نظرات ارزشمندشان هستم.

مترجم اعلام می‌دارد که در تهیه‌ی پیش‌نویس و ویرایش زبانی نسخه‌ی اولیه‌ی این مقاله، از ابزارهای هوش مصنوعی ChatGPT استفاده کرده است. با این حال، محتوای نهایی به دقت توسط وی بازبینی، ویرایش و تأیید شده است تا از دقت و صحت علمی متن اطمینان حاصل شود.

مراجع

1. R.D. Banker, A. Charnes and W.W. Cooper, *Some models for estimating technical and scale inefficiency in data envelopment analysis*, Manag. Sci. **30** (1984), no. 9, 1078–1092.
2. J.N. Boles, *Efficiency squared-efficient computation of efficiency indexes*, West. Farm Econ. Assoc. Proc. **1966** (1967), 137–142.
3. J.N. Boles, *The 1130 Farrell efficiency system - multiple products, multiple factors*, Giannini Found. Agric. Econ. (February 1971).
4. A. Charnes, W.W. Cooper and E. Rhodes, *Measuring the efficiency of decision making units*, Eur. J. Oper. Res. **2** (1978), 429–444.
5. A. Charnes, W.W. Cooper and E. Rhodes, *Short communication: Measuring the efficiency of decision making units*, Eur. J. Oper. Res. **3** (1979), 339.
6. W.W. Cooper, L.M. Seiford and K. Tone, *Introduction to data envelopment analysis and its uses: With DEA-solver software and references*, New York: Springer Science + Business Media, 2006.

7. R. Färe, S. Grosskopf, D.-W. Noh and S. Yaisawarng, *Derivation of shadow prices for undesirable outputs: a distance function approach*, Rev. Econ. Stat. **75** (1993), no. 2, 374–380.
8. M.J. Farrell, *The measurement of productive efficiency*, J. R. Stat. Soc. Ser. A (Gen.) **120** (1957), no. 3, 253–281.
9. M.J. Farrell and M. Fieldhouse, *Estimating efficient production functions under increasing returns to scale*, J. R. Stat. Soc. Ser. A (Gen.) **125** (1962), no. 2, 252–267.
10. F.R. Førsund and N. Sarafoglou, *On the origins of data envelopment analysis*, J. Prod. Anal. **17** (2002), 23–40.
11. F.R. Førsund and N. Sarafoglou, *The tale of two research communities: the diffusion of research on productive efficiency*, Int. J. Prod. Econ. **98** (2005), no. 1, 17–40.
12. F.R. Førsund, S.A.C. Kittelsen and V. E. Krivonozhko, *Farrell revisited-visualising properties of DEA production frontiers*, J. Oper. Res. Soc. **60** (2009), 1535–1545.
13. F.R. Førsund, *Dynamic efficiency measurement*, Indian Econ. Rev. **45** (2010), no. 2, 125–159.
14. F.R. Førsund, *Weight restrictions in DEA: misplaced emphasis?*, J. Prod. Anal. **40** (2013), no. 3, 271–283.
15. F.R. Førsund, *Economic Perspectives on DEA*, Memorandum No. 10/ 2015, Department of Economics, University of Oslo, 2015.
16. V.V. Podinovski, *Suitability and redundancy of non-homogeneous weight restrictions for measuring the relative efficiency in DEA*, Eur. J. Oper. Res. **154** (2004), 380–395.
17. R.W. Shephard, *Cost and production functions*, Princeton: Princeton University Press, 1953.
18. R.W. Shephard, *Theory of cost and production functions*, Princeton NJ: Princeton University Press, 1970.
19. L. Simar and P.W. Wilson, *Statistical inference in nonparametric frontier models: the state of the art*, J. Prod. Anal. **13** (2000), no. 1, 49–78.
20. P. Zhou, X. Zhou and L.W. Fan, *On estimating shadow prices of undesirable outputs with efficiency models: a literature review*, Appl. Energy **130** (2014), 799–806.



ECONOMIC INTERPRETATIONS OF DEA

HOSSEIN AZIZI

¹*Department of Applied Mathematics, PaM.C., Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran
azizhossein@gmail.com*

Abstract. Research on productive efficiency at the firm level has developed as an important and active strand of research the last decades, both within operations research, management science and economics. Two apparently different definitions of efficiency are examined, but it is shown that when both estimation methods are based on solving linear programming problems the definitions of efficiency are identical. The purpose of the paper is to give the basic ideas of efficiency analyses using DEA as a tool for researchers not so familiar with efficiency analysis and DEA. The concept of shadow prices is given special attention.

2020 Mathematics Subject Classification. 90B50, 90C05

Keywords. Efficiency measures, Data envelopment analysis, Linear programming, Shadow prices

Date: Received 2025-11-26 Revised 2026-02-13 Accepted 2026-04-13 Available Online 2026-06-21

©Ferdowsi University of Mashhad.



در سوگ نورما پرزمگ، ۱۹۴۲-۲۰۲۶: یک یادنامه

سمیه رشید*

دانش‌آموخته کارشناسی ارشد، گروه ریاضی کاربردی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران
somayyeh.rashid@iaau.ir

چکیده. نوشتار پیش رو، روایتی است تحلیلی و ادای دینی آکادمیک به حیات پر بار علمی و دستاوردهای پیشگامانه پروفسور نورما پرزمگ (۱۹۴۲-۲۰۲۶)، استاد ممتاز و از طلایه‌داران حوزه آموزش ریاضی. وی در قامت پژوهشگری جریان‌ساز، با صورت‌بندی مفاهیمی چون فرآیندهای واسطه‌مند دیداری و میانجی‌گری اجتماعی-فرهنگی، و همچنین کاربرست بدیع نشانه‌شناسی — به‌ویژه از منظر تحلیلی پرس — ادبیات این حوزه را عمیقاً دگرگون ساخت. این یادبودنامه، ضمن واکاوی مسیر بالندگی دانشگاهی و سپهر آثار علمی ایشان، بر نقش راهبردی وی در هدایت مجامع بین‌المللی تمرکز دارد. در کنار وجوه آکادمیک، این متن بازتاباننده منش اخلاقی و تعهد بی‌بدیل او در پرورش فکری همکاران و نسل نوپای پژوهشگران تحصیلات تکمیلی است؛ میراثی ماندگار که ردپای اندیشه‌اش، مسیر تعالی و پویایی آموزش ریاضی را برای آیندگان روشن نگاه خواهد داشت.

این مقاله ترجمه مقاله زیر می‌باشد:

J. Haley and G. Kaiser, *Remembering Norma Presmeg, 1942-2026 – an obituary*, ZDM Mathematics Education **58** (2026), 345-347.

2020 Mathematics Subject Classification. 01A70

واژگان کلیدی. آموزش ریاضی؛ نورما پرزمگ؛ نشانه‌شناسی در ریاضیات؛ تاریخ آموزش ریاضی.
تاریخ: دریافت ۱۴۰۵/۰۲/۱۱ بازنگری ۱۴۰۵/۰۳/۲۷ پذیرش ۱۴۰۵/۰۳/۳۱ انتشار برخط ۱۴۰۵/۰۳/۳۱
نحوه ارجاع به این مقاله: س. رشید، در سوگ نورما پرزمگ، ۱۹۴۲-۲۰۲۶، به سوی علوم ریاضی، ۶ (۱۴۰۵)، شماره ۱، ۳۲-۳۸.

© دانشگاه فردوسی مشهد.

در ۲۵ فوریه ۲۰۲۶، جامعه آموزش ریاضیات با درگذشت دکتر نورما سی. پرزمگ^۱، استاد ممتاز، یکی از اندیشمندان برجسته و انسان‌های دلسوز خود را از دست داد. او در ۸۳ سالگی، در حالی که در کنار خانواده خود در مریویل^۲ تنسی^۳ به سر می‌برد، با نوای موسیقی کلاسیک چشم از جهان فرو بست. نورما که در توسعه و اعتلای جهانی حوزه تخصصی خود نقشی محوری ایفا کرد، طی حیات پر بار حرفه‌ای خویش در قاره‌های متعددی به فعالیت‌های آموزشی پرداخت. وی در آفریقای جنوبی به‌عنوان دانش‌آموخته ممتاز دبیرستان پورت شپستون^۴ برگزیده شد و سپس تحصیلات خود را در دانشگاه رودز^۵ و دانشگاه ناتال^۶ پی گرفت. پس از آن، دوازده سال به تدریس ریاضیات در مقطع دبیرستان اشتغال داشت. در سال ۱۹۸۵، او درجه دکتری خود را از دانشگاه کمبریج^۷ انگلستان دریافت کرد. رساله وی با عنوان «نقش فرایندهای میانجی بصری در ریاضیات دبیرستان: یک بررسی کلاسی»^۸ تحت راهنمایی آلن بیشاپ^۹ نگاشته شد. او پس از اتمام دوره دکتری به آفریقای جنوبی بازگشت و در دانشگاه دوربان-وستویل^{۱۰} به تدریس مشغول شد. نورما در سال ۱۹۹۰ به ایالات متحده مهاجرت کرد و ابتدا به هیأت علمی دانشگاه ایالتی فلوریدا^{۱۱} و سپس دانشگاه ایالتی ایلینوی^{۱۲} پیوست و در آنجا به مقام استادی ریاضیات ارتقا یافت. در این دوران، اگرچه همواره خود را «شهروند جهان»^{۱۳} می‌نامید، اما از اینکه به تابعیت ایالات متحده درآمده بود، بر خود می‌بالید.

نورما، در مقام استادی بی‌دریغ، همواره محبوبیتی عمیق میان دانشجویانش داشت؛ چرا که با تمام وجود دغدغه‌مند شکوفایی آنان بود. دانش‌آموختگان مکتب او امروز در جای‌جای جهان پراکنده‌اند و هر یک، از طلایه‌داران و پیشگامان این میدان علمی به شمار می‌روند. او که همواره با طنین این باور آشنا شناخته می‌شد که «ریاضیات زیباست!»، به شکلی غبطه‌برانگیز لطافت علوم انسانی را با صلابت علوم پایه پیوند زد. در وجود او، شیفتگی به ظرافت و منطق استوار ریاضیات هرگز فروکش نکرد و حرمت آموزش همواره پاس داشته شد. بصیرت، انسجام خدشه‌ناپذیر علمی و شرافت حرفه‌ای او در طی دهه‌ها هم‌اندیشی با پژوهشگران جهان، میراثی پر بار و ماندگار برای جامعه علمی بر جای گذاشت.

کارنامه علمی او گستره کم‌نظیری از مضامین پژوهشی را در بر می‌گیرد. او در طول حیات آکادمیک خود، تألیف و ویراستاری آثار متعددی را راهبری کرد؛ آثاری که بی‌شک یکی از برجسته‌ترین آن‌ها، کتاب «گذار بین بافت‌های گوناگون برای انجام فعالیت‌های

¹Norma C Presmeg

²Maryville

³Tennessee

⁴Port Shepstone

⁵Rhodes

⁶Natal

⁷Cambridge

⁸The Role of Visually Mediated Processes in High School Mathematics: A Classroom Investigation

⁹Alan Bishop

¹⁰Durban-Westville

¹¹Florida

¹²Illinois

¹³Citizen of the world

ریاضی^{۱۴} است که در سال ۲۰۰۸ با همکاری آبرو و بیشاپ^{۱۵} منتشر شد. ردپای این تنوع و ژرف‌نگری را در اثر دیگری با عنوان «نشانه‌های دلالت: نشانه‌شناسی در آموزش ریاضیات»^{۱۶} نیز می‌توان یافت که در سال ۲۰۱۸ با هم‌فکری رادفورد، راث و کادونز^{۱۷} به ثمر نشست. این کتاب، بسط‌یافته مجموعه مقاله‌های پیش‌درآمد سیزدهمین کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی (ICME)^{۱۸} در هامبورگ (۲۰۱۶) است. از دیگر ثمرات این کنگره، انتشار «مجموعه جامع برای پژوهشگران نوپا در آموزش ریاضیات»^{۱۹} در سال ۲۰۱۹ با مشارکت نویسنده دوم همین یادداشت بود؛ اثری که در آن، اندوخته‌های پربار خود در عرصه پژوهش را بی‌دریغ پیشکش جامعه علمی کرد. همچنین، کتاب «رویکردهای پژوهش کیفی در آموزش ریاضیات: نمونه‌هایی از روش‌شناسی و روش‌ها»^{۲۰} که پیشتر در سال ۲۰۱۵ با همراهی بیکنر-آسباس و کنپینگ^{۲۱} به چاپ رسیده بود، تبلور دیگری از تعهد علمی اوست و مستقیماً در تجربه غنی و دیرپایش در این میدان ریشه دارد.

کارنامه پژوهشی نورما، گنجینه‌ای پربار از مقالات داوری‌شده در معتبرترین نشریات، کتاب‌ها و مجموعه مقاله‌های همایش‌هاست؛ میراثی که تجلی‌گاه ذهنی پویا و چندبعدی است. گستره اندیشه او مضامین متنوعی را در هم آمیخت؛ از واکاوی تصویرسازی و بازنمایی‌های ریاضیاتی گرفته تا نشانه‌شناسی در آموزش، و کاربست ظریف چارچوب نشانه‌شناسی پیرسی^{۲۲} در راستای بسط رویکردهای نظری. اما دغدغه بنیادین او در طول دهه‌های متمادی، فراتر از مفاهیم انتزاعی رفت و بر ابعاد فرهنگی آموزش ریاضیات، با تأکید بر میانجی‌گری اجتماعی-فرهنگی، هویت و نژاد متمرکز شد. اوج این هم‌نهادی فکری را می‌توان در مقاله او پیرامون چارچوب نشانه‌شناختی یافت؛ اثری که به‌خوبی نشان داد در منظومه فکری نورما، رویه‌های عملی و ریاضیات مدرسه‌ای مفاهیمی ازهم‌گسسته و جزیره‌ای نبودند، بلکه تاروپود شبکه‌ای واحد را برای ارتقای آموزش و پژوهش ریاضی می‌تیدند. پویایی علمی او به همین مرزها محدود نماند. خوانش دقیق نورما از آرای کروتسکی^{۲۳} در باب تصویرسازی ذهنی، مسیر تازه‌ای را در پژوهش‌های او گشود که بعدها به مطالعات عمیق‌تری در حوزه حل مسئله انجامید. شاید بدیع‌ترین وجه کارنامه او، تلاش برای یافتن نقطه تلاقی هنر و علم در ساحت آموزش ریاضی باشد؛ عرصه‌ای که در آن، شیفتگی شخصی‌اش به موسیقی و هنر با رسالت علمی او درهم‌آمیخت و رویکردی کل‌نگر و الهام‌بخش را از او به یادگار گذاشت.

او عضوی فعال و مشارکت‌جو در سازمان‌های متعددی بود؛ از جمله کمیته بین‌المللی گروه روان‌شناسی آموزش ریاضیات^{۲۴} و شاخه آمریکای شمالی آن. وی در طول چند دهه، عضوی ارزشمند و پویا در جامعه PME بود و با خدمت در جایگاه عضو هیأت‌مدیره بین‌المللی، به ترویج همکاری‌های جهانی همت گمارد. در کنار ارائه سخنرانی‌های خرد و کلان، وی راهبری یک گروه بحث پیرامون

¹⁴Transitions between contexts for mathematical practices

¹⁵Abreu and Bishop

¹⁶Signs of signification: Semiotics in mathematics education

¹⁷Radford, Roth and Kadunz

¹⁸International Congress on Mathematical Education (ICME)

¹⁹Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education

²⁰Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods

²¹Bikner-Ahsbahs and Knipping

²²Peircean

²³Krutetskii

²⁴International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)

جنبه‌های نشانه‌شناختی و فرهنگی ریاضیات را در بیست و هفتمین کنفرانس PME در هاوایی^{۲۵} (۲۰۰۳) و یک مجمع پژوهشی با موضوع میراث لین استریف‌لند^{۲۶} را در بیست و پنجمین کنفرانس PME در اوترخت^{۲۷} (۲۰۰۱) بر عهده داشت. او در سی‌امین کنفرانس PME در پراگ^{۲۸} (۲۰۰۶)، سخنرانی جامعی با موضوع «نگاهی نشانه‌شناختی به نقش تصویرسازی ذهنی و نگاشت‌ها در تدریس و یادگیری ریاضیات» ارائه نمود. همچنین در سال ۲۰۰۸، سمیناری در خصوص «کیفیت داوری مقالات علمی» برگزار کرد و دانش‌بی‌کران خود در عرصه ویراستاری و داوری علمی را با جامعه آموزش ریاضیات تسهیم نمود.

وی با همین شور و حرارت در برنامه‌های کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی^{۲۹} نیز مشارکت داشت؛ از جمله حضور مؤثر در سمپوزیوم^{۳۰} صدمین سالگرد تأسیس این کمیسیون در سال ۲۰۰۸ با ارائه‌ای تحت عنوان «چارچوب‌های نظری نشانه‌شناختی، خلاقیت و عقلانیت خیال‌پردازانه در آموزش ریاضیات». او در پژوهش «آموزش ریاضیات به مثابه یک قلمرو پژوهشی: جستجویی برای هویت» به ویراستاری سیرپینسکا^{۳۱} و کیلپاتریک^{۳۲}، مقاله بنیادین «ایجاد تعادل در جهان‌های پیچیده انسانی: آموزش ریاضیات به عنوان یک رشته علمی نوظهور و مستقل» را به رشته تحریر درآورد. وی در این اثر تأکید کرد که آموزش ریاضیات، اگرچه هنوز رشته‌ای نوپا و در حال توسعه است، اما یک میدان پژوهشی مستقل به شمار می‌رود که با وجود وابستگی وثیق به علم ریاضی، هویت خاص خود را داراست. او به‌طور مستمر مسئولیت‌هایی را در سلسله کنفرانس‌های ICME که هر چهار سال یک‌بار تحت نظارت ICMI برگزار می‌شود، تقبل می‌کرد. در این راستا، سازمان‌دهی گروه‌های مطالعاتی و بحث در باب زبان و ارتباطات، تجسم دیداری، و نشانه‌شناسی را در دوره‌های مختلف این کنگره بر عهده داشت و از سال ۱۹۸۰ به‌طور پیوسته در آن‌ها به ارائه مقاله پرداخت. او در انتقال بی‌دریغ دانش ژرف خویش در مجامع علمی محلی و منطقه‌ای، به‌ویژه در آمریکای شمالی و آفریقای جنوبی، گشاده‌دست بود. وی اندیشمندی در عرصه بین‌الملل بود که رسالت علمی‌اش را تنها به پژوهش‌های طراز اول محدود نساخت؛ از همین رو، بخش چشمگیری از تعاملات برون‌مرزی او به مشاوره و هدایت برنامه‌های دکتری در حاشیه همایش‌های گوناگون اختصاص می‌یافت. کارنامه پربار و گستره خدمات او چنان است که در هیچ توصیف فشرده‌ای نمی‌گنجد.

نورما از طریق فعالیت‌های ویراستاری و داوری مقالات برای مجلات متعدد، حمایتی استوار از جامعه آموزش ریاضیات به عمل آورد. در این میان، سهم بسزای او در مجله «مطالعات تربیتی در ریاضیات»^{۳۳}، که از نشریات پرچمدار این حوزه محسوب می‌شود، درخشان است. وی از سال ۲۰۰۰ تا ۲۰۰۸ به عنوان یکی از اعضای هیأت تحریریه و از سال ۲۰۰۹ تا ۲۰۱۳ در جایگاه سردبیر این مجله خدمت کرد. عملکرد او در ویراستاری افسانه‌ای بود؛ توصیه‌های سازنده وی در تلفیق با دقت و استانداردهای کیفی والا، موجب شد تا این مجله در سال ۲۰۱۲ در نمایه استنادی علوم اجتماعی^{۳۴} قرار گیرد. در سال‌های اخیر نیز، او با پذیرش نقش ویراستار زبانی، از مجله «ZDM - آموزش ریاضیات»^{۳۵} که آن نیز از نشریات پیشگام و نمایه‌شده در SSCI است، پشتیبانی نمود. با این

²⁵Hawaii

²⁶Leen Streefland

²⁷Utrecht

²⁸Prague

²⁹International Commission on Mathematical Instruction (ICMI)

³⁰Symposium

³¹Sierpinska

³²Kilpatrick

³³Educational Studies in Mathematics

³⁴Social Science Citation Index (SSCI)

³⁵ZDM - Mathematics Education

وجود، مداخلات وی از اصلاحات صرفاً زبانی فراتر می‌رفت و بازخوردهای ارزشمندی پیرامون انسجام متن و سیر منطقی ایده‌ها به نویسندگان ارائه می‌داد. برخورد او همواره با احترام تام نسبت به آرا و اندیشه‌های مؤلفان همراه بود و بهره‌مندی از نظرات او برای هر پژوهشگری افتخاری بسزا محسوب می‌شد.

علاوه بر این خدمات ویراستاری، او مقالات متعدد و پراچایی را در مجلاتی نظیر «مطالعات تربیتی در ریاضیات» و «ZDM - آموزش ریاضیات» به چاپ رساند. وی با نگارش این مقالات فاخر که از بالاترین استانداردهای کیفی برخوردار بودند، نه تنها برای پژوهشگران نوپا، بلکه برای تمام اعضای جامعه علمی به یک الگوی بی‌بدیل مبدل گشت.

درنگی بر حیات فردی نورما، تصویرگر انسانی است همواره پوینده و تشنه آموختن؛ شخصیتی که در هر عرصه‌ای گام نهاد، چه در ساحت علم و چه بیرون از آن، خوش درخشید. گستره این سرآمدی، از نواختن پیانو و یادگیری زبان‌های تازه تنها به شوق رویارویی با چالش‌ها، تا باغبانی پرشور و خلق دست‌بافته‌های ظریف و پیچیده را در بر می‌گرفت. او که شیفته سفر و گشت‌وگذار در طبیعت بود، همواره با روحیه‌ای قدرشناس به زیبایی‌های پیرامونش چشم می‌دوخت و از تماشای کرانه پرتب‌وتاب آسمان غرق در لذت می‌شد؛ با همین نگاه ژرف و زیباپسند بود که همواره نیک‌ترین خصلت‌ها را در آدمیان می‌جست و می‌یافت. نورما با برخورداری از صلابت شخصیتی کم‌نظیر، زیستی سراسر اخلاقی و اصولی را برگزید و خویشتن را پیوسته در برابر عالی‌ترین معیارها پاسخگو می‌دانست. وی در کنار استمرار فعالیت‌های دینی، همواره منشی متواضعانه داشت؛ چنان‌که با گذشت سالیان، از رغبتش به القاب و افتخارات بیرونی کاسته شد و بیش از پیش، دل در گرو تعالی و بالندگی درونی نهاد.

او پس از عمری خدمت خالصانه، جهانی را ترک گفت که با حضورش جای بهتری برای زیستن بود. خرد نافذ و رأفت عمیقش، زندگی هزاران انسان را روشنایی بخشید؛ تأثیری که نه فقط محصول دستاوردهایش، که بازتاب گوهر وجودی او بود. باشد که این میراث گران‌بها، در منش و کردار ما زنده بماند و راهش ادامه یابد.

سپاس‌گزاری

بدین‌وسیله از دو داور ناشناس که با مطالعه دقیق و ارائه نظرات راهگشا و ارزشمند خود، نقش مهمی در غنای علمی و بهبود نسخه نهایی این مقاله ایفا کردند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

مترجم اعلام می‌دارد که در تهیه پیش‌نویس و ویرایش زبانی نسخه اولیه این مقاله، از ابزارهای هوش مصنوعی استفاده کرده است. با این حال، محتوای نهایی به‌دقت توسط وی بازبینی، ویرایش و تأیید شده است تا از دقت و صحت علمی متن اطمینان حاصل شود.



شکل ۱: تصاویری از نورما سی. پرزمگ.



REMEMBERING NORMA PRESMEG, 1942-2026-AN OBITUARY

SOMAYYE RASHID^{1*}

^{1,2}Department of Applied Mathematics, PaM.C., Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran
somayyeh.rashid@iau.ir

Abstract. This text serves as a retrospective of the academic life and distinguished achievements of Professor Norma Presmeg (1942–2026), Professor Emerita and a preeminent scholar in the field of mathematics education. Throughout her academic career, she was instrumental in expanding the frontiers of knowledge in domains such as visually mediated processes, semiotics—particularly through a Peircean lens—and sociocultural mediation. By examining her academic background, scholarly oeuvre, and pivotal leadership roles within international academic communities, this memorial tribute illuminates her exemplary character and the profound, enduring impact she had on researchers, colleagues, and graduate students alike. Ultimately, it honors her scholarly legacy as a foundational pillar in the advancement of mathematics education.

2020 Mathematics Subject Classification. Rashid, Somayye

Keywords. Mathematics Education; Norma Presmeg; Semiotics in Mathematics; History of Mathematics Education.

Date: Received 01-05-2026 Revised 17-06-2026 Accepted 21-06-2026 Available Online 21-06-2026

©Ferdowsi University of Mashhad.



نمونه‌ای متقدم از یک دستگاه عددنویسی ارزش مکانی غیردهی

اکبر امیری*

گروه ریاضی، واحد تالش، دانشگاه آزاد اسلامی، تالش، ایران

ak.amiri@iau.ac.ir

چکیده. ایده دستگاه‌های عددنویسی غیردهی در طی سده هفدهم میلادی توسط شماری از ریاضی‌دانان، به‌ویژه توماس هریوت، گوتفرد ویلهلم لایبنیتس، خوان کارامونل لوبکوویتس و ارهارد وایگل بسط و توسعه یافت. با این حال، پیش از آن و در اواخر سده شانزدهم، یک ریاضی‌دان آلمانی به نام آنتون شولتسه، دستگاه عددنویسی ارزش مکانی در مبنای ۲۴ را شرح داده و اعمال اصلی حساب را در این دستگاه به نمایش گذاشته بود. شولتسه این الگو را در قالب مثالی در کتاب درسی خود با موضوع حساب بازرگانی که در سال ۱۵۸۴ منتشر گردید، گنجانده بود؛ وی سپس همین روش را با اندکی تغییرات در ویرایش بسط‌یافته کتاب مذکور که در سال ۱۶۰۰ به چاپ رسید، مجدداً ارائه کرد.

این مقاله ترجمه مقاله زیر می‌باشد:

L. Koudela, *An early example of a nondecimal positional number system*, Hist. Math. **72** (2025), 2–7.

2020 Mathematics Subject Classification. 01A40; 01A45; 11A99; 00A08

واژگان کلیدی. دستگاه‌های عددنویسی غیردهی، دستگاه مبنای بیست‌و‌چهار، آنتون شولتسه، حساب بازرگانی.
تاریخ: دریافت ۱۴۰۵/۰۲/۱۱ بازنگری ۱۴۰۵/۰۲/۲۵ پذیرش ۱۴۰۵/۰۳/۳۱ انتشار برخط ۱۴۰۵/۰۳/۳۱
نحوه ارجاع به این مقاله: ا. امیری، نمونه‌ای متقدم از یک دستگاه عددنویسی ارزش مکانی غیردهی، به سوی علوم ریاضی، ۶ (۱۴۰۵)، شماره ۱، ۳۹-۵۱.

© دانشگاه فردوسی مشهد.

۱. مقدمه

اعداد هندو-عربی حداکثر تا سده دهم میلادی از طریق اسپانیای تحت حاکمیت مورها^۱ به اروپا راه یافتند. ترجمه‌های لاتین کتب عربی در باب حساب، نقش بسزایی در پذیرش گسترده دستگاه ارزش مکانی دهدهی^۲ ایفا کردند. علی‌رغم مزایای انکارناپذیر این دستگاه نوین در اجرای عملگرهای بنیادین حساب، فرایند ورود آن به نظام آموزشی، تجارت و مالیه چندان سراسر و ساده نبود و در برخی حوزه‌ها، استفاده از اعداد رومی تا مدت‌ها تداوم یافت.

در طول سده هفدهم و اوایل سده هجدهم میلادی، امکان به‌کارگیری دستگاه‌های عددی ارزش مکانی با مبنایی غیر از عدد ۱۰ تدریجاً مورد پذیرش قرار گرفت. نقش پیشگام در توسعه دستگاه دودویی^۳ را گوتفرید ویلهلم لایبنیتس^۴ (۱۶۴۶-۱۷۱۶) ایفا نمود. وی در نیمه دوم دهه ۱۶۹۰ به حساب دودویی پرداخت و در نامه مشهور خود به دوک رودولف آگوست^۵ مورخ ۱۲ ژانویه ۱۶۹۷، دستگاه اعداد دودویی را توصیف کرد [۳، ص. ۳۱]. با این حال، دست‌نوشته‌های به‌جامانده از لایبنیتس نشان می‌دهد که ایده نمایش اعداد در قالب دستگاه دودویی، در طول دهه ۱۶۷۰ کانون توجه و علاقه شدید وی بوده است [۱۵]. در این راستا، اهمیتی کلیدی به رساله «در باب تصاعد دودویی»^۶ نگاشته‌شده در سال ۱۶۷۹ نسبت داده می‌شود. افزون بر این، احتمال می‌رود که لایبنیتس پیش‌تر و در دوران اقامتش در پاریس (۱۶۷۲-۱۶۷۶) نیز به کاوش در حساب دودویی پرداخته باشد.

لایبنیتس افزون بر دستگاه دودویی، به بررسی دستگاه‌هایی با سایر مبناها نیز پرداخت. برای نمونه، ایده دستگاه دوازدهدهی^۷ در رساله «گنجینه ریاضیات»^۸ مطرح گردید؛ با این وجود، لایبنیتس دلایل و توجیهات کافی برای اتخاذ آن نیافت. همچنین شواهدی دال بر علاقه لایبنیتس به دستگاه شانزدهدهی^۹ وجود دارد که از منظر او، از ظرفیت‌های کاربردی و عملی بیشتری برخوردار بود [۱۴]. انگیزه لایبنیتس برای معرفی دستگاه دودویی از دلایل صرفاً ریاضی تا مباحث متافیزیکی متغیر بود. او امیدوار بود که دستگاه دودویی بتواند روابطی را میان اعداد آشکار سازد که در سایر دستگاه‌ها پنهان مانده بودند. لایبنیتس همچنین دلیل استفاده از دستگاه دودویی را در قیاس آن با آموزه کلیسایی «آفرینش از عدم»^{۱۰} می‌دید (بدین معنا که آفرینش همه چیز از هیچ، از طریق نمایش تمام اعداد به کمک یک و صفر اثبات می‌شود). این ایده که در یادداشت‌های او بر یکی از کتاب‌های وایگل^{۱۱} به چشم می‌خورد [۱۵، ص. ۷۹]، به درون‌مایه مهمی در نامه پیش‌گفته به دوک رودولف آگوست بدل شد. واکنش یواخیم بووه^{۱۲}، مبلغ مذهبی یسوعی^{۱۳} در چین، انگیزه مضاعفی در این مسیر به لایبنیتس بخشید؛ بووه به امکان استفاده از دستگاه دودویی به‌عنوان کلیدی برای تفسیر ۶۴

¹Moorish²decimal³binary⁴Gottfried Wilhelm Leibniz⁵Duke Rudolph August⁶De progressionem dyadica⁷duodecimal⁸Thesaurus mathematicus⁹hexadecima¹⁰creatio ex nihilo¹¹Weigel¹²Joachim Bouvet¹³Jesuit

شش‌خطی^{۱۴} در کتاب «ای چینگ»^{۱۵} (کتاب دگرگونی‌ها) اشاره کرد. رساله لایبنتیس با عنوان «شرح حساب دودویی»^{۱۶} که برای آکادمی پاریس نگاشته شده بود، در سال ۱۷۰۵ میلادی به چاپ رسید. این رساله هم به جنبه‌های محاسباتی دستگاه دودویی و هم به ارتباط احتمالی آن با شش‌خطی‌های چینی می‌پردازد [۱۷، ص. ۲۹۳].

ارهارد وایگل (۱۶۲۵-۱۶۹۹)، که به مدت یک نیم‌سال در ۱۶۶۳ میلادی در ینا^{۱۷} استاد لایبنتیس بود، در رساله خود با نام تتراکتیس^{۱۸} (۱۶۷۳) استفاده از دستگاه چهارچهارمی^{۱۹} را پیشنهاد داد و بر این باور بود که مبنای این دستگاه در سرتاسر جهان آفرینش نهاده شده است. وایگل به آموزه فیثاغورثی تتراکتیس و اهمیت ویژه عدد ۴ استناد می‌کرد. افزون بر ماهیت چهارگانه جهان، وایگل کاربردپذیری عملی گسترده‌تر این دستگاه را دلیل دیگری برای استفاده از آن می‌دانست. او در سال‌های بعد، دستگاه ابداعی خود را در آثار دیگری که منتشر کرد، بسط و توسعه داد. میزان تأثیرگذاری وایگل بر لایبنتیس همچنان محل بحث و تبادل نظر است (برای نمونه: برانکاتو^{۲۰} [۲]؛ استریکلند و لوئیس [۱۵]).

خوان کاراموئل ای لوبکویتس^{۲۱} (۱۶۰۶-۱۶۸۲) در کتاب جامع و دوجلدی خود با عنوان «ریاضیات دوگانه قدیم و جدید»^{۲۲} که در سال ۱۶۷۰ میلادی منتشر شد، به بررسی دستگاه‌های عددی بر پایه مبناهای ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۲ و ۶۰ می‌پردازد. او برای هر مبنا، شواهدی دال بر اهمیت طبیعی یا معنوی آن ارائه می‌دهد. کاراموئل فراتر از ارائه نمادگذاری اعداد در هر دستگاه، توجه چندانی به سایر ویژگی‌های حسابی آن‌ها نشان نمی‌دهد [۹].

بلز پاسکال^{۲۳} (۱۶۲۳-۱۶۶۲) در اثر خود با نام «درباره مضارب اعداد»^{۲۴} (که پس از مرگش در سال ۱۶۶۵ منتشر شد)، به‌طور حاشیه‌ای و گذرا به ایده استفاده از دستگاه‌های غیردهی (به‌ویژه دستگاه دوازده‌دهی) پرداخته است. در طول قرن هفدهم، امکانات کدگذاری دودویی در زمینه‌های گوناگونی توسط سایر دانشمندان مورد کاوش قرار گرفت. جان نپر^{۲۵} (۱۵۵۰-۱۶۱۷) در حساب مکانی، که به‌عنوان پیوستی بر کتاب رابدولوژی^{۲۶} (۱۶۱۷) وی به چاپ رسید، از حروف الفبای لاتین برای نمایش توان‌های عدد ۲ بهره برد. فرانسیس بیکن^{۲۷} (۱۵۶۱-۱۶۲۶) در کتاب «درباره ارج و ارتقای علوم»^{۲۸} (۱۶۲۳)، روشی را برای رمزنگاری حروف الفبای لاتین با استفاده از کدهای دودویی توصیف کرد [۱۶، صص. ۱۱-۱۲].

¹⁴hexagrams

¹⁵I Ching

¹⁶Explication de l'arithmétique binaire

¹⁷Jena

¹⁸Tetractys

¹⁹quaternary

²⁰Brancato

²¹Juan Caramuel y Lobkowitz

²²Mathesis biceps vetus et nova

²³Blaise Pascal

²⁴De numeris multiplicibus

²⁵John Napier

²⁶Rabdology

²⁷Francis Bacon

²⁸De dignitate et augmentis scientiarum

امروزه، فضل تقدم در کشف حساب غیردهی عموماً به توماس هریوت^{۲۹} (۱۵۶۰-۱۶۲۱) نسبت داده می‌شود. همان‌طور که شرلی^{۳۰} [۱۱] خاطرنشان کرده است، دست‌نوشته‌های هریوت که مدت‌ها به چاپ نرسیده بودند، حاوی توصیفی از دستگاه اعداد دودویی، از جمله یک جدول تبدیل و شرحی بر عملگرهای بنیادین هستند. ملاحظات هریوت پیرامون حساب دودویی احتمالاً با آزمایش‌های توزین وی در ارتباط بوده‌اند و قدمت آن‌ها به بازه زمانی ۱۶۰۱ تا ۱۶۰۵ میلادی بازمی‌گردد (کنوت^{۳۱} [۵]؛ استریکلند [۱۳]).

با این حال، حتی پیش از هریوت نیز نمونه‌ای از کاربرد یک دستگاه اعداد ارزش مکانی غیردهی در ادبیات مکتوب اروپا ظاهر شده بود. مؤلف این اثر، آنتون شولتسه^{۳۲} بود.

۲. آنتون شولتسه و کتاب‌های درسی حساب او

آنتون شولتسه در حدود سال ۱۵۶۰ میلادی در شهر لگنیتس^{۳۳} (به آلمانی: Liegnitz) واقع در منطقه سیلیزیای سفلی^{۳۴} (که امروزه در جنوب غربی لهستان قرار دارد) چشم به جهان گشود؛ منطقه‌ای که در سده شانزدهم میلادی به یکی از کانون‌های فرهنگ پروتستان آلمانی بدل شد. او در سال ۱۵۸۴ میلادی، یک کتاب درسی در زمینه حساب مقدماتی با عنوان «کتاب حساب روی سکه و وزن در سیلیزیای»^{۳۵} برای دانش‌آموزان مدرسه خود در لگنیتس منتشر کرد [۷]. وی دلیل اصلی نگارش این اثر را فقدان واحدهای مناسب وزن و پول در کتاب‌های درسی موجود عنوان کرد. از آنجا که در آن زمان هیچ چاپخانه‌ای در لگنیتس وجود نداشت، این کتاب توسط آندریاس آیشهورن^{۳۶} در شهر فرانکفورت اودر^{۳۷} به چاپ رسید.

محتوای نخستین کتاب حساب شولتسه (یا به تعبیر بعدی خود نویسنده، کتابچه حساب یا Rechenbüchlein) به سه بخش تقسیم می‌شود. بخش نخست به توصیف عددنویسی دهدهی می‌پردازد و عملگرهای بنیادین حساب، تصاعدها و قاعده سه یا قاعده ثلاث را شرح می‌دهد. مفاهیم حسابی با بهره‌گیری از مثال‌های کاربردی و انبوهی از تمرین‌های حل‌نشده — که تنها پاسخ نهایی آن‌ها درج شده است — تبیین شده‌اند. بخش دوم دربردارنده محاسبه با کسرها و مثال‌های عملی متعددی از حوزه‌های گوناگون است و روش‌های دیگری نظیر قاعده سه معکوس، قاعده پنج، محاسبه بهره، حق‌العمل، نسبت‌های اختلاط و موارد مشابه را توصیف می‌کند. در این بخش، تلاش برای به‌حداکثر رساندن فایده عملی کتاب کاملاً مشهود است. بخش سوم اثر که رویکردی جبری دارد، به روش‌های پیشرفته‌تری همچون قاعده خطایین یا تنظیم کاذب و قاعده سسیس^{۳۸} اختصاص یافته و قاعده کاس^{۳۹} را به‌اجمال معرفی می‌کند (برای بررسی جزئیات این روش‌ها، برای نمونه تروپفکه [۱۶]).

²⁹Thomas Harriot

³⁰Shirley

³¹Knuth

³²Anton Schultze

³³Legnice

³⁴Lower Silesia

³⁵Rechenbuch auf Müntz vnd gewicht in Schlesien

³⁶Andreas Eichhorn

³⁷Frankfurt (Oder)

³⁸Regula cecis

³⁹rule of coss

هرچند تردیدهایی درباره محتوای کتاب، احتمالاً بعدها مؤلف را بر آن داشت تا روی کتاب درسی جدیدی کار کند، با این حال باید خاطرنشان کرد که در پیوست‌های کتاب رارا آریتمتیکا^{۴۰}، این اثر به عنوان «یکی از بهترین آثار حساب تجاری عصر خود» توصیف شده است [۱۲، ص. ۴۱].

در سال‌های بعد، شولتسه مناصب گوناگونی را در دربار دوک لگنیتس بر عهده گرفت و در سال ۱۵۹۶ میلادی به مقام اشراف‌زادگی نائل آمد [۱۰]. او همچنین یکی از سخاوتمندترین حامیان چاپخانه لگنیتس متعلق به نیکولاس اشنایدر^{۴۱} بود که بدون حمایت‌های وی، بسیاری از آثار مهم هرگز مجال انتشار نمی‌یافتند [۱، ص. ۳۲]. شایان ذکر است که نوۀ او، ماریا کانیتس^{۴۲} (۱۶۱۰-۱۶۶۴)، بعدها به یکی از زنان برجسته در عرصۀ ریاضیات و نجوم بدل شد.

علاقۀ شولتسه به ریاضیات حتی در زمانی که مناصب مهمی در دربار دوک بر عهده داشت، همچنان پابرجا ماند. از آنجا که کتاب نخست او دیگر در کتاب‌فروشی‌ها یافت نمی‌شد، وی تصمیم گرفت ویرایش جدیدی از آن را آماده کند. ویرایشی بازنگری‌شده، بازنویسی‌شده و بسط‌یافته از کتاب درسی او توسط نیکولاس اشنایدر در سال ۱۶۰۰ میلادی با عنوان «حساب یا کتاب محاسبه»^{۴۳} منتشر شد [۸]. در صفحۀ عنوان قید شده است که محتوای اثر بدون نیاز به آموزش شفاهی قابل فهم است. از این رو، هدف اصلی کتاب، خودآموزی بود؛ چرا که شولتسه در آن زمان دیگر ارتباط مستقیمی با دانش‌آموزان نداشت. محاسبات موجود در مسائل حل‌شده به تفصیل مورد بحث و تفسیر قرار گرفته‌اند. محتوای ریاضی کتاب با قافیه‌ها و عبارات یادیار متعددی همراه شده است تا فهم و به‌خاطر سپاری آن‌ها تسهیل گردد [۱۰].

ساختار این کتاب تقریباً با محتوای کتاب نخست مطابقت دارد و به چهار بخش تقسیم شده است. بخش اول مشتمل بر شرحی از عددنویسی و عملگرهای بنیادین حساب است که هم به روش «قلم و کاغذ» و هم با استفاده از خطوط و ژتون‌های شمارشی (یا محاسبه روی خطوط) — که در کتاب اول مطرح نشده بود — انجام می‌پذیرد؛ این بخش همچنین شامل محاسبه با کسرهاست. بخش دوم دربردارندۀ مسائل و تمرین‌های بسیاری از رویه‌های تجاری است. این بخش با توضیحی درباره قاعدۀ سه آغاز می‌شود و دامنه وسیعی از محاسبات تجاری و رویه‌های دیگر (از جمله قاعدۀ خطایی و قاعدۀ سسیس) را پوشش می‌دهد. بخش سوم اثر تماماً به قاعدۀ کاس اختصاص دارد که در مقایسه با کتاب درسی سال ۱۵۸۴ تأکید بیشتری بر آن شده و مجدداً با مثال‌های فراوانی تبیین شده است. کوتاه‌ترین و آخرین بخش کتاب نیز به حسابداری (دفتر روزنامه یا Jornaal) می‌پردازد.

۳. خداوندا، ما را از هر تنگنایی برهان

دایرةالمعارف عظیم تسدلر^{۴۴}، که حدفاصل سال‌های ۱۷۳۱ تا ۱۷۵۴ به چاپ رسید، دربردارندۀ مدخلی با عنوان «شولتسه (آنتون)» است. در این مدخل، افزون بر اطلاعاتی کوتاه پیرامون زندگی‌نامۀ شولتسه، تنها دستاورد علمی منتسب به وی، یعنی تخصیص ارزش‌های عددی به حروف الفبای آلمانی، چنین ذکر شده است [۱۸، col. 1619]: «او ریاضی‌دان زبده‌ای بود و در هنر حساب الفبایی به پیشرفت‌های درخوری دست یافت؛ بدان‌گونه که حروف آلمانی را جایگزین اعداد رایج ساخت و به هر یک ارزش حسابی اختصاص داد.» در ادامه این گزاره، جدولی از ارزش‌های عددی هر حرف ارائه شده است. در این مدخل هیچ نامی

⁴⁰Addenda to Rara arithmetica

⁴¹Nikolaus Schneider

⁴²Maria Cunitz

⁴³Arithmetica oder Rechenbuch

⁴⁴Zedler

از کتاب‌های شولتسه به میان نیامده و در پایان، تنها به مجموعه «لذات ریاضی و فیزیکی»^{۴۵} اثر هارسدورفر^{۴۶} [۴] به عنوان منبع استناد اشاره شده است.

جدول و نمونه حساب الفبایی که هارسدورفر [۴، ص. ۳۶] ارائه کرده است، در اصل در انتهای بخش سوم کتاب درسی شولتسه، که در سال ۱۶۰۰ منتشر شد، ظاهر شده بود. شولتسه از ۲۴ حرف الفبای آلمانی به عنوان ارقام در دستگاه عددی مبنای بیست و چهار^{۴۷} بهره جست (جدول ۱).

جدول ۱: ارقام دستگاه مبنای بیست و چهار [۸].

ارزش عددی در مبنای ده	حرف معادل (رقم)	ارزش عددی در مبنای ده	حرف معادل (رقم)
۱	a	۱۳	n
۲	b	۱۴	o
۳	c	۱۵	p
۴	d	۱۶	q
۵	e	۱۷	r
۶	f	۱۹	s
۱۸	t	۲۰	v
۹	i	۲۱	w
۱۰	k	۲۲	x
۱۱	l	۲۳	y
۱۲	m		z

حرف «o» در این دستگاه، کارکردی دقیقاً معادل صفر در دستگاه دهدهی دارد: هرگاه این حرف در سمت راست حرف دیگری قرار گیرد، ارزش آن را ۲۴ برابر افزایش می‌دهد.

کارکرد این دستگاه با یک نمونه از رویه‌های تجاری بدین‌گونه نشان داده شده است:

«برای مثال، شخصی در لگنیتس. apkt. سنتنر، c. سنگ، f. پوند موم را به قیمت. drm. تالر و t. گروشن می‌خرد. شخص دیگری می‌خواهد در این معامله. g. سنتنر، e. سنگ، e. پوند از این موم را شریک شود. با این حال، خریدار دوم پیش‌تر ^{dtvkwikxk} _{hulff}. تالر به فروشنده بدهکار است. اکنون پرسش این است: او در قبال این موم و با احتساب بدهی پیشین خود، مجموعاً چه مبلغی باید بپردازد؟» (توضیح: در این متن، حروفی نظیر apkt یا drm نمایانگر اعداد در دستگاه مبنای ۲۴ شولتسه هستند، و واحدهایی چون سنتنر، سنگ، تالر و گروشن از واحدهای وزن و پول رایج در آن دوران بوده‌اند).

نماد Pfund نمایانگر پوند است که از یکاهای رایج جرم در آن دوران به شمار می‌رفت. جدول ۲ مقادیر بیان‌شده در دستگاه مبنای بیست و چهار و معادل‌های آن‌ها را در دستگاه دهدهی به نمایش می‌گذارد.

از آنجا که روابط

$$1 \text{ Centner} = 132 \text{ Pfund}$$

⁴⁵Delitiae mathematicae et physicae

⁴⁶Harsdörffer

⁴⁷quadrivigesimal

جدول ۲: مقادیر مفروض

بخش	مبنای ۲۴	مبنای ۱۰	یکا
مشتری اول			
	apkt	۲۲۱۴۶	سنتنر (Centner)
	c	۳	سنگ (Stein)
	f	۶	پوند (Pfund)
قیمت (Price)			
	drm	۲۷۰۰	تالر (Taler)
	t	۱۸	گروشن (Groschen)
مشتری دوم			
	g	۷	سنتنر (Centner)
	e	۵	سنگ (Stein)
	e	۵	پوند (Pfund)

و

$$1 \text{ Stein} = 24 \text{ Pfund}$$

برقرار است، کمیت بیان شده به صورت «apkt. سنتنر، c. سنگ، f. [پوند]» برابر با مقدار «hulff» پوند خواهد بود؛^{۴۸} به بیان دیگر، معادل با ۲۹۲۳۳۵۰ پوند در دستگاه ددهی است. همچنین، کمیت «g. سنتنر، e. سنگ، e. پوند» برابر با «aus» پوند، یعنی معادل با ۱۰۴۹ پوند است. همچنین، با توجه به اینکه

$$1 \text{ Taler} = 36 \text{ Groschen}$$

است، مبلغ بیان شده به صورت «drm. تالر، t. گروشن» با مقدار «gott» گروشن برابری می‌کند؛ بدین معنا که در دستگاه ددهی معادل با ۹۷۲۱۸ گروشن خواهد بود. (به جدول ۳ رجوع کنید).

جدول ۳: مسئله‌ای که باید از طریق قاعده سه حل شود.

	مقدار برحسب پوند (Pfund)	بها برحسب گروشن (Groschen)	
مشتری اول	hulff	gott	
مشتری دوم	aus	?	

^{۴۸} مگر در مواردی که عین عبارتی نقل قول شده باشد، نگارنده اعدادی را که در دستگاه مبنای ۲۴ بیان شده‌اند، در میان گیومه‌های تکی قرار خواهد داد تا بدین طریق، از بافتار معمول متن متمایز گردند.

راه حل این مسئله، کاربست قاعده^{۴۹} به منظور محاسبه بهای مومی است که مشتری دوم خریداری می کند؛ پس از آن، باید مقدار بدهی را نیز به آن افزود. این محاسبه به چند گام تقسیم می شود [۸]:

۱- عدد «aus» با استفاده از رویه استاندارد ضرب در عدد «gott» ضرب می شود؛ بدین معنا که مضروب «aus» در تک تک ارقام مضروب فیه «gott» ضرب شده و، همان گونه که در دستگاه ددهمی مرسوم است، حاصل ضرب های جابه جاشده با یکدیگر جمع می گردند (به حروف «u» و «v» ارزش عددی یکسانی اختصاص یافته است):

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 & a & u & s \\
 & g & o & t \quad t \\
 \hline
 & a & h & t \quad t \\
 & a & h & t \quad t \\
 m & s & z & o \\
 \hline
 m & v & i & c \quad m \quad t
 \end{array}
 \end{array}$$

۲- عدد «dtvkwixk»، که در بیان میزان بدهی به کار رفته است، به حاصل ضرب دست آمده افزوده می شود و حاصل جمع «dtvzqtpkd» را به دست می دهد.^{۵۰}

۳- این حاصل جمع بر «hulff» تقسیم می شود. این محاسبه با استفاده از روش گالی (که در سراسر کتاب به وفور کاربرد دارد) انجام می پذیرد.

^{۴۹} این رویه، روشی متداول برای یافتن متناسب چهارم در شرایطی است که سه مقدار دیگر معلوم باشند. اساس این روش بر این اصل ریاضی استوار است که در صورت برابری دو نسبت، حاصل ضرب طرفین و وسطین آنها نیز با یکدیگر برابر خواهد بود. در مسئله مورد بحث، بهای مجهول از طریق رابطه $aus \times gott/hulff$ محاسبه می گردد.
^{۵۰} روش گالی (galley method) یک تکنیک دستی برای عمل تقسیم است که در حوالی سال ۱۶۰۰ میلادی رواج گسترده ای داشت. در این روش، مقسوم علیه در زیر مقسوم نوشته می شود و یک کمان، محل قرارگیری ارقام خارج قسمت را مشخص می کند. نتایج جزئی در بالای مقسوم نوشته می شوند، در حالی که خط زدن ارقام استفاده شده، به پیگیری روند محاسبه کمک می کند.
در مثال فوق، قرار است عدد «dtvzqtpkd» بر «hulff» تقسیم شود. مراحل اولیه این رویه به شرح زیر است: حرف «n» (معادل عدد ۱۳ در دستگاه ددهمی) را در جایگاه خارج قسمت بنویسید و با ضرب کردن هر حرف مقسوم علیه در این مقدار، کار را ادامه دهید. از آنجا که $n \times h = dh$ (یعنی ۱۰۴) است، و تفاضل میان «dt» (یعنی ۱۱۴) و «dh» برابر با «k» (یعنی ۱۰) می شود، حرف «k» را بالای «dt» بنویسید. در حالت معمول، حروف «dt» از مقسوم و حرف «h» از مقسوم علیه باید خط بخورند (که این امر در مثال شولتسه نشان داده نشده است). حرف «v» از مقسوم نیز (به طور حشو و اضافی) در قسمت بالا نوشته می شود. اکنون، $n \times v = kv$ (یعنی ۲۴۷) است و تفاضل میان «kv» و «kg» برابر با «m» (یعنی ۱۲) می شود. با تصور اینکه «kv» از سطح بالای مقسوم و «v» از مقسوم علیه خط خورده اند، حرف «m» را در بالا بنویسید. در هر مرحله، عدد باقی مانده تقلیل می یابد تا در نهایت، خارج قسمت نهایی و باقی مانده به دست آیند.

شکل نهایی حاصل از این محاسبه، به پیکره یک کشتی گالی شباهت دارد (و وجه تسمیه این روش نیز از همین جا نشأت می گیرد). ارقام نشان دهنده باقی مانده در لبه بالایی نوشته می شوند. در این مثال، رویه معمول خط زدن ارقام استفاده شده حذف گردیده و پیکربندی و ساختار کلی کمی فشرده شده است (ارقام تکراری در ستون ها تنها یک بار نوشته شده اند).

l
 $a \quad v \quad l$
 $f \quad f \quad r \quad a \quad q$
 $g \quad g \quad o \quad b \quad x \quad e$
 $m \quad x \quad f \quad f \quad x \quad k$
 $k \quad v \quad o \quad i \quad m \quad b \quad y \quad r$
 $d \quad t \quad v \quad z \quad q \quad t \quad p \quad k \quad d \quad (\quad n \quad o \quad t \quad t$
 $h \quad u \quad l \quad f \quad f \quad f \quad f \quad f$
 $h \quad u \quad l \quad f \quad f \quad f$
 $h \quad u \quad l \quad l$
 $h \quad u$

خارج قسمت این عملیات، کلمه «nott» و باقی مانده آن «aller» است. پرواضح است که در اینجا، بازی با کلمات از دلالت کاربردی مثال اهمیت بیشتری دارد. با این وجود، این محاسبه فرصتی را فراهم آورد تا نشان داده شود که عملگرهای بنیادین حساب در یک دستگاه اعداد ارزش مکانی با مبنایی غیر از ۱۰ نیز قابل اجرا هستند. جالب توجه است که شولتسه، فارغ از جدول اعداد (جدول ۱)، نیازی به توضیح چگونگی تبدیل اعداد میان دستگاه‌های مبنای ۲۴ و دهدهی ندیده است و مثال او صرفاً با استفاده از دستگاه الفبایی ابداعی خودش طرح و حل می‌شود.

همین مثال در کتاب درسی سال ۱۵۸۴ شولتسه نیز یافت می‌شود، اما در صورت مسئله و محاسبات آن خطاهایی به چشم می‌خورد^{۵۱} که در چاپ ۱۶۰۰ اصلاح شده‌اند. مراحل این رویه در نسخه پیشین در قالب یک منظومه بیان شده‌اند، در حالی که این شعر در چاپ متأخرتر حذف شده است [۷]:

«هر مسئله‌ای را به شیوه قاعده سه حل کن / تا پاسخ بر تو آشکار گردد.

جملات پسین و میانی را با یکدیگر ضرب کن / و بدهی پیشین را بر آن بیفزای.

سپس آن را آزادانه بر جمله نخستین تقسیم کن؛ / در باقی مانده کلمه «aller» ظاهر خواهد شد، و در خارج قسمت کلمه «not».

اکنون عبارت چنین خوانده می‌شود: خداوندا، ما را از هر تنگنایی برهان.

در اینجا به روشنی می‌توانی نظاره کنی / که ضرب و تقسیم چگونه انجام می‌پذیرند.»^{۵۲}

^{۵۱} مقدار موم برای نخستین مشتری برابر با «anda. سنتنر، c. اشتاین، f. پوند» فرض شده است؛ مقداری که در محاسبات، عملاً معادل hmkge پوند می‌شود و نه hulff پوند مورد انتظار. تناقض‌های دیگری نیز در عملیات ضرب و جمع به چشم می‌خورد که با توجه به جابه‌جایی سطرها در روش تقسیم گالی، احتمالاً می‌توان آن‌ها را به خطاهای چاپی نسبت داد. با این وجود، نتیجه نهایی دقیقاً همان چیزی است که ظاهراً مد نظر مؤلف بوده است.

^{۵۲} این یک شعر قدیمی آلمانی درباره قاعده سه است. متن اصلی:

Nach art der de Tri resolver/

Ein jed satzung/ so kömpt es dir.

Hinden und mit/ zasammen mir/

Vorige schuldt/ darzu adder.

Und teil denn in das förder frey/

علی‌رغم خطاهای یادشده، کتاب درسی سال ۱۵۸۴ شولتسه، به‌احتمال قوی، نخستین اثر چاپ‌شده‌ای است که در آن محاسبه در یک دستگاه ارزش مکانی با مبنایی غیر از ۱۰ به چشم می‌خورد.

۴. اهمیت اثر شولتسه

همان‌گونه که پیش‌تر اشاره شد، ملاحظات متافیزیکی نقش مشخصی در معرفی دستگاه‌های غیردهی در قرن هفدهم ایفا کردند. این پرسش مورد بحث قرار می‌گرفت که آیا هیچ مبنای خاصی در یک دستگاه ارزش مکانی وجود دارد که بتواند اهمیت اعداد را در ساختار جهان بهتر بازتاب دهد. شولتسه با دقت میان خود اعداد و بیان انضمامی آن‌ها تمایز قائل می‌شد: «طبیعت و تجربه روزمره به ما می‌آموزند که ما به اعداد معینی پیوند خورده‌ایم، اما نه به نمادها یا ارقام یکنواخت و همسان» [۸]. برای نمایش یک عدد راه‌های بسیاری وجود دارد؛ از رسم ساده خطوط یا دیگر نشانه‌ها گرفته تا استفاده از اعداد رومی یا یک دستگاه ارزش مکانی. از دیدگاه شولتسه، دستگاه دهدهی از منظر کاربردی، راحت‌ترین و کارآمدترین دستگاه ثابت شده است.

مثال او عمدتاً در پی آن بود که نشان دهد در دستگاهی با مبنای غیردهی نیز انجام محاسباتی مشابه با دستگاه دهدهی امکان‌پذیر است. باید تأکید کرد که شمارش در مبناهایی غیر از ۱۰ در آن زمان کاملاً نامرسوم بوده است. این احتمال وجود دارد که خوانندگان، مثال ارائه‌شده را صرفاً به‌عنوان یک شگفتی و موضوعی کنجکاوی‌برانگیز تلقی کرده باشند.

کتاب درسی شولتسه بار دیگر در سال ۱۶۱۱ منتشر شد. در سال ۱۶۳۶، مجموعه جامعی از مسائل گوناگون ریاضی و فیزیک تحت عنوان لاتین «لطایف و سرگرمی‌های فیزیکی-ریاضی»^{۵۳} به چاپ رسید. نویسنده آن، دانیل شونت^{۵۴}، استاد زبان‌های شرقی و ریاضیات در دانشگاه آلتدورف^{۵۵} بود. گئورگ فیلیپ هارسدورفر، شاعر اهل نورنبرگ، مجموعه شونت را با افزودن دو مجلد دیگر بسط داد و کل این اثر طی دو ویرایش دیگر در سال‌های ۱۶۵۱-۱۶۵۳ و ۱۶۷۷ منتشر گردید.

مسئله شماره ۳۵ که در جلد دوم منتشر شد [۴، ص. ۳۶]، همان مسئله‌ای بود که در بالا شرح داده شد و عیناً از کتاب درسی سال ۱۶۰۰ شولتسه [۸] اقتباس شده بود. اگرچه مجموعه شونت و هارسدورفر از محبوبیت قابل توجهی برخوردار بود، اما مثال شولتسه بازخورد چندانی دریافت نکرد. ریاضی‌دانان قرن هفدهم که با دستگاه‌های اعداد غیردهی سروکار داشتند، احتمالاً از کارهای شولتسه بی‌اطلاع بوده‌اند.

Am Rest wird das wort aller sein/
 Zum Quotient/ das wörtlein not/
 Nun heists/ hilff Gott aus aller not.
 Kanst es hierunden klerlich sehn/
 Wie mehren und teilen geschehn.

⁵³Deliciae Physico-Mathematicae

⁵⁴Daniel Schwenter

⁵⁵Altdorf

یکی از کسانی که با آثار شولتسه آشنایی داشت، یوهان کریستیان لانگه^{۵۶} (۱۶۶۹-۱۷۵۶)، استاد فلسفه اخلاق در دانشگاه گیسن^{۵۷} و پیرو مکتب پیه‌تیسیم^{۵۸}، بود که در سال ۱۷۰۲ با نام مستعار ایزیدوروس کاریزیوس لوگوتتا^{۵۹} کتابی قابل‌توجه با عنوان «الهیات مسیحی در اعداد»^{۶۰} منتشر کرد. هدف لانگه نشان‌دادن اهمیت نمادگرایی عددی در الهیات بود. روش او مبتنی بر تقلیل اعداد چندرقمی به یک‌رقمی از طریق محاسبه مجموع ارقام بود. ایراد اساسی به این روش آن است که آیا بیان اعداد در دستگاه دهدهی، که صرفاً یک قرارداد است، می‌تواند به‌عنوان شالوده‌ای برای بیان حقایق الهی عمل کند یا خیر. لانگه [۶]، ص. ۵۰ از آثار وایگل و شولتسه [۸] در زمینه دستگاه‌های اعداد غیردهی آگاه بود؛ با این وجود، او برخلاف وایگل و شولتسه، به جایگاه ممتاز دستگاه دهدهی متقاعد شده بود.

بنابراین، هرچند آثار شولتسه (همانند مورد هریوت) کاملاً ناشناخته نبود، اما احتمالاً تأثیری بر توسعه بعدی ریاضیات نگذاشته است. با این حال، او سزاوار است در زمره پیشگامانی قرار گیرد که برای نخستین‌بار اندیشه امکان بیان اعداد را در دستگاه‌های غیردهی مطرح کردند.

سپاس‌گزاری

از داوران محترم این مقاله به‌خاطر نقدهای سودمند و پیشنهادهای ارزشمندشان که به بهبود کیفیت این اثر کمک شایانی کردند، صمیمانه سپاس‌گزاری می‌شود.

مترجم اعلام می‌دارد که در تهیه پیش‌نویس و ویرایش زبانی نسخه اولیه این مقاله، از ابزارهای هوش مصنوعی ChatGPT استفاده کرده است. با این حال، محتوای نهایی به‌دقت توسط وی بازبینی، ویرایش و تأیید شده است تا از دقت و صحت علمی متن اطمینان حاصل شود.

مراجع

1. H. Bahlow, *Die Anfänge des Buchdrucks zu Liegnitz*, Mitt. Geschichts.- Altertums-Ver. Liegnitz **11** (1926), 1-40.
2. M. Brancato, *Leibniz, Weigel and the birth of binary arithmetic*, Lexicon Philosophicum **4** (2016) 152-172.
3. A. Glaser, *History of binary and other nondecimal numeration*, Tomash Publishers, 1981.
4. G.P. Harsdörffer, *Delitiae mathematicae et physicae*, Vol. 2, Jeremia Dümmler, 1651.
5. D.E. Knuth, *Review of History of binary and other nondecimal numeration*, by Anton Glaser, *Historia Math.* **10** (1983), 236-243.
6. J.C. Lange, *Theologia christiana in numeris*, Frankfurt am Main and Leipzig, 1702.
7. A. Schultze, *Rechenbuch auf Müntz vnd gewicht in Schlesien*, Andreas Eichhorn, 1584.
8. A. Schultze, *Arithmetica oder Rechenbuch*, Nikolaus Schneider, 1600.

⁵⁶Johann Christian Lange

⁵⁷Gießen

⁵⁸pietist

⁵⁹Isidorus Charisius Logotheta

⁶⁰Theologia christiana in numeris

9. G. Schuppener, *Intellectus igitur, non reperit, sed facit Numeros. Caramuels Reflexionen über das Zahlensystem*, in P. Dvořák and J. Schmutz (eds.), *Juan Caramuel Lobkowitz: The last scholastic polymath*, Filosofia, 2008, 219–234.
10. G. Schuppener, *Anthonius Schultzes “Arithmetica Oder Rechenbuch”*, in R. Gebhardt (ed.), *Kaufmanns-Rechenbücher und mathematische Schriften der frühen Neuzeit*, Annaberg-Buchholz, 2011, 141–152.
11. J.W. Shirley, *Binary numeration before Leibniz*, Amer. J. Phys. **19** (1951), 452–454.
12. D.E. Smith, *Addenda to Rara Arithmetica*, Ginn and Company, 1939.
13. L. Strickland, *Why did Thomas Harriot invent binary?*, Math. Intelligencer **46** (2023), no. 4, 1–6.
14. L. Strickland, *Leibniz on number systems*, in B. Sriraman (ed.), *Handbook of the history and philosophy of mathematical practice*, Springer, 2024, 167–197.
15. L. Strickland and H. R. Lewis, *Leibniz on binary: The invention of computer arithmetic*, The MIT Press, 2022.
16. J. Tropicke, *Geschichte der Elementarmathematik. Band 1: Arithmetik und Algebra*, 4. Aufl., De Gruyter, 1980.
17. H.J. Zacher, *Die Hauptschriften zur Dyadik von G. W. Leibniz. Ein Beitrag zur Geschichte des binären Zahlensystems*, V. Klostermann, 1973.
18. J. H. Zedler, *Grosses vollständiges Universal-Lexicon aller Wissenschaften und Künste*, Vol. 35, Leipzig, 1743.



AN EARLY EXAMPLE OF A NONDECIMAL POSITIONAL NUMBER SYSTEM

AKBAR AMIRI

^{1,2}Department of Mathematics, Tal.C., Islamic Azad University, Talesh, Iran.
ak.amiri@iau.ac.ir

Abstract. The idea of nondecimal number systems was developed during the 17th century by several mathematicians, especially by Thomas Harriot, Gottfried Wilhelm Leibniz, Juan Caramuel y Lobkowitz and Erhard Weigel. Already at the end of the 16th century, a German mathematician Anton Schultze described the base-24 positional number system and showed the basic arithmetic operations in this system. Schultze did so in an example that he included in his textbook of commercial arithmetic published in 1584 and -in a slightly modified form -in an extended version of the textbook that appeared in 1600.

2020 Mathematics Subject Classification. 01A40; 01A45; 11A99; 00A08

Keywords. Nondecimal number systems; Quadrivigesimal system; Anton Schultze; Commercial arithmetics

Date: Received 01-05-2026 Revised 15-05-2026 Accepted 21-06-2026 Available Online 21-06-2026

©Ferdowsi University of Mashhad.



به یادبود: جیم بنت (۱۹۴۷-۲۰۲۳)

حسین عزیزی*

گروه ریاضی کاربردی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

hossein.azizi@iaau.ac.ir

چکیده. این مقاله به بررسی حیات و میراث علمی جیم بنت (۱۹۴۷-۲۰۲۳)، مورخ برجسته علم و چهره‌ای تأثیرگذار در عرصه تاریخ ریاضیات و موزه‌داری علمی می‌پردازد. بنت با تمرکز بر «هندسه عملی» در دوره رنسانس، تفسیری بدیع از جایگاه ریاضیات در طلوع عصر مدرن ارائه داد. وی نشان داد که ریاضیات نه یک رشته منزوی و صرفاً نظری، بلکه کنشی است که پیوند عمیقی با ابزارها، فنون، حرفه‌ها و بسترهای اجتماعی دارد. او با تأکید بر نقش محوری ابزارهای ریاضیاتی، از اسطرلاب‌ها و کره‌های جغرافیایی گرفته تا ابزارهای نقشه‌برداری، استدلال کرد که این مصنوعات تاریخی در شکل‌دهی به هویت رشته‌ای ریاضیات و بسط دامنه آن، به اندازه متون نظری حائز اهمیت بوده‌اند. پژوهش حاضر همچنین نشان می‌دهد که وی چگونه با پیوند دادن هدفمند اشیای تاریخی، متون هم‌عصر و مسیر شغلی کارورزان ریاضیات، توانست مرزهای سنتی رشته‌ای را درنوردیده و ماهیت پویای تکاپوی ریاضیاتی را تبیین نماید.

جیم بنت^۱ مدیر موزه‌ای برجسته بود که سابقه فعالیت در موزه‌های ملی و دانشگاهی بریتانیا را در کارنامه خود داشت. او که در سطح بین‌المللی به‌عنوان یک متصدی پیشگام در این عرصه شناخته می‌شد، در مقام یک مورخ علم نیز تأثیری شگرف از خود بر

این مقاله ترجمه مقاله زیر می‌باشد:

S. Johnston, *In memoriam: Jim Bennett (1947–2023)*, *Historia Math.* **71** (2025), 74–77.

2020 Mathematics Subject Classification. 01A55

واژگان کلیدی. جیم بنت، تاریخ ریاضیات، ابزارهای ریاضی، کارورزان ریاضی، هندسه عملی.

تاریخ: دریافت ۱۴۰۴/۱۲/۱۲ بازنگری ۱۴۰۵/۰۳/۰۱ پذیرش ۱۴۰۵/۰۳/۳۱ انتشار برخط ۱۴۰۵/۰۳/۳۱

نحوه ارجاع به این مقاله: ح. عزیزی، به یادبود: جیم بنت (۱۹۴۷-۲۰۲۳)، به سوی علوم ریاضی، ۶ (۱۴۰۵)، شماره ۱،

۵۲-۶۰.

©دانشگاه فردوسی مشهد.

¹Jim Bennett

جای گذاشت. اگرچه او در ابتدا قصد نداشت به یک مورخ ریاضیات تبدیل شود، اما علاقه‌مندی‌اش به ابزارهای علمی باعث شد تا به شکلی متقاعدکننده از بُعد عملی ریاضیات در اوایل دوران مدرن دفاع کند. وی با مهارتی مثال‌زدنی نشان داد که چگونه می‌توان اشیای تاریخی را به‌طور مؤثری با متون هم‌عصر آن‌ها و همچنین مسیر شغلی کارورزان پیوند داد تا از این رهگذر، اهمیت والاتر آن‌ها را در تبیین ماهیت در حال تغییر تکاپوی ریاضیاتی آشکار ساخت.

از همان آغاز، پژوهش‌هایش او را به عبور از مرزهای رشته‌ای مدرن سوق داد تا به جست‌وجوی دانش و کنشی پردازد که شخصیت‌های تاریخی در واقعیت زندگی خود آن را درک و تجربه کرده بودند. رساله دکتري او در دانشگاه کمبریج به سال ۱۹۷۴، درباره کریستوفر رن^۲ بود. این رساله با بهره‌گیری از دسته‌بندی فراگیر علوم ریاضی در آن دوران، پیوندی سازنده میان دو جنبه از مسیر شغلی رن برقرار کرد؛ جنبه‌هایی که غالباً به‌صورت مجزا در نظر گرفته می‌شدند: نخست فعالیت‌های او به‌عنوان یک اخترشناس و سپس نقش (بسیار مشهورتر) او به‌عنوان یک معمار. تا زمانی که این رساله دکتري مورد بازنگری قرار گرفت و در سال ۱۹۸۲ با عنوان «علوم ریاضی کریستوفر رن» منتشر شد، جیم به کمبریج بازگشته بود؛ او پیش از آن، تجربه تدریس پیاپی در دانشگاه آبردین^۳، فعالیت به‌عنوان بایگان در انجمن سلطنتی اخترشناسی و همچنین ایفای نقش به‌عنوان متصدی اخترشناسی در موزه ملی دریانوردی گرینویچ^۴ را از سر گذرانده بود. وی از سال ۱۹۷۹ تا ۱۹۹۴ متصدی موزه تاریخ علم ویپل^۵ در کمبریج بود و در آنجا برنامه‌ای پویا و مستمر برای برگزاری نمایشگاه‌ها و تدوین کاتالوگ‌ها به اجرا درآورد. او سپس به آکسفورد رفت تا مدیریت موزه تاریخ علم را بر عهده بگیرد. در آنجا، وی رهبری یک پروژه توسعه و بازسازی به مناسبت آغاز هزاره را بر دوش داشت که این ساختمان ۳۰۰ ساله و همچنین جایگاه عمومی و دانشگاهی آن را دگرگون ساخت. پس از بازنشستگی در سال ۲۰۱۲، وی ابتدا به‌عنوان سرپرست مدعو در موزه علم لندن و پس از آن به‌عنوان رئیس انجمن هاگلویت^۶ به فعالیت پرداخت.

کوشش‌های خلاقانه و تدارکاتی برای برپایی نمایشگاه‌ها و توسعه مجموعه‌ها، آن هم توأمان با چالش‌های انسانی و مدیریتی رهبری سازمانی، شاید برای یک دوره فعالیت حرفه‌ای کافی به نظر برسد. اما جیم با وجود تمامی این مسئولیت‌ها، دست به انتشار آثار پرشماری در بالاترین سطح علمی زد. دستاوردهای پژوهشی او طیف وسیعی را دربرمی‌گرفت؛ از مطالعاتی در باب تاریخ اخترشناسی تا علم در ایرلند، از رابرت هوک^۷ تا تجارت ابزارهای علمی، و از استعاره‌های کتاب مقدسی دانش در اوایل دوران مدرن تا مجموعه‌های فلسفه تجربی. کاتالوگ‌های نمایشگاهی متعدد او گستره‌ای به‌مراتب وسیع‌تر را پوشش می‌دهند؛ از تاریخ اجتماعی میکروسکوپ تا مارکونی^۸ و ارتباطات بی‌سیم اولیه، و از نقشه‌برداری تا طیف‌سنجی. او همچنین آثار مروری و همه‌فهمی را به رشته تحریر درآورد که از کتاب «دایره مدرج: تاریخچه ابزارهای اخترشناسی، ناوبری و نقشه‌برداری (۱۹۸۷)»^۹ تا «ناوبری: یک معرفی بسیار کوتاه (۲۰۱۷)»^{۱۰} را شامل می‌شود.

²Christopher Wren

³Aberdeen

⁴Greenwich

⁵Whipple

⁶Hakluyt

⁷Robert Hooke

⁸Marconi

⁹The Divided Circle: A History of Instruments for Astronomy, Navigation and Surveying (1987)

¹⁰Navigation: A Very Short Introduction (2017)

آن بخش از آثار او که بیشترین ارتباط بنیادین را با تاریخ ریاضیات دارد، در قالب مجموعه‌ای از مقالات با تمرکز بر هندسهٔ عملی رنسانس^{۱۱} ارائه شد. در یک دیدگاه سنتی (یقیناً همان دیدگاهی که من چهل سال پیش از کتاب درسی تاریخ ریاضیات اثر کارل بی. بویر^{۱۲} آموختم)، دستاوردهای هنده در این دوره بسیار ناچیز انگاشته می‌شد. اما جیم، در نقطهٔ مقابل، این دوران را عصری فوق‌العاده پویا می‌دانست. او برای مطالعهٔ فنون ریاضی نظیر نقشه‌نگاری، کیهان‌نگاری، اخترشناسی، نقشه‌برداری، مغناطیس ناوبری و شاخص‌سازی یا هنر ساخت ساعت‌های آفتابی، به‌جای پرداختن به جوهرهٔ انتزاعی و بی‌زمان این رشته، به درک و تلقی خود ریاضیدانان (از حرفه‌شان) اتکا کرد. بررسی جامع این موارد، در کنار ابزارهای ریاضیاتی در معنای عام‌تر آن، نشان داد که کارورزان چگونه گسترهٔ هنده را بسط دادند، به ماهیت مترقی و پیش‌روندهٔ آن اطمینان یافتند و جایگاه فرهنگی برجسته و روزافزون آن را تثبیت نمودند. این حوزه، نه‌تنها از طریق جنگاوری، مدیریت اراضی و سفرهای دریایی در اقیانوس‌ها، بر جامعه، اقتصاد و امپراتوری‌های نوپا تأثیرگذار بود، بلکه رفته‌رفته به قلمرو فلسفهٔ طبیعی نیز نفوذ کرد؛ قلمرویی که دگرگونی آن به یک کنش تجربی، ریاضیاتی و مکانیکی، همچنان یکی از اهداف تبیینی محوری در تاریخ علم به شمار می‌رفت.

جیم پیشتر مقالهٔ «فلسفهٔ مکانیک و فلسفهٔ مکانیکی»^{۱۳} [۲] را منتشر کرده بود که رویکردی روزآمد را دربارهٔ اصطلاحاً «تز زیلسل»^{۱۴} در خصوص سهم صنعتگران در انقلاب علمی ارائه می‌داد. او در تلاش برای غلبه بر تقابل بی‌حاصل میان اندیشمندان و پیشه‌وران، کارورزان ریاضیات را به‌عنوان گروهی متمایز برگزید؛ گروهی که با فرهیختگان در تعامل بوده و گهگاه با آن‌ها هم‌پوشانی داشتند، اما در عین حال، بخش عمده‌ای از آن‌ها از میان طبقات عالی صنعتگران برخاسته بودند. وی این رشته از کنش ریاضیاتی را در مقالهٔ «چالش ریاضیات عملی»^{۱۵} [۳] بسط داد. گرچه او اهل نگارش مقاله‌های موضعی یا بیانیه‌نویسی نبود و عموماً پیشبرد مباحث از طریق مطالعات موردی تاریخی را ترجیح می‌داد، اما این اثر با بیانیه‌ای روشن در باب ریاضیات دورهٔ رنسانس آغاز می‌شود و آن را از طریق جهت‌گیری عمیقاً عملی‌اش و همچنین فاصله‌اش از فلسفهٔ طبیعی توصیف می‌کند. به ما هشدار داده می‌شود که تصورات متأخر از ریاضیات به‌عنوان یک فعالیت فکری «محض» و کاملاً دور از جهان زندگی روزمره را کنار بگذاریم و همچنین از این باور رایج که ریاضیات الزاماً ساختار منطقی و استنتاجی برای نظریهٔ علمی را فراهم می‌آورد، عبور کنیم. چنین تحولی (در جایگاه ریاضیات) نیازمند تبیین بود، نه آنکه صرفاً مفروض در نظر گرفته شود.

او دیدگاه خود دربارهٔ ماهیت رشته‌ای و گسترهٔ ریاضیات را با ظرافت و از طریق مثال رگیومونتانوس^{۱۶} بیان کرد. رگیومونتانوس که امروزه بیشتر به‌عنوان یک اخترشناس شناخته می‌شود، خود را به‌عنوان یک ریاضیدان معرفی می‌کرد و برنامه‌ای برای انتشار آثار در سراسر حوزه‌های علوم ریاضی تدوین کرده بود. شهرت او در سراسر اروپا پیچید، اما وی چیزی فراتر از یک اندیشمند پیشرو بود. او با اقامت در نورنبرگ^{۱۷} که در آن زمان چهارراهی تجاری محسوب می‌شد، چاپخانهٔ اختصاصی خود را تأسیس کرد و کارگاهی برای ساخت ابزارهای ریاضیاتی به راه انداخت. نقش او به‌عنوان یک ریاضیدان-صنعتگر کارآفرین، توسط برجسته‌ترین پیروان آلمانی‌اش تا قرن شانزدهم میلادی تداوم یافت.

¹¹Renaissance

¹²Carl B. Boyer

¹³The Mechanic's Philosophy and the Mechanical Philosophy

¹⁴Zilsel thesis

¹⁵The Challenge of Practical Mathematics

¹⁶Regiomontanus

¹⁷Nuremberg

تحلیل بنت از قلمرو فراگیر علوم ریاضی — قلمرویی که بعدها در پی تحولات رشته‌ای تجزیه شد — در مقاله‌ای با عنوان «تصویرگری و اهمیت فراگیر هندسه در رنسانس»^{۱۸} [۴] ادامه یافت. در اینجا، استعاره مکان نه تنها طیف موضوعات درون رشته ریاضی، بلکه نقشه‌نگاری را نیز به عنوان بازنمایی و دخل و تصرف در فضای جغرافیایی با بهره‌گیری از اشکال گوناگون تصویرگری هندسی دربرمی‌گرفت. جیم، با واژگون ساختن اولویت سنتی که در تاریخ علم به «المجسطی»^{۱۹} بطلمیوس^{۲۰} داده می‌شد، توجه خود را به سنت چایی به مراتب پویاتر کتاب جغرافیای او معطوف کرد؛ اثری که چاپ‌های اولیه متعددش از حیث نقشه‌هایی که در برداشتند و همچنین گنجاندن مؤلفه‌هایی فراتر از مرزهای جهان کلاسیک، پیوسته از یکدیگر پیشی می‌گرفتند. در اینجا، «مکان» به عنوان یک مقوله تحلیلی، مراکز اروپایی را نیز دربرمی‌گرفت که به طور خاص بستر رشد فنون ریاضی بودند؛ نه فقط نورنبرگ برای نجوم، ساعت‌سازی آفتابی و ابزارسازی، بلکه فلورانس برای نقشه‌نگاری و پرسپکتیو^{۲۱}، و لوون^{۲۲} برای مساحی و طراحی ابزار، تا لندن که در اواخر قرن شانزدهم به عنوان تازه‌واردی به این جمع پیوست. بنت با تکیه بر تجربه متصدی‌گری خود، به روشنی بر محوریت ابزارها در این نگرش رنسانسی به هندسه عملی تأکید داشت. از نظر او، ابزارها را نه محصولات جانبی تحولات هندسی، بلکه باید «بخشی از سازوکار سامان‌دهی این رشته» به شمار آورد. «ابزارپذیر ساختن یک فن هندسی، بخش مهمی از هویت یک هندسه‌دان را تشکیل می‌داد».

این بُعد ابزاری در اثر دیگری از همان سال با عنوان «هندسه عملی و دانش کنش‌ورزانه»^{۲۳} [۵] در کانون توجه قرار گرفت. این مقاله که در چارچوب گذار از ایده به عمل و از تفکر به کنش تعریف می‌شد، پیش از پرداختن به ابزارهایی چون کره‌ها و اسطرلاب‌ها، کتاب جغرافیای بطلمیوس را با جزئیات بیشتری بررسی می‌کرد. این ابزارها که عمدتاً از فلسفه طبیعی آن روزگار گسسته بودند، می‌بایست بیش از آنکه مدل‌هایی مبین حقیقت باشند، ابزارهایی کارآمد برای حل مسئله تلقی شوند؛ از این رو، چرخش یک کره جغرافیایی به دور محور خود، هیچ چالشی برای نظریه مرسوم زمین‌ایستایی ایجاد نمی‌کرد. اما این گسست یک محدودیت نبود؛ بلکه، عرصه‌ای از آزادی را برای نوآوری می‌گشود، البته با این قید که گاهی جنبه عملی بودن این ابزارها می‌توانست بیشتر بلاغی باشد تا واقعی. پرداختن به نبوغ و پیچیدگی این حوزه می‌توانست شکافی بزرگ را در تاریخ‌نگاری پر کند: «ما شاهد شکوفایی چشمگیری در عرصه طراحی، ساخت و کاربرد ابزارهای ریاضیاتی بودیم که این فعالیت در آثار مورخان بازتاب چندانی نیافته و به متصدیان، مجموعه‌داران و خبرگان واگذار شده است».

در اینجا، مخاطب مدنظر از میان مورخان، همچنان مورخان علم بودند. چند سال بعد، او آشکارا به سراغ حوزه تاریخ ریاضیات رفت. در مقاله «هندسه در بستر تاریخی قرن شانزدهم: نگاهی از موزه»^{۲۴} [۶]، تقابل دیدگاه‌ها میان متصدیان و «شارحان رشته سنتی و جریان اصلی تاریخ ریاضیات» شکل می‌گیرد. فراخوان او برای تاریخ ریاضیاتی عاری از زمان‌پریشی — یا دست‌کم غیرمتعهد به آن — به خودی خود امر تازه‌ای نبود. بیست سال پیش از آن نیز بسیاری دیگر از این دیدگاه دفاع می‌کردند، اما دعوت آنان عموماً معطوف به یک تاریخ فکری ظریف‌بینانه‌تر بود. سهم بنت در این بود که نشان دهد ابزارها (و کاربست‌ها، متون و کارورزان همراهشان) منابعی ارزشمند برای پیریزی این پروژه تاریخی کلان‌تر هستند. ابزارها به همان اندازه رساله‌ها، اصطلاحات و نمودارها، به تکوین رشته‌ای ریاضیات عمق بخشیدند و در عین حال، پلی به بیرون و به سوی جامعه بزرگ‌تر مورخان عمومی برقرار کردند [۹].

¹⁸Projection and the Ubiquitous Virtue of Geometry in the Renaissance

¹⁹Almagest

²⁰Ptolemy

²¹Perspective

²²Louvain

والترین افتخارات جیم در حوزه تاریخ علم (مهم‌تر از همه، مدال سارتن^{۲۳} «انجمن تاریخ علم» در سال ۲۰۲۰) و در تاریخ نجوم به او اعطا شد: آخرین حضور عمومی او برای دریافت مدال «اگنس مری کلرک»^{۲۴} برای پژوهش‌های تاریخی از سوی انجمن سلطنتی نجوم در ژوئیه ۲۰۲۳ بود؛ زمانی که تأثیرات درمان طولانی‌مدت سرطان بر سیستم ایمنی بدنش، حضور در تجمعات بزرگ را برای او به امری پرخطر بدل ساخته بود. با این حال، پیگیری او در زمینه هندسه عملی به شناسایی او در حوزه تاریخ ریاضیات نیز انجامید. او که برای ارائه «سخنرانی کنت اُ. می»^{۲۵} در دانشگاه هالیفاکس نوا اسکوشیا^{۲۶} دعوت شده بود، از این فرصت بهره برد تا به بررسی این موضوع بپردازد که آن چشم‌انداز فراگیر و شاخص دوران رنسانس، که خود آن را به روشنی ترسیم کرده بود، چگونه در سده‌های بعدی دگرگون شد. هرچند ظهور اشکال نوین ریاضیات در نهایت آن چشم‌انداز را از میدان به در می‌کرد، اما بنت با بررسی نمونه نمادین ناوبری نشان داد که چگونه، علی‌رغم تحولات در کاربست و حرفه‌ای‌گری، پژواک آن دیدگاه تا قرن هجدهم همچنان طنین‌انداز بود [۷].

واپسین اثری که جیم بنت به زیور طبع آراست، فهرست‌نامه (کاتالوگ) او از «ابزارهای نقشه‌برداری و ابزارهای وابسته» در موزه گالیه فلورانس بود [۱۲]. شاید در نگاه نخست چنین اثری از دغدغه‌های اصلی تاریخ ریاضیات دور به نظر برسد، اما همان‌طور که خود او در جلسه‌ای در اوبرولفاخ^{۲۷} حین بحث درباره این پروژه اشاره کرد: «این مجموعه، منبعی برای تأمل در باب سرشت ریاضیات در سده‌های شانزدهم و هفدهم است... آنچه این مجموعه فراهم می‌آورد، یک زمینه، یک چارچوب و یک بستر برای اندیشیدن و گفت‌وگوست؛ ابزاری برای یافتن پیوندها و آزمودن ویژگی‌ها» [۱۱]. این سخنان مشخصاً درباره مجموعه‌ای بود که خاندان مدیچی^{۲۸} در موزه گالیه گرد آورده بودند؛ مجموعه‌ای که علایق و ارزش‌های خالقان شاهزاده‌تبار خود را حفظ کرده بود. با این حال، این گفته‌ها به‌طور کلی، بیانگر ارزش مجموعه‌ها هستند. او در همان جلسه، جایگاه شئی‌پژوهی را ارتقا بخشید و چنین گفت: «می‌توان در دل یک مجموعه از ابزارها، گفتمانی هم‌ارز با تحلیل یک متن برقرار کرد و... این کار می‌تواند مبتنی بر شیوه‌های سنتی فرهنگ موزه‌داری باشد — یعنی دانشی از مجموعه که از دقت علمی فهرست‌نگاری برآمده است.»

اما آن اثر واپسین، پایان ماجرا نیست. درست هم‌زمان با نگارش این یادنامه، نسخه‌ای از کتاب «فراسوی آکادمی فرهیخته: کاربست ریاضیات، ۱۶۰۰–۱۸۵۰»^{۲۹} اثر فیلیپ بیلی و کریستوفر هولینگز^{۳۰} به دستم رسید. نخستین مقاله این مجموعه به قلم جیم و درباره جان دیویس^{۳۱}، دریانورد دوره الیزابت^{۳۲} است. اثری دیگر از او نیز به‌تازگی با عنوان «کاربست و حرفه (۱۴۵۰–۱۶۸۷): گستره و دگرگونی در زندگی‌های ریاضی»^{۳۳} در کتاب «تاریخ فرهنگی ریاضیات در دوره مدرن نخستین»^{۳۴} به ویراستاری ژان پایفر

²³Sarton

²⁴Agnes Mary Clerke

²⁵Kenneth O. May Lecture

²⁶Nova Scotia

²⁷Oberwolfach

²⁸Medici

²⁹Beyond the Learned Academy: The Practice of Mathematics, 1600-1850

³⁰Philip Beeley and Christopher Hollings

³¹John Davis

³²Elizabethan

³³Practice and Profession (1450-1687): Range and Change in Mathematical Lives

³⁴A Cultural History of Mathematics in the Early Modern Period

و ولکر رمرت^{۳۵} منتشر شده است. این آثار، تسلائی برای ما و به مثابه گفتگویی دوباره با جیم هستند؛ فرصتی مغتنم برای آنکه بار دیگر، عمق نگاه نافذ و ویژه‌اش را تجربه کنیم و دلبستگی او به زندگی کارورزان غالباً گمنام ریاضیات را از نو دریابیم. فراتر از انتشارات دانشگاهی، ریاضیات در تعاملات عمومی او نیز نقش داشت و در بسیاری از نمایشگاه‌هایش نمود پیدا کرد. برجسته‌ترین نمونه، نمایشگاه «خدا حافظ تخته‌سیاه» بود که برای بزرگداشت صدمین سالگرد «سال اعجاز‌آمیز» اینشتین^{۳۶} در ۱۹۰۵ برگزار شد. این نمایشگاه که محوریت آن یک تخته‌سیاه پر از معادله (حفظ‌شده به‌عنوان یادگاری از سخنرانی‌های ۱۹۳۱ اینشتین در آکسفورد) بود، درست در زمانی که تخته‌سیاه‌ها در حال ناپدید شدن از اکثر فضاها و آموزشی بودند، به‌جای پیام، بر خود رسانه تأمل می‌کرد. جیم به گروهی از چهره‌های شناخته‌شده (از یک موسیقی‌دان، یک اسقف و یک سرآشپز گرفته تا یک روزنامه‌نگار، یک سیاستمدار و حتی سرمربی تیم ملی فوتبال انگلستان) سفارش داد تا روی تخته‌سیاه‌های خود با گچ بنویسند. به هر یک از آن‌ها با تخته‌ای هم‌اندازه تخته‌سیاه اینشتین، اختیار تام داده شد و او توانست مشارکت‌های علمی و ریاضیاتی درخوری را از رؤسای مجامع علمی نظیر انجمن سلطنتی، آکادمی سلطنتی و اخترشناس سلطنتی جلب کند [۸]. خارج از فضای موزه‌های دانشگاهی در آکسفورد و کمبریج، او در عرصه ملی نیز فعال بود و به‌عنوان مشاور در گالری جدید ریاضیات در موزه علم لندن فعالیت کرد و چارچوبی برای چشم‌انداز تاریخی آن فراهم آورد [۱۰].

من در اینجا بر آثار جیم که مرتبط با تاریخ ریاضیات است تمرکز کرده‌ام، بی‌آنکه ادعا کنم توانسته‌ام گستره کامل پژوهش‌ها و تدریس‌های او، یا فعالیت‌های متصدی‌گری و تعاملات عمومی‌اش را (چه رسد به خدمات او به رشته‌های متعددی که در مسیر شغلی‌اش با آن‌ها تلاقی داشت) پوشش دهم. اهمیت مشارکت‌های او را می‌توان از طریق یادنامه‌ها و تقدیرنامه‌های متعددی که تاکنون در جاهای دیگر منتشر شده یا در دست انتشار است، سنجد [۱۵، ۱، ۱۷، ۱۴، ۱۳]. شاید گویاترین نشانه از گستره تأثیر جیم، انتشار یادنامه‌ای صمیمانه در روزنامه ملی بریتانیایی، گاردین، باشد که علاوه بر دستاوردهای حرفه‌ای، زوایایی از زندگی و خانواده او را نیز روشن می‌سازد [۱۶]. این یادنامه همچنین بهترین مرجع برای درک خاستگاه جیم به‌عنوان یک پسر طبقه کارگر اهل بلفاست^{۳۷} است — پیش‌زمینه و وزنه‌ای متعادل‌کننده و ضروری برای مسیر شغلی‌ای که عمدتاً در مثلاً کمبریج، آکسفورد و لندن سپری شد — و نشان می‌دهد که چگونه این خاستگاه، شالوده منش جیم و انرژی، تخیل و شوخ‌طبعی او را که اکنون بسیار دلننگشان هستیم، پی‌ریزی کرد.

جیمز آرتور بنت، متولد بلفاست، ۲ آوریل ۱۹۴۷؛ درگذشته در آکسفورد، ۲۸ اکتبر ۲۰۲۳. بازماندگان او عبارتند از همسر دومش، سیلیویا سومیرا^{۳۸} (مرمت‌گره‌های تاریخی)، دو دخترش شیوان و یولاین^{۳۹} از ازدواج اولش با فرانس رامت^{۴۰} (که به جدایی انجامید)؛ چهار نوه؛ و خواهرش روت^{۴۱}.

سپاس‌گزاری

مترجم بر خود لازم می‌داند از داور محترم نشریه که با دقت نظر و نقدهای سازنده خود موجب ارتقای کیفیت این مقاله شد، صمیمانه تشکر کند. مترجم اعلام می‌دارد که در تهیه پیش‌نویس و ویرایش زبانی نسخه اولیه این مقاله، از ابزارهای هوش مصنوعی

³⁵Jeanne Peiffer and Volker Rimmert

³⁶Einstein

³⁷Belfast

³⁸Sylvia Sumira

³⁹Siobhan and Yolaine

⁴⁰France Ramette

⁴¹Ruth



شکل ۱: جیم بنت در کنار یک ذات‌الحلق دوران رنسانس، موزه تاریخ علم، دانشگاه آکسفورد. عکس از کیکو ایکه‌اوچی.

ChatGPT استفاده کرده است. با این حال، محتوای نهایی به‌دقت توسط وی بازبینی، ویرایش و تأیید شده است تا از دقت و صحت علمی متن اطمینان حاصل شود.

مراجع

1. R. Anderson, *Obituary: James Arthur Bennett (2 April 1947 – 28 October 2023)*, Bull. Sci. Instrum. Soc. **159** (2023), 23.
2. J. Bennett, *The mechanics' philosophy and the mechanical philosophy*, Hist. Sci. **24** (1986), 1–28.

3. J. Bennett, *The challenge of practical mathematics*, in *Science, Culture and Popular Belief in Renaissance Europe*, eds. S. Pumfrey, P. L. Rossi and M. Slawinski, Manchester University Press, 1991, pp. 176–190.
4. J. Bennett, *Projection and the ubiquitous virtue of geometry in the Renaissance*, in *Making Space for Science: Territorial Themes in the Shaping of Knowledge*, eds. C. Smith and J. Agar, Macmillan, London, 1998, pp. 27–38.
5. J. Bennett, *Practical geometry and operative knowledge*, *Configurations* **6** (1998), 195–222.
6. J. Bennett, *Geometry in context in the sixteenth century: the view from the museum*, *Early Sci. Med.* **8** (2002), 214–230.
7. J. Bennett, *Mathematics, instruments and navigation, 1600–1800*, in *Mathematics and the Historian's Craft: The Kenneth O. May Lectures*, eds. G. Van Brummelen and M. Kinyon, Springer, New York, 2005, pp. 43–55.
8. J. Bennett, *Bye-bye Blackboard ... from Einstein and Others*, 2005, available at <https://www.mhs.ox.ac.uk/blackboard>.
9. J. Bennett, *Early modern mathematical instruments*, *Isis* **102** (2011), 697–705.
10. J. Bennett, *Viewing the mathematical past: action, explanation, speculation*, in *Mathematics: How It Shaped Our World*, ed. D. Rooney, Scala and the Science Museum, London, 2016, pp. 174–177.
11. J. Bennett, *Mathematical instruments in Florence: a cataloguing project and its relevance for historians of the sixteenth century*, in *Mathematical Instruments between Material Artifacts and Ideal Machines*, eds. S. Gessner, U. Hashagen, J. Peiffer and D. Tournès, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, 2017, pp. 7–10, <https://doi.org/10.4171/OWR/2017/58>.
12. J. Bennett, *Museo Galileo: Catalogue of Surveying and Related Instruments*, Sillabe, Livorno, 2022.
13. S. Johnston, *Jim Bennett (1947–2023): Life as a museum practitioner*, *Sci. Museum Group J.* **21** (2024), 10.15180/242105.
14. D. Levitin, *Jim Bennett and John Heilbron as historians of science and intellectual historians*, 2024, available at <https://intellectualhistory.web.ox.ac.uk/article/jim-bennett-and-john-heilbron-as-historians-of-science-and-intellectual-historians>.
15. J. Nall, *Jim Bennett*, 2023, available at <https://www.hps.cam.ac.uk/news-events/jim-bennett>.
16. J. Nall, *Jim Bennett*, *The Guardian*, 30 December 2023, p. 8, available at <https://www.theguardian.com/science/2023/dec/19/jim-bennett-obituary>.
17. A. Roos, *Eloge to James (Jim) Arthur Bennett, 2 April 1947 – 28 October 2023*, *Notes Rec. Roy. Soc. J. Hist. Sci.* **78** (2024), 3–7, <https://doi.org/10.1098/rsnr.2023.0084>.



IN MEMORIAM: JIM BENNETT (1947–2023)

HOSSEIN AZIZI

Department of Applied Mathematics, PaM.C., Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran.
hossein.azizi@iau.ac.ir

Abstract. This paper explores the scholarly life and legacy of Jim Bennett (1947–2023), an eminent historian of science and a seminal figure in both the history of mathematics and scientific museology. Centering his inquiry on Renaissance “practical geometry,” Bennett advanced a novel interpretation of the epistemic status of mathematics at the dawn of the early modern period. He demonstrated that mathematics was by no means an isolated, purely theoretical discipline, but rather a practice deeply intertwined with instrumentation, artisanal techniques, professional trajectories, and broader socio-cultural contexts. Underscoring the pivotal role of mathematical instruments—ranging from astrolabes and globes to surveying devices—he posited that these material artifacts were as integral to the disciplinary formation and expansion of mathematics as conventional theoretical treatises. Furthermore, the present study elucidates how Bennett, through the deliberate synthesis of historical material culture, contemporaneous textual sources, and the career trajectories of mathematical practitioners, successfully transcended traditional disciplinary boundaries to articulate the highly dynamic nature of mathematical endeavor.

2020 Mathematics Subject Classification. 01A55

Keywords. Jim Bennett; History of mathematics; Mathematical instruments; Mathematical practitioners; Practical geometry

Date: Received 03-03-2026 Revised 22-05-2026 Accepted 21-06-2026 Available Online 21-06-2026

©Ferdowsi University of Mashhad.



الگوریتم‌ها: از دوران باستان تا عصر رایانه

جعفر الماسی‌زاده

گروه ریاضی کاربردی و علوم کامپیوتر، دانشکده ریاضی و آمار، دانشگاه اصفهان

j.almasizadeh@sci.ui.ac.ir

چکیده. در این مقاله به بررسی هفت الگوریتم قدیمی و برجسته می‌پردازیم که زمان کشف آنها به قرن‌ها قبل از اختراع رایانه برمی‌گردد. هدف اصلی از گزینش و معرفی این الگوریتم‌ها این است که خواننده متوجه این واقعیت شود که الگوریتم‌ها، گرچه به طور ضمنی، از دوران باستان مورد توجه ریاضیدانان بوده‌اند و این گونه نیست که بشر با اختراع رایانه پی به مفهوم الگوریتم برده باشد. با این نوشته خواننده می‌تواند از چشم‌اندازی تاریخی به الگوریتم‌ها بنگرد و قسمتی از مسیری را که الگوریتم‌دانان از ۴۰۰۰ سال قبل تاکنون پیموده‌اند ببیند. با این فرض که بیشتر خوانندگان این مقاله، افراد مشتاقی هستند که به تازگی پا در مسیر یادگیری الگوریتم‌ها گذاشته‌اند، همراه با ذکر نکات تاریخی، به جنبه‌های آموزشی و کاربردی هفت الگوریتم نیز می‌پردازیم. از جنبه آموزشی، نحوه طراحی هفت الگوریتم مبتنی بر رابطه‌های ریاضی بررسی می‌شود و از جنبه کاربردی، نحوه پیاده‌سازی هفت الگوریتم با زبان برنامه‌نویسی پایتون بررسی می‌شود. در پایان، چند نکته و پیشنهاد برای کسانی که می‌خواهند به بررسی دقیق‌تر الگوریتم‌ها از چشم‌انداز تاریخی بپردازند، بیان می‌شود.

۱. مقدمه

با اختراع رایانه در دهه ۱۹۴۰ میلادی انقلابی بزرگ در علم و فن‌آوری به وقوع پیوست. از آن زمان تاکنون، بشر به مدد رایانه‌ها به کشفیات شگرفی نائل شده است. ناگفته پیداست که رایانه ابزاری است در دست برنامه‌نویس و نوشتن برنامه‌های رایانه‌ای نیز مستلزم آگاهی برنامه‌نویس از الگوریتم‌های لازم است. آنقدر رایانه در زمینه‌های علمی مختلف (چه مهندسی، چه زیست‌شناسی، چه

2020 Mathematics Subject Classification. 01A99, 68W99, 97D50, 97P99

واژگان کلیدی. ریاضی، الگوریتم، مسأله، رایانه، تاریخ.
تاریخ: دریافت ۱۴۰۴/۱۱/۲۸ بازنگری ۱۴۰۵/۰۲/۱۰ پذیرش ۱۴۰۵/۰۳/۳۱ انتشار برخط ۱۴۰۵/۰۳/۳۱
نحوه ارجاع به این مقاله: ج. الماسی‌زاده، الگوریتم‌ها: از دوران باستان تا عصر رایانه، به سوی علوم ریاضی، ۶ (۱۴۰۵)، شماره ۱، ۸۳-۶۱.

© دانشگاه فردوسی مشهد.

اقتصاد یا هر زمینه دیگری) کاربرد پیدا کرده است که هیچ شخصی که به علم‌اندوزی در زمینه‌ای علمی مشغول باشد بی‌نیاز از دانستن الگوریتم‌ها نیست و در واقع، اصطلاح «الگوریتم» امروزه دست‌کم برای افرادی که به نحوی به موضوعات علمی و فن‌آورانه مشغول هستند، واژه‌ای به ظاهر آشنا است.

این مقاله قرار است افراد مشتاق را از جنبه تاریخی بیشتر با الگوریتم‌ها آشنا کند؛ با این توجیه که کسی که می‌خواهد عالمانه در زمینه‌ای علمی به تحقیق بپردازد لازم است با تاریخ شکل‌گیری و توسعه آن زمینه علمی آشنا باشد و زمینه علمی الگوریتم‌ها نیز از این قاعده مستثنی نیست. البته از آنجا که بررسی الگوریتم‌ها از چشم‌انداز تاریخی موضوعی آنقدر گسترده است که باید چند جلد کتاب را به آن اختصاص داد، ما در این مقاله تنها به بررسی چند نقطه عطف در تاریخ الگوریتم‌ها قبل از اختراع رایانه می‌پردازیم. نگاه از این چشم‌انداز تاریخی خواننده‌ای را که می‌خواهد پا به دنیای الگوریتم‌ها بگذارد، به میزانی متوجه خواهد کرد که بشر در طول تاریخ در چه بستری الگوریتم‌ها را کشف کرده است و در چه بستری الگوریتم‌ها را به کار برده است. از آنجا که در کنار بحث‌های تاریخی، نمی‌توان جنبه‌های آموزشی و کاربردی الگوریتم‌ها را نادیده گرفت، پس از بررسی تاریخی هر الگوریتم، به نحوه طراحی و پیاده‌سازی آن الگوریتم هم می‌پردازیم.

قبل از ورود به بحث درباره الگوریتم‌ها، ذکر نکاتی درباره واژه «الگوریتم» مفید به نظر می‌رسد. ریشه واژه algorithm نام ریاضیدان بزرگ ایرانی ابوجعفر محمد بن موسی خوارزمی (۷۸۰-۸۵۰) است. یکی از افرادی که خوارزمی را به دنیای غرب معرفی کرد، لئوناردو فیبوناچی^۱ بود. لئوناردو فیبوناچی (۱۱۷۰-۱۲۵۰) که از او به عنوان بزرگترین ریاضیدان اروپایی در قرون وسطی یاد می‌شود، دستگاه ارقام دهدهی (ارقام صفر تا نه) را به اروپاییان معرفی کرد. این دستگاه اعداد را برای اولین بار ریاضیدانان هندی بین قرن اول و قرن چهارم میلادی و بنا بر نقلی در قرن ششم میلادی ابداع و استفاده کردند. بعدها ریاضیدانان مسلمان مانند خوارزمی و ابویوسف یعقوب بن اسحاق کندی (۸۰۱-۸۷۳)، با الگوبرداری از روی نمادهای ارقام هندی و تغییر شکل آنها، نمادهای ارقام دهدهی را که ما امروزه استفاده می‌کنیم یعنی ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ را طراحی کردند و برای حساب استفاده کردند. فیبوناچی آن دستگاه اعداد را که به نام «اعداد عربی» در نزد مسلمانان رایج بود، در کتاب خود به نام «کتاب حساب»^۲ به اروپاییان معرفی کرد و بر سودمندی و سادگی آن برای انجام محاسبات نسبت به دستگاه اعداد رومی (که در آن زمان در اروپا برای حساب استفاده می‌شد و فوق‌العاده پیچیده و عملاً برای انجام عملیات حسابی روی اعداد کوچک مفید بود) تأکید کرد. پیشنهاد فیبوناچی مورد استقبال قرار گرفت و این دستگاه اعداد از قرن دوازدهم میلادی به بعد مورد استفاده ریاضیدانان اروپایی قرار گرفت و آنان از اواخر قرن پانزدهم میلادی شکل آنها را به نمادهای معادل 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 تغییر دادند.

فیبوناچی از بستر معرفی دستگاه اعداد دهدهی قسمتی از دستاوردهای علمی خوارزمی را نیز به دنیای غرب معرفی کرد. خوارزمی در کتاب‌های خود روش‌هایی را برای انجام عملیات حسابی جمع و ضرب و تقسیم و حتی محاسبه جذر اعداد و محاسبه ارقام عدد پی آورده بود؛ آن روش‌ها تمام ویژگی‌های الگوریتم را به معنایی که امروزه از کلمه «الگوریتم» در ذهن داریم داشتند و در واقع، بعدها به افتخار همان ابداعات و تلاش‌های علمی خوارزمی بود که کلمه الگوریتم از نام او گرفته شد. البته کلمه algorithm در ابتدا algorism بوده است و سپس در گذر زمان هم خود کلمه تغییر کرده است و هم معنای آن بسط پیدا کرده است. تا چند قرن، منظور از کلمه algorithm، منحصرأ روش‌هایی بود که برای عملیات مقدماتی حساب (جمع و تفریق و ضرب و تقسیم) با اعداد عربی استفاده می‌شدند.

¹Leonardo Fibonacci

²The book of calculation

امروزه گرچه واژه «الگوریتم» از کلیدی‌ترین واژه‌هایی است که در متون علمی دیده می‌شود، ولی به ندرت کتاب معتبری را می‌توان یافت که تعریف دقیقی از این واژه کرده باشد. شاید یکی از بهترین تعریف‌ها از واژه الگوریتم، تعریفی باشد که دونالد کنوت^۳، رایانه‌دان^۴ برجسته، در کتاب خود ذکر کرده است:

مفهوم الگوریتم پایه و اساس هر برنامه رایانه‌ای است؛ بنابراین ما قبل از هر چیز باید این مفهوم را به دقت تحلیل کنیم. از نظر لغوی معنای امروزی کلمه algorithm، کاملاً با معنای کلماتی چون procedure، routine، recipe، process، method، technique و rigmarole مشابه است جز اینکه کلمه «الگوریتم» متضمن چیزی است که آن را اندکی متفاوت می‌کند. هر الگوریتمی، علاوه بر اینکه صرفاً مجموعه‌ای متناهی از قواعد باشد که بتوان از روی آنها دنباله عملیات لازم برای حل یک نوع مسأله خاص را تعیین کرد، پنج ویژگی مهم نیز دارد:

- (۱) **تناهی:** اجرای هر الگوریتمی همیشه باید بعد از یک تعداد متناهی گام خاتمه پیدا کند.
- (۲) **قطعیت:** هر گام هر الگوریتمی باید به دقت تعریف شود؛ یعنی اقداماتی که در هر مورد قرار است انجام شوند، باید به طور دقیق، صریح و غیرمبهم توصیف شوند.
- (۳) **ورودی:** هر الگوریتمی صفر یا چند ورودی دارد؛ ورودی‌ها کمیت‌هایی هستند که یا در آغاز قبل از آنکه اجرای الگوریتم شروع شود، به آن داده می‌شوند یا به طور پویا هنگامی که الگوریتم در حال اجراست.
- (۴) **خروجی:** هر الگوریتمی یک یا چند خروجی دارد؛ خروجی‌ها کمیت‌هایی هستند که رابطه مشخصی با ورودی‌ها دارند.
- (۵) **کارایی:** در حالت کلی انتظار می‌رود که یک الگوریتم کارا هم باشد؛ به این معنا که هر عمل آن باید در اصل به اندازه‌ای مقدماتی باشد که هر کسی بتواند آن را با استفاده از قلم و کاغذ به طور دقیق و در مدت زمانی متناهی انجام دهد [۱۰].

از میان این ویژگی‌ها آن ویژگی که وجه تمایز واژه «الگوریتم» با بقیه واژه‌هاست ویژگی «قطعیت» است. در واقع، «الگوریتم» به راه‌حلی برای مسائل گفته می‌شود که مبهم نباشند و بتوان آنها را دقیقاً به یک شکل تفسیر کرد. به دلیل همین مشخصه الگوریتم است که می‌توان آن را به برنامه‌ای رایانه‌ای تبدیل کرد. پس اگر نتوان راه‌حلی برای یک مسأله را به برنامه‌ای رایانه‌ای تبدیل کرد یا آن راه‌حل، الگوریتم نیست یا آنکه گام‌هایی از آن واضح بیان نشده است. این نکته را هم باید در ذهن داشت که گرچه بیشتر الگوریتم‌ها با هدف پیاده کردن آنها و حل رایانه‌ای مسائل نوشته می‌شوند، خود مفهوم الگوریتم وابسته به وجود رایانه نیست.

واژه «الگوریتم» به معنای امروزی آن تا قبل از اختراع رایانه واژه‌ای رایج در نزد ریاضیدانان نبوده است و ریاضیدانان به الگوریتم‌ها «روش» می‌گفتند. بعد از اختراع رایانه در دهه ۱۹۴۰ نیز این کلمه تا سال‌ها مطرح نبوده است و منظور از کلمه الگوریتم تا سال ۱۹۵۰ عمدتاً الگوریتم اقلیدس بوده است. در دهه ۱۹۵۰ نیز گرچه افراد بسیاری به استفاده از الگوریتم یا به طراحی الگوریتم مشغول بودند، عملاً زمینه طراحی الگوریتم‌ها به عنوان یک موضوع علمی ویژه مطرح نبود و به الگوریتم‌ها برچسب‌هایی مانند «روش» یا «روال» یا «فرایند» یا «فن» و کلماتی از این دست می‌زدند. حتی امروزه هم در بسیاری از متون معتبر الگوریتم‌ها از واژه‌هایی مانند «روش» یا «روال» به جای واژه الگوریتم استفاده می‌شود. اما درست این است که اگر ما خاص بودن واژه «الگوریتم» را پذیرفته‌ایم نباید از واژه‌هایی به جای واژه «الگوریتم» استفاده کنیم که دقیقاً همان معنا را نمی‌رسانند.

در دهه ۱۹۶۰ میلادی رشته علم رایانه در دانشگاه‌های آمریکا ایجاد شد و در همان دهه زمینه علمی طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها نیز که محوری‌ترین حوزه در رشته علم رایانه است، بسط یافت و بسیار بیشتر از گذشته مورد توجه قرار گرفت. (مقاله [۸] را ببینید.)

³Donald Ervin Knuth

⁴Computer scientist

و اکنون آنقدر این زمینه علمی بسط و اشاعه پیدا کرده است که هیچ زمینه علمی دیگری را نمی‌توان یافت که کاربرد الگوریتم‌ها در آن مطرح نباشد.

۲. هفت الگوریتم قدیمی

در این بخش به بررسی هفت الگوریتم قدیمی و زیبا می‌پردازیم. این هفت الگوریتم عبارتند از الگوریتم ضرب روسی، الگوریتم اقلیدس، الگوریتم غربال اراتستنس، الگوریتم گاوس، الگوریتم هرون، الگوریتم نیوتن و الگوریتم هرزن. اهمیت این الگوریتم‌ها صرفاً از جنبه تاریخی نیست، بلکه نحوه طراحی و پیاده‌سازی هر یک از الگوریتم‌ها را می‌توان مثالی مفید دانست برای کسانی که می‌خواهند مهارت‌های حل مسأله خود را تقویت کنند یا پا به عرصه برنامه‌نویسی بگذارند. ما هر یک از الگوریتم‌ها را از سه جنبه بررسی می‌کنیم: جنبه تاریخی و جنبه طراحی و جنبه کاربردی. از جنبه تاریخی به این می‌پردازیم که طبق مستندات، الگوریتم را اولین بار چه کسانی استفاده می‌کرده‌اند؛ از جنبه طراحی، به مبنا و شیوه طراحی الگوریتم می‌پردازیم؛ و از جنبه کاربردی به اهمیت مسأله‌ای که با الگوریتم حل می‌شود و به نحوه پیاده‌سازی درست الگوریتم با زبان برنامه‌نویسی پایتون می‌پردازیم (فرض بر این است که خواننده با زبان پایتون آشنا است).

لازم به ذکر است که هر یک از این الگوریتم‌ها در متون قدیمی به شیوه‌ای متفاوت و احتمالاً ناآشنا برای عموم افراد بیان شده‌اند. در اینجا برای معرفی و توضیح الگوریتم‌ها از کلمات و نمادهایی استفاده می‌شود که برای خوانندگان واضح و روشن باشد. خواننده‌ای که کنجکاو است بداند گذشتگان از چه نمادهایی برای تشریح الگوریتم‌ها استفاده می‌کردند؛ به کتاب [۳] مراجعه کند.

۱.۲. الگوریتم ضرب روسی. علم حساب را باید قدیمی‌ترین شاخه از ریاضیات و پایه‌ای برای بقیه شاخه‌ها دانست. در حقیقت نمی‌توان تصور کرد که بشر قبل از آنکه بتواند با اعداد کار کند به مسائل ریاضی دیگری بپردازد. مستندات متعددی در دست است که در تمدن‌های باستانی مانند سومریان و بابلیان و مصر باستان و چین باستان، یافتن راه‌هایی برای عملیات حسابی (جمع و تفریق و ضرب و تقسیم) مورد توجه ریاضیدانان بوده است. یکی از الگوریتم‌های حسابی باستانی برای عملیات ضرب اعداد، الگوریتمی است که امروزه به نام «الگوریتم ضرب کشاورز روسی»^۵ یا «الگوریتم ضرب روسی» شناخته می‌شود.

این الگوریتم را طبق مستندات شاید بتوان قدیمی‌ترین الگوریتمی دانست که انسان‌ها آن را مکتوب کرده‌اند و به دست ما رسیده است. گونه‌ای از این الگوریتم روی الواح پاپیروسی در مصر باستان حکاکی شده است که قدمت آنها به ۱۶۵۰ سال قبل از میلاد مسیح برمی‌گردد و کاتب آن الواح مدعی بوده است که ۳۵۰ سال قبل از آن نیز این روش را مصری‌ها می‌دانسته‌اند. به بیان دیگر، قدمت این الگوریتم که افرادی آن را «الگوریتم ضرب مصری» می‌نامند، به تقریباً ۴۰۰۰ سال قبل برمی‌گردد.

این الگوریتم قرن‌ها معمول‌ترین روش ضرب در اروپا بوده است و حتی تا اواخر قرن بیستم در مدارس کشورهای اروپای شرقی به دانش‌آموزان آموزش داده می‌شد. علت شهرت الگوریتم به نام کشاورز روسی این بوده است که طبق مشاهدات جهانگردان غربی در قرن نوزدهم، کشاورزان روسی از آن زیاد استفاده می‌کردند.

۱.۱.۲. طراحی الگوریتم. مبنای الگوریتم ضرب روسی (مصری) را می‌توان با دو رابطه بازگشتی مشخص کرد. فرض کنید m و n دو عدد صحیح مثبت باشند. اگر n عددی زوج باشد می‌توان حاصل ضرب n در m را طبق این رابطه بازگشتی محاسبه کرد:

$$n \times m = \frac{n}{2} \times 2m,$$

و اگر n عددی فرد باشد می‌توان حاصل ضرب n در m را طبق این رابطه بازگشتی محاسبه کرد:

$$n \times m = \frac{n-1}{2} \times 2m + m.$$

⁵Russian peasant

با الگوریتم طبق این دو رابطه بازگشتی، عدد اول را نصف یا تقریباً نصف می‌کنیم و عدد دوم را دو برابر می‌کنیم و آنقدر این کار را تکرار می‌کنیم تا آنکه سرانجام عدد اول ۱ شود و شرط خاتمه که $1 \times m = m$ است برقرار شود. توجه کنید که ما با این الگوریتم برای محاسبه حاصل ضرب دو عدد صحیح چند رقمی، هیچ دو رقمی از آن دو عدد را در هم ضرب نمی‌کنیم! ما باید یا زوج یا فرد بودن عددی را مشخص کنیم؛ یا دو عدد را با هم جمع کنیم؛ یا یک عدد را دو برابر کنیم؛ یا یک عدد را نصف و اگر فرد باشد، به پایین گرد کنیم.

محاسبه دستی حاصل ضرب اعداد صحیح با این الگوریتم، از محاسبه دستی با الگوریتم آشنایی که امروزه در مدارس به دانش‌آموزان آموزش داده می‌شود و طبق آن هر رقم عدد دوم را در هر رقم اول ضرب می‌کنیم و سپس حاصل ضرب‌های میانی را با هم جمع می‌کنیم، ساده‌تر است؛ گرچه وقتی اعداد به شکل دودویی نمایش داده شوند، دو الگوریتم معادل خواهند بود. مثالی از نحوه اجرای دستی الگوریتم ضرب کشاورز روسی در کتاب [۱۴] ذکر شده است.

۲.۱.۲. پیاده‌سازی الگوریتم. مسأله محاسبه حاصل ضرب اعداد صحیح مسأله‌ای است که از زمان باستان تاکنون مطرح بوده است. اگر از کاربردهای فراوان عملیات ضرب اعداد صحیح در زندگی روزمره بگذریم، باز این مسأله مسأله‌ای کاربردی به حساب می‌آید. مثلاً در حوزه رمزنگاری، ساخت چند سامانه رمز سریع، مستلزم استفاده از الگوریتمی سریع برای محاسبه حاصل ضرب اعداد صحیح چند ده رقمی یا چند صد رقمی است.

از چشم‌انداز کاربردی الگوریتم ضرب روسی، سریع‌ترین الگوریتم ممکن برای محاسبه حاصل ضرب اعداد صحیح نیست، اما باید به آن به چشم الگوریتمی کاربردی نگریست. برنامه پیاده‌ساز الگوریتم را طبق دو رابطه‌ای که ذکر شد می‌توان به راحتی نوشت. در این برنامه از عملیات ضرب یک عدد در دو، $m = m \times 2$ ، استفاده شده است، اما می‌توان همین عملیات ضرب را به عملیات جمع $m = m + m$ تبدیل کرد.

Implements Russian peasant algorithm

```
def RussianPeasant(n, m):
    p = 0
    while n != 1:
        if n % 2 == 1:
            p = p + m
        n = n // 2
        m = m * 2
    return p + m
```

۲.۲. الگوریتم اقلیدس. مسأله محاسبه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م) اعداد صحیح، یکی از مسائل پایه‌ای در نظریه اعداد است. این مسأله از مسائل مورد توجه ریاضیدانان یونان باستان بود. روشی که آنان برای حل این مسأله استفاده می‌کردند، به نام «الگوریتم اقلیدس» معروف شده است.

اقلیدس^۶ (۲۶۵–۳۲۵ قبل از میلاد) از برجسته‌ترین ریاضیدانان یونان باستان بود. اطلاعات مهمی از زندگی اقلیدس در دست نیست جز آنکه او در مدرسه اسکندریه مصر ریاضیات و به ویژه هندسه تدریس می‌کرد. کتاب «اصول»^۷ او که در آن اصول هندسه را

^۶Euclid

^۷Elements

پایه‌ریزی کرده است، یکی از اثرگذارترین کتاب‌هایی است که در طول تاریخ بشر نوشته شده است. اقلیدس در یکی از مجلدات کتاب اصول خود، برای محاسبه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح راهی را توضیح داده است که امروزه آن را به عنوان الگوریتم اقلیدس می‌شناسیم. این الگوریتم در نوشته‌هایی که قدیمی‌تر از کتاب اصول اقلیدس هستند به چشم نمی‌خورد، ولی در نوشته‌های بعضی از دیگر ریاضیدانان یونان باستان، از جمله آریستارخوس ساموسی^۸ (۲۳۰-۳۱۰ قبل از میلاد) و ارشمیدس^۹ (۲۸۷-۲۱۲ قبل از میلاد)، نکته اصلی در طراحی الگوریتم (که تقلیل اعداد در هر مرحله به اعداد کوچکتر است) به چشم می‌خورد.

۱.۲.۲. طراحی الگوریتم. فرض کنید m و n دو عدد صحیح نامنفی باشند و هر دو با هم صفر نباشند. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک m و n را با $\gcd(m, n)$ نشان می‌دهیم. با الگوریتم اقلیدس برای محاسبه ب.م.م دو عدد m و n ، با این فرض که $m \geq n$ باشد از این رابطه بازگشتی استفاده می‌کنیم:

$$\gcd(m, n) = \gcd(n, m \bmod n).$$

با الگوریتم اقلیدس مبتنی بر این رابطه بازگشتی ساده، مسأله محاسبه ب.م.م دو عدد را به مسأله محاسبه ب.م.م دو عدد کوچکتر تقلیل می‌دهیم و آنقدر این فرایند تقلیل اندازه مسأله را ادامه می‌دهیم تا آنکه سرانجام یکی از دو عدد صفر شود. از آنجا که $\gcd(m, 0) = m$ است، می‌توان نتیجه گرفت ب.م.م دو عدد اصلی، عدد غیرصفر در آخرین گام الگوریتم است. اثبات درستی الگوریتم اقلیدس در کتاب‌های متعددی ذکر شده است. به عنوان مثال، کتاب [۱۸] را ببینید.

۲.۲.۲. پیاده‌سازی الگوریتم. مسأله محاسبه ب.م.م دو یا چند عدد صحیح در طراحی چند سامانه رمز (مثلاً سامانه رمز آر.اس.ای^{۱۰}) پیش می‌آید. از آنجا که سرعت عملیات رمزنگاری یکی از شاخصه‌های مطلوب سامانه‌های رمز است، محاسبه سریع ب.م.م اعداد بزرگ در عمل مهم است.

گرچه الگوریتم‌های متعددی برای مسأله محاسبه ب.م.م اعداد شناسایی شده‌اند، اما ساده‌ترین و سریع‌ترین الگوریتم در میان آنها الگوریتم اقلیدس است. برنامه پیاده‌ساز الگوریتم اقلیدس را می‌توان به این صورت نوشت:

Computes $\gcd(m, n)$ by Euclid's algorithm

```
def Euclid(m, n):
    while n != 0:
        r = m % n
        m = n
        n = r
    return m
```

به دو نکته درباره این برنامه پایتونی باید توجه کرد. اول آنکه در اینجا نامنفی بودن دو عدد صحیح m و n فرض شده است. اما طبق تساوی $\gcd(m, n) = \gcd(|m|, |n|)$ ، می‌توان ابتدا در صورتی که یک یا هر دو عدد منفی باشد، آنها را مثبت کرد و سپس با الگوریتم اقلیدس ب.م.م دو عدد نامنفی را محاسبه کرد. دوم آنکه در اینجا فرض شده است که $m \geq n$ است. اگر $m < n$ باشد، بعد از تکرار اول حلقه جای m و n عوض می‌شود و روند حل مسأله طبق رابطه بازگشتی، ادامه می‌یابد.

^۸Aristarchus of Samos

^۹Archimedes

^{۱۰}RSA

۳.۲. الگوریتم غربال اراتستنس. اعداد اول از زمان باستان، هم از منظر زیباشناختی و هم از منظر فلسفی مورد توجه ریاضیدانان بوده‌اند. یکی از مسائل جذاب در آن دوران، مسأله شناسایی اعداد اول بود و امروزه نیز این مسأله البته بیشتر از چشم‌انداز کاربردی مسأله‌ای مهم به حساب می‌آید. یکی از روش‌هایی که ریاضیدانان باستان برای شناسایی اعداد اول استفاده می‌کردند، روشی است که ما امروزه آن را به نام «الگوریتم غربال اراتستنس»^{۱۱} می‌شناسیم.

اراتستنس (۱۹۴-۲۷۶ قبل از میلاد) در یونان باستان به دنیا آمد. او مدتی را در فرهنگستان افلاطون در آتن گذراند و بعدها به دعوت پادشاه وقت به اسکندریه در مصر باستان رفت و کتابدار اعظم کتابخانه بزرگ اسکندریه شد. اراتستنس نه تنها در ریاضیات بلکه در علوم دیگری از جمله تاریخ و جغرافیا و نجوم و فلسفه هم متبحر بود. او علاوه بر دستاوردهایش در ریاضیات، برای کارهایش در زمینه تاریخ‌نگاری دوران باستان و اندازه‌گیری شعاع کره زمین نیز معروف است.

اراتستنس یک نسل بعد از اقلیدس می‌زیسته است. هم الگوریتم غربال اراتستنس و هم الگوریتم اقلیدس، گویای این است که بررسی ویژگی‌های اعداد طبیعی به طور عام و اعداد اول به طور خاص، از زمان باستان برای ریاضیدانان جذاب بوده است. الگوریتم غربال اراتستنس را ریاضیدانی به نام نیکوماخوس^{۱۲} (۶۰-۱۲۰) که چند قرن بعد از اراتستنس می‌زیسته است، در یکی از کتاب‌هایش با عنوان «مقدمه‌ای بر حساب» که در آن به بررسی روشمند ویژگی‌های اعداد پرداخته است، توضیح داده است.

۱.۳.۲. طراحی الگوریتم. الگوریتم غربال اراتستنس تمام اعداد اولی را می‌یابد که از عدد طبیعی مثبت مشخصی، بزرگتر نباشند. الگوریتم برای یافتن مجموعه تمام اعداد اولی که کوچکتر یا مساوی با عدد طبیعی n باشند، با مجموعه اعداد طبیعی ۲ تا n شروع می‌کند و مرحله به مرحله تمام اعدادی را که در محدوده ۲ تا n قرار دارند و اول نیستند می‌یابد و آنها را «غربال می‌کند»، یعنی به عنوان عددی نامطلوب از مجموعه کنار می‌گذارد. سرانجام پس از غربال کردن همه اعداد مرکب، همه اعداد اول و فقط هم آنها در مجموعه اعداد باقی خواهند ماند.

به بیان دقیق‌تر، طبق الگوریتم در مرحله اول، تمام مضارب عدد اول ۲ (جز خود ۲) را از مجموعه غربال می‌کنیم؛ سپس در مرحله دوم، تمام مضارب عدد اول ۳ (جز خود ۳) را از مجموعه غربال می‌کنیم و به همین شیوه مضارب اعداد اول ۵ و ۷ و بقیه اعداد اولی را که در محدوده ۲ تا n قرار دارند می‌یابیم، و حذف می‌کنیم. این فرایند تا زمانی ادامه می‌یابد که دیگر نتوان مضربی را از مجموعه حذف کرد. آنچه نهایتاً در مجموعه باقی می‌ماند همه اعداد اولی است که در محدوده ۲ تا n قرار دارند.

توجه کنید که در هر مرحله، برای حذف مضارب عدد اول p کافی است از $p \times p$ شروع کنیم، چون هر یک از مضارب کوچک‌تر p در یکی از مراحل قبلی الگوریتم حذف شده‌اند. بنابراین، بزرگترین عدد اولی که مضارب آن باید حذف شود از $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ بیشتر نخواهد بود. مثالی از نحوه اجرای الگوریتم غربال اراتستنس در کتاب [۱۸] ذکر شده است.

۲.۳.۲. پیاده‌سازی الگوریتم. می‌توان برنامه پیاده‌ساز الگوریتم اراتستنس را به این صورت نوشت:

Implements the sieve of Eratosthenes

```
def Sieve(n):
    from math import floor, sqrt
    A = [None] * (n+1)
    for p in range(2, n+1):
        A[p] = p
```

¹¹Sieve of Eratosthenes

¹²Nicomachus

```

for p in range(2, floor(sqrt(n)) + 1):
    if A[p] != 0:
        j = p * p
        while j <= n:
            A[j] = 0
            j = j + p
L = []
for p in range(2, n+1):
    if A[p] != 0:
        L.append(A[p])
return L

```

در قسمت اول این برنامه، آرایه‌ای (لیستی) پوچ به نام A و به طول $n + 1$ ایجاد می‌کنیم و با نادیده گرفتن دو خانه اول آن، تمام اعداد طبیعی در محدوده ۲ تا n را در خانه‌های ۲ تا n آن می‌گذاریم. سپس در قسمت دوم برنامه، با شروع از عدد اول ۲ و ختم به $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ، مرحله به مرحله تمام اعدادی را که مضربی از یک عدد اول باشند از آرایه حذف می‌کنیم. دستور $A[j] = 0$ به این معناست که عدد j مضرب عددی اول است و باید آن را غریبال کرد. در قسمت سوم برنامه، آرایه A را بررسی می‌کنیم و تمام عناصر غیرصفر آن را که چیزی نیستند جز اعداد اول در محدوده ۲ تا n ، در لیست خروجی L می‌گذاریم.

امروزه مسأله شناسایی و استفاده از اعداد اول بزرگ در چند حوزه کاربردی، از جمله در طراحی الگوریتم‌های جستجو و طراحی الگوریتم‌های رمزنگاری پیش می‌آید. (مثلاً کتاب [۶] را ببینید.) به همین دلیل شناسایی سریع اعداد اول بزرگ، مسأله‌ای کاربردی است. البته در بیشتر موارد آنچه هدف است تعیین اول بودن یا نبودن عددی خاص است نه تعیین همه اعداد اول کوچک‌تر از عددی خاص. اما به هر حال مزیت الگوریتم اراتستنس این است که با آن مجموعه همه اعداد اول در یک بازه را به دست خواهیم آورد. بدیهی است که اجرای الگوریتم اراتستنس، هر چقدر n بزرگتر شود کندتر خواهد شد، اما در عمل می‌توان از آن به عنوان الگوریتمی کاربردی استفاده کرد.

۴.۲. الگوریتم گاوس. مسأله حل دستگاه‌های معادلات خطی، یکی از قدیمی‌ترین مسائل عددی است و حتی در زمان باستان، البته در ابعاد بسیار کوچک، مطرح بوده است.

معروف‌ترین الگوریتم برای این مسأله، الگوریتمی است که به یاد کارل فردریش گاوس^{۱۳} (۱۷۷۷–۱۸۵۵)، ریاضیدان آلمانی، «الگوریتم حذفی گاوس»^{۱۴} نامگذاری شده است. اما قدمت این الگوریتمی که نام گاوس روی آن گذاشته شده است، به قرن‌ها قبل از زمان زندگی او برمی‌گردد و حتی گفته می‌شود که تا نیمه قرن بیستم به این الگوریتم این نام داده نشده بود. قدیمی‌ترین متنی که اصل این الگوریتم در آن دیده شده، نوشته‌ای چینی است به نام «نه فصل درباره هنر

¹³Carl Friedrich Gauss

¹⁴Gaussian elimination

ریاضی»^{۱۵} که در ابتدای فصل هشتم آن، به چگونگی حل یک مسأله کشاورزی (که می‌توان به بیان امروزی آن را به شکل یک دستگاه خطی سه معادله در سه مجهولی بیان کرد) پرداخته شده است. نویسندگان و عصر دقیق نگارش این کتاب نامعلوم است اما در متنی که در سال ۲۶۳ میلادی نوشته شده است، ادعا شده است که آن کتاب چندین قرن قدمت دارد. این روش را بعدها از چین به ژاپن می‌برند و از آنجا به اروپا. در اروپا، افرادی مانند ایزاک نیوتن در قرن هیجدهم و کارل گوس در قرن نوزدهم این روش را برای حل دستگاه‌های معادلات خطی استفاده کردند و به بقیه نیز شناساندند و آن را روش رایج برای حل دستگاه‌های معادلات خطی در اروپا کردند. نیوتن این روش را در اوایل قرن هیجدهم در یکی از کتاب‌هایش ذکر کرده بود و مدعی بود که خودش این روش حذفی را کشف کرده است. البته به هیچ وجه بعید نیست که افرادی مانند نیوتن و گوس، نه تنها کاربر این الگوریتم بوده‌اند، بلکه خود بدون هیچ پیش‌زمینه‌ای چنین الگوریتم ساده‌ای را کشف کرده باشند.

کارل فردریش گوس را به حق یکی از بزرگترین ریاضیدانان تاریخ می‌دانند. صرف‌نظر از این الگوریتمی که به اشتباه به نام او معروف شده است، الگوریتم‌های مهم دیگری کشف شده‌اند که می‌توان یا کشف آن الگوریتم‌ها را گوس دانست یا آنکه نظریه‌های گوس را مبنای آن الگوریتم‌ها دانست. الگوریتم «تبدیل فوریه سریع» یکی از آن الگوریتم‌های کاربردی است که در سال ۱۹۶۵ در مقاله [۵] معرفی شده است، اما طبق آنچه در مقاله [۹] ذکر شده است، اصل این الگوریتم را گوس در سال ۱۸۰۵ منتشر کرده است.

۱.۴.۲. طراحی الگوریتم. الگوریتم گوس در واقع متشکل از دو الگوریتم است و در دو مرحله به حل دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ می‌پردازد: مرحله حذفی پیشرو و مرحله جایگذاری پسرو.

در مرحله حذفی پیشرو، ماتریس ضرایب A را با حذف عناصر زیر قطر اصلی آن به ماتریس بالامثلثی A' و بردار b را هم به بردار b' تبدیل می‌کنیم؛ یعنی دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ را به دستگاه معادلات خطی $A'x = b'$ تبدیل می‌کنیم. با الگوریتم برای رسیدن به یک ماتریس بالامثلثی، هر بار یکی از عناصر روی قطر اصلی ماتریس را به عنوان «محور» و سطر آن را به عنوان «سطر محوری» می‌گیریم و عناصر زیرین آن عنصر در همان ستون را با اضافه کردن ضریبی از «سطر محوری» به سطرهاى زیرین آن صفر می‌کنیم. به عبارت دیگر، از حذف «ضرایب زیر قطر» مجهول x_1 شروع می‌کنیم و به همین ترتیب، ضرایب مجهولات در زیر قطر را صفر می‌کنیم تا آنکه تنها ضریب زیر قطر مجهول x_{n-1} را حذف کنیم. به علت حرکت پیشرونده الگوریتم از حذف ضرایب x_1 تا حذف ضریب x_{n-1} ، به آن «الگوریتم حذفی پیشرو» گفته می‌شود.

در مرحله جایگذاری پسرو، با الگوریتم بردار مجهول x در دستگاه جدید $A'x = b'$ را با جایگذاری متوالی مقادیر معلوم محاسبه می‌کنیم؛ یعنی برای پیدا کردن بردار مجهولات، ابتدا با تنها یک تقسیم، مجهول x_n را از آخرین معادله پیدا می‌کنیم و سپس، با جایگذاری مقدار آن در معادله قبل از آن، مجهول x_{n-1} را معلوم می‌کنیم. به همین ترتیب با جایگذاری مقادیر مجهول تاکنون پیدا شده در معادلات قبل‌تر مجهولات بعدی را تا x_1 پیدا می‌کنیم. به علت حرکت پیشرونده الگوریتم در جایگذاری مقادیر مجهول معلوم شده در معادلات ماقبل، به آن «الگوریتم جایگذاری پسرو» گفته می‌شود.

¹⁵The Nine Chapters on the Mathematical Art

الگوریتم گاوس را می‌توان روی هر دستگاه معادلات خطی اجرا کرد. اگر دستگاه جواب یکتا داشته باشد، الگوریتم جواب یکتا را پیدا می‌کند؛ و اگر دستگاه جواب یکتا نداشته باشد اجرای الگوریتم ادامه نخواهد یافت. اگر در نقطه‌ای در فرایند تبدیل دستگاه اصلی به دستگاه بالامثلثی، محور صفر شد اجرای الگوریتم باید موقتاً یا دائماً متوقف شود؛ در چنین حالتی اگر با تعویض سطرها، بتوانیم محور را در سطر فعلی غیر صفر کنیم که اجرای الگوریتم ادامه پیدا می‌کند و گرنه دستگاه جواب یکتا نخواهد داشت. در حالتی که دستگاه جواب یکتا نداشته باشد، باید با بررسی دستگاه موجود مشخص کرد که آیا دستگاه جواب ندارد یا آنکه بی‌نهایت جواب دارد.

۲.۴.۲. پیاده‌سازی الگوریتم. برای پیاده‌سازی الگوریتم گاوس، دو تابع پایتونی برای پیاده‌سازی دو الگوریتم حذفی پیشرو و جایگذاری پسرو می‌نویسیم. با تابع حذفی پیشرو، بردار b را به ماتریس A می‌افزاییم و سپس مرحله به مرحله عناصر زیر عناصر قطری ماتریس را صفر می‌کنیم. از آنجا که اگر محور صفر باشد، نمی‌توان فرایند بالامثلثی کردن ماتریس را ادامه داد، در هر مرحله، بزرگترین عنصر در زیر عنصر محوری را می‌یابیم و سطر آن عنصر را با سطر محوری عوض می‌کنیم تا بزرگترین عنصر ممکن به عنوان عنصر محوری استفاده شود. سپس با کم کردن ضرایبی مناسب از سطر محوری از سطرهای زیرین آن، تمام عناصر زیر عنصر محوری را صفر می‌کنیم.

در صورتی که نتوان در مرحله‌ای، محوری غیر صفر را یافت، نتیجه می‌گیریم که دستگاه یا جواب ندارد یا آنکه بی‌نهایت جواب دارد. اگر آخرین عنصر در سطر محوری، عددی غیر صفر باشد، دستگاه جواب ندارد. در چنین حالتی، حداقل دو معادله در میان معادله‌ها قرار دارند که یا همه ضرایب در طرف چپ یکی از آن دو معادله با ضرایب متناظر با آنها در معادله دیگر برابر هستند اما طرف راست دو معادله برابر نیستند؛ یا آنکه همه نسبت‌های ضرایب در یکی از دو معادله به ضرایب متناظر با آنها در معادله دیگر، برابر هستند، اما نسبت طرف راست معادله‌ها با آن نسبت‌ها برابر نیست. اگر آخرین عنصر در سطر محوری، صفر باشد، دستگاه بی‌نهایت جواب دارد. در چنین حالتی، حداقل دو معادله در میان معادله‌ها قرار دارند که یا همه ضرایب در طرف چپ یکی از آن دو معادله با ضرایب متناظر با آنها در معادله دیگر، و طرف راست دو معادله نیز برابر هستند؛ یا آنکه همه نسبت‌های ضرایب در یکی از دو معادله به ضرایب متناظر با آنها در معادله دیگر و نسبت طرف راست معادله‌ها برابر هستند.

Applies Gaussian elimination to matrix A of a system's coefficients, augmented with vector b of the system's right-hand side values

```
def ForwardElimination(A, b):
    n = len(A)
    for i in range(0, n):
        A[i].append(b[i])
    for i in range(0, n):
        pivotrow = i
        for j in range(i+1, n):
            if abs(A[j][i]) > abs(A[pivotrow][i]):
                pivotrow = j
```

```

    if A[pivotrow][i] == 0:
        if A[pivotrow][n] != 0:
            return 'no solution'
        else:
            return 'infinitely many solutions'
    for k in range(0, n+1):
        A[i][k], A[pivotrow][k] = A[pivotrow][k], A[i][k]
    for j in range(i+1, n):
        temp = A[j][i] / A[i][i]
        for k in range(i, n+1):
            A[j][k] = A[j][k] - A[i][k] * temp
    return A

```

با تابع جایگذاری‌های پس‌رو، بردار مجهول x در دستگاه جدید $A'x = b'$ را با جایگذاری متوالی مقادیر معلوم محاسبه می‌کنیم. بدیهی است که این تابع را تنها وقتی باید فراخوانی کنیم که با فراخوانی تابع حذفی پیش‌رو، یک ماتریس بالامثلثی به دست آمده باشد و مشخص شده باشد که جواب دستگاه یکتا است.

Implements the backward substitution stage of Gaussian elimination

```

def BackwardSubstitution(A, b):
    A = ForwardElimination (B,b)
    n = len (A)
    x = [None] * n
    for i in range (n-1, -1,-1) :
        sum = 0.0
        for j in range (i+1,n) :
            sum = sum + A[i] [j] *x[j]
        x[i] = (A[i] [n] - sum) /A[i] [i]
    print (x)

```

یکی از موضوعاتی که باید در پیاده‌سازی الگوریتم گاوس به آن توجه کرد، موضوع انباشته شدن خطاهای گردسازی اعداد حقیقی است. از آنجا که تعداد عملیات حسابی الگوریتم، به ویژه وقتی که دستگاه بزرگ باشد، زیاد خواهد بود، احتمال تحریف جواب نهایی دستگاه از جواب دقیق وجود خواهد داشت. برای اطمینان از درستی خروجی الگوریتم، می‌توان در پایان جوابی را که با الگوریتم به دست می‌آید در معادلات جایگذاری کرد.

مسأله حل دستگاه‌های معادلات خطی مسأله‌ای بسیار کاربردی است. برای مثال، تحلیل یک مدار الکتریکی منجر به یک دستگاه معادلات خطی می‌شود و جواب آن دستگاه، مقادیر جریان‌های گذرنده از شاخه‌های مدار است. یا مثلاً در حوزه تحلیل داده‌ها، ممکن است در فرایند تحلیل، مسأله حل دستگاه معادلات خطی پیش آید. الگوریتم‌های متعددی برای حل دستگاه‌های معادلات خطی کشف شده‌اند. اما الگوریتم گاوس، الگوریتم اصلی برای حل دستگاه معادلات خطی است، به ویژه وقتی که ماتریس ضرایب دستگاه خلوت یا بزرگ نباشد. برای بررسی دقیق‌تر الگوریتم گاوس و آشنایی با چند الگوریتم دیگر برای حل دستگاه‌های معادلات خطی که آنها نیز از جنبه تاریخی و کاربردی جالب هستند، به کتاب [۴] مراجعه کنید.

۵.۲. الگوریتم هرون. مسأله محاسبه جذر اعداد از مسائلی است که از زمان باستان تاکنون مطرح بوده است. مثال‌هایی از مقدار تقریبی جذر اعداد روی الواح بابلیان (که قدمت آن‌ها تقریباً به ۲۰۰۰ سال قبل از میلاد مسیح می‌رسد) نقش بسته است. یکی از آن مثال‌ها محاسبه قطر یک «در» مستطیلی شکل به طول ۴۰ و عرض ۱۰ است که منجر به محاسبه $\sqrt{40^2 + 10^2} = 10\sqrt{17}$ می‌شود. بابلیان به مقدار تقریبی $41 + \frac{15}{60}$ رسیدند. اطلاعاتی ظاهراً در دست نیست که بتوان از روی آن به این پی برد که بابلیان چگونه به چنین مقداری رسیدند.

طبق مستندات موجود، هرون اسکندرانی^{۱۶} (در قرن اول میلادی) اولین کسی بوده است که روشی را برای محاسبه جذر تقریبی اعداد در نوشته‌های خود ذکر کرده است. البته از آنجا که بابلیان در نوشته‌های خود مثال‌هایی از مقدار جذر اعداد را ذکر کرده‌اند، «الگوریتم هرون» به نام «الگوریتم بابلی» نیز معروف شده است.

هرون از ریاضیدانان و مهندسان و مخترعان یونان باستان بود و در اسکندریه مصر به دنیا آمد. علاوه بر الگوریتم محاسبه جذر، فرمولی نیز برای محاسبه مساحت مثلث برحسب طول سه ضلع آن به نام هرون معروف شده است. طبق فرمول هرون، اگر a و b و c طول سه ضلع یک مثلث باشند و $p = \frac{a+b+c}{2}$ باشد، آنگاه مساحت مثلث $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ خواهد بود. می‌توان مبتنی بر این فرمول الگوریتمی برای محاسبه مساحت مثلث نوشت؛ جالب اینجاست که استفاده از این فرمول نیازمند دانستن الگوریتمی برای محاسبه جذر است و هرون الگوریتمی نیز برای محاسبه جذر داشت.

علاوه بر الگوریتم هرون، الگوریتم‌های دیگری در گذشته نیز برای محاسبه جذر استفاده می‌شده است. برای مثال، در کتاب [۳] توضیحی مختصر راجع به الگوریتمی که چینیان و هندیان در قرن سوم استفاده می‌کردند و توضیحی مفصل راجع به الگوریتمی که مسلمانان و اروپاییان در قرون وسطی استفاده می‌کردند، داده شده است.

۱.۵.۲. طراحی الگوریتم. با الگوریتم هرون، برای محاسبه جذر یک عدد، از مقدار تقریبی اولیه‌ای شروع می‌کنیم و دنباله‌ای از مقادیر تقریبی را تولید می‌کنیم به گونه‌ای که هر جمله در دنباله مقادیر تقریبی، نسبت به جملات قبل از آن، به مقدار دقیق جذر عدد نزدیک‌تر باشد.

فرض کنید a عددی مثبت باشد. برای محاسبه $\sqrt{a}$ ، از مقدار تقریبی r شروع می‌کنیم. دو حالت پیش می‌آید: اگر $r > \sqrt{a}$ باشد پس $\frac{a}{r} < \sqrt{a}$ خواهد بود؛ و اگر $r < \sqrt{a}$ باشد، پس $\frac{a}{r} > \sqrt{a}$ خواهد بود. در هر دو حالت $\sqrt{a}$ عددی بین دو عدد r و $\frac{a}{r}$ خواهد بود. از آنجا که می‌توان با اطمینان گفت که میانگین حسابی دو عدد r و $\frac{a}{r}$ به عدد $\sqrt{a}$

¹⁶Heron of Alexandria

نزدیک‌تر است، مقدار تقریبی بعدی را میانگین دو عدد در نظر می‌گیریم؛ یعنی مقدار تقریبی بعدی $\frac{1}{2}(r + \frac{a}{r})$ خواهد بود. طبق همین نکته است که دنباله‌ای از مقادیر تقریبی را تولید می‌کنیم.

۲.۵.۲. پیاده‌سازی الگوریتم. امروزه نیز الگوریتم هرون به عنوان یکی از ساده‌ترین و بهترین الگوریتم‌های محاسبه تقریبی جذر اعداد استفاده می‌شود. برای پیاده‌سازی الگوریتم هرون، از مقدار تقریبی r_0 شروع می‌کنیم و بر مبنای این رابطه بازگشتی، دنباله‌ای از مقادیر تقریبی را تولید می‌کنیم:

$$r_{n+1} = \frac{1}{2} \left(r_n + \frac{a}{r_n} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

برای محاسبه مقدار تقریبی $\sqrt{a}$ از r_0 شروع می‌کنیم و طبق رابطه بازگشتی، مقادیر r_1 و r_2 و غیره را محاسبه می‌کنیم. از آنجا که دنباله مقادیر $\{r_n\}$ بی‌پایان است، عملاً لازم است حدی برای تعداد تکرارهای الگوریتم مشخص کنیم. هرچقدر تعداد تکرارهای الگوریتم بیشتر باشد، اجرای آن بیشتر طول خواهد کشید اما آخرین مقدار تقریبی $\sqrt{a}$ به مقدار دقیق آن هم نزدیک‌تر خواهد بود. با وجود گذاشتن حدی روی تعداد تکرارهای الگوریتم، برنامه را به گونه‌ای می‌نویسیم که اگر قبل از رسیدن به حداکثر تعداد تکرارها، آخرین مقدار تقریبی که رایانه محاسبه کرده است به مقدار دقیق خیلی نزدیک باشد، اجرای آن متوقف شود. این معیار برای توقف اجرای برنامه به این معناست که اگر ε آستانه خطا (اختلاف مقدار تقریبی و مقدار دقیق) باشد، آنگاه $|r_n^2 - a| < \varepsilon$ باشد.

Computes square roots by Heron's algorithm

```
def Heron(a, r, eps, N):
    n = 1
    print('iteration:', 0, ' r:', r, sep='')
    while n <= N:
        r = 1/2 * (r + a/r)
        print('iteration:', n, ' r:', r, sep='')
        if abs(r**2 - a) < eps:
            break
        n = n + 1
```

۶.۲. الگوریتم نیوتن. مسائل حل معادلات خطی و مربعی، در تمدن‌های باستانی از جمله تمدن‌های بین‌النهرین و مصر باستان و چین باستان و هند باستان مطرح بود. قرن‌ها بعد ریاضیدانان مسلمان از جمله خوارزمی (۷۸۰-۸۵۰) و خیام (۱۰۴۸-۱۱۳۱) و ابن‌بنای مراکشی (۱۲۵۶-۱۳۲۱)، نیز راه‌حلهایی را برای معادلات درجه اول و دوم و سوم منتشر کردند. بعد از آن ریاضیدانان اروپایی، از جمله لئوناردو فیبوناچی (۱۱۷۰-۱۲۵۰) و جرولامو کاردانو^{۱۷}

¹⁷Gerolamo Cardano

(۱۵۰۱-۱۵۷۶)، به حل چنین معادلاتی پرداختند. یکی از نقاط اوج در تاریخ حل معادلات غیرخطی، انتشار الگوریتمی است که ما امروزه آن را به عنوان «الگوریتم نیوتن» می‌شناسیم.

ایزاک نیوتن^{۱۸} (۱۶۴۲-۱۷۲۷) ریاضیدان و فیزیکدان و دین‌شناس انگلیسی بود. نیوتن در ریاضیات و در فیزیک نظریه‌پرداز و نوآور بود. یکی از کارهای برجسته او در ریاضیات، پیشنهاد روشی برای حل معادلات غیرخطی بود. نیوتن الگوریتمش را با مثال‌های عددی، در سال ۱۶۶۹ در یکی از کتاب‌هایش توصیف کرد. الگوریتم نیوتن به نام «الگوریتم نیوتن-رافسون» نیز معروف است. جوزف رافسون^{۱۹} (۱۶۶۸-۱۷۱۵) از ریاضیدانان انگلیسی معاصر نیوتن بود. او همین الگوریتم را در سال ۱۶۹۰ در یکی از رساله‌هایش منتشر کرد. در آن زمان نیوتن الگوریتم خود را منتشر نکرده بود اما اساس کار او را ریاضیدانی به نام جان والیس^{۲۰} (۱۶۱۶-۱۷۰۳) در سال ۱۶۸۵ منتشر کرده بود.

۱.۶.۲. طراحی الگوریتم. تقریباً همه الگوریتم‌هایی که برای حل معادلات غیرخطی استفاده می‌شوند، جواب تقریبی معادله را در چند مرحله می‌یابند؛ یعنی از یک حدس اولیه شروع می‌کنند و در هر یک از مراحل بعدی جواب دقیق‌تری را جایگزین جواب فعلی می‌کنند. الگوریتم نیوتن هم از یک مقدار تقریبی اولیه شروع می‌کند و گام به گام دنباله‌ای از مقادیر تقریبی تولید می‌کند؛ با این هدف که هر جمله در دنباله نسبت به جملات قبل از آن، به ریشه معادله نزدیک‌تر باشد.

نکته اصلی در الگوریتم نیوتن این است که تابع غیرخطی و مشتق‌پذیر $f(x)$ را با تابعی خطی تقریب بزنییم. با این فرض که x_0 مقدار تقریبی اولیه ریشه باشد، از آنجا که تابع $f(x)$ مشتق‌پذیر است و شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x)$ در نقطه $(x_0, f(x_0))$ ، برابر با مشتق تابع در آن نقطه است، معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه $(x_0, f(x_0))$ را می‌توان به این صورت نوشت:

$$l(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

چون در نقطه x_0 مقدار تابع خطی $l(x)$ و تابع غیرخطی $f(x)$ یکسان است و در نقاط مجاور x_0 مقدار $l(x)$ به مقدار $f(x)$ نزدیک است، می‌توان فرض کرد که نقطه تقاطع خط مماس با محور x نیز نزدیک به نقطه تقاطع تابع $f(x)$ با محور x باشد. نقطه تقاطع خط مماس با محور x ، جایی است که $l(x) = 0$ شود:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

در صورتی که حدس اولیه x_0 نسبتاً نزدیک به ریشه انتخاب شده باشد، انتظار این است که x_1 نسبت به نقطه x_0 ، به ریشه واقعی معادله نزدیک‌تر باشد. با تکرار همین روند می‌توان گام به گام دنباله‌ای به دست آورد از جملاتی که مقادیر تقریبی ریشه معادله هستند و هر جمله در دنباله نسبت به جملات قبل از آن، به ریشه نزدیک‌تر باشد. ارتباط هر جمله دنباله و جمله بعدی آن را می‌توان با این رابطه بازگشتی مشخص کرد:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

¹⁸Isaac Newton

¹⁹Joseph Raphson

²⁰John Wallis

نیوتن در نوشته‌های خود، روش یافتن ریشه‌های یک تابع چندجمله‌ای را توضیح داده است. اما او صریحاً نه از خط مماس استفاده کرد و نه از مشتق؛ بلکه روش خود را بر این مبنا که می‌توان هر تابع چندجمله‌ای را با یک خط تقریب زد، توضیح داده است. اما رافسون روش خود را به نحوی توضیح داده است که استنباط رابطه بازگشتی از آن راحت‌تر است. مزیت رابطه بازگشتی این است که می‌توان مستقیماً مبتنی بر آن راه‌حلی الگوریتمی را برای مسأله توصیف کرد. جالب است به ارتباط الگوریتم هرون با الگوریتم نیوتن توجه کنیم: الگوریتم هرون حالت خاصی از الگوریتم نیوتن است. از آنجا که محاسبه $\sqrt{a}$ معادل با یافتن ریشه مثبت معادله مربعی $f(x) = x^2 - a = 0$ است، با جایگذاری تابع $f(x)$ و تابع مشتق آن در فرمول بازگشتی الگوریتم نیوتن، فرمول بازگشتی الگوریتم هرون به دست می‌آید:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

۲.۶.۲. پیاده‌سازی الگوریتم. الگوریتم نیوتن هم الگوریتمی ساده است و هم کارا؛ و به همین دلیل امروزه معروف‌ترین و پرکاربردترین الگوریتم برای حل معادلات غیرخطی تک‌مجهولی است. می‌توان برنامه پیاده‌ساز الگوریتم نیوتن را به این صورت نوشت:

Finds a root of an equation by Newton's algorithm

```
def Newton(x, eps, delta, N):
    n = 1
    print('iteration:', 0, ' x:', x, ' f(x):', f(x), sep='')
    while n <= N:
        if abs(df(x)) < delta:
            print("small derivative")
            break
        e = f(x) / df(x)
        x = x - e
        print('iteration:', n, ' x:', x, ' f(x):', f(x), sep='')
        if abs(e) < eps and abs(f(x)) < eps:
            break
        n = n + 1
```

از آنجا که در هر تکرار این الگوریتم، محاسبه مقادیر جدیدی از تابع و مشتق آن لازم است نوشتن دو «تابع پایتونی» برای محاسبه تابع و مشتق آن نیز لازم است.

با وجود سادگی و کارایی الگوریتم، باید در پیاده‌سازی آن به نکاتی توجه کرد. موضوع این است که ممکن است دنباله جواب‌های تقریبی که با این الگوریتم تولید می‌شود، به ریشه معادله همگرا نباشد. برای افزایش سرعت همگرایی الگوریتم، لازم است به دنبال جواب اولیه‌ای باشیم که به ریشه نزدیک باشد. شاید بتوان با شناخت از مسأله واقعی و همچنین رسم

نمودار تابع، قبل از اجرای الگوریتم، مقدار تقریبی اولیه خوبی برای ریشه حدس زد. در بیشتر موارد، حدس اولیه خوب باعث می‌شود که الگوریتم به سرعت به ریشه همگرا شود. اما در مواردی حتی حدس اولیه خوب نیز لزوماً همگرایی سریع یا حتی همگرایی را نتیجه نخواهد داد. برای مثال، در حالتی که $f'(x_n) = 0$ یا نزدیک به صفر باشد، اجرای الگوریتم باید متوقف شود؛ و در حالتی که $f''(x_n) = 0$ باشد، دنباله جواب‌های تقریبی الگوریتم ممکن است واگرا شود یا آنکه به کندی به ریشه همگرا شود.

همچنین از آنجا که در حالات مطلوب انتظار داریم که با الگوریتم در چند تکرار به جواب برسیم، می‌توان با تعیین حد بالایی برای تکرارهای الگوریتم، حالات نامطلوب (همگرایی کند یا واگرایی یا نوسان جواب‌ها به چپ و راست) را سریعاً شناسایی کرد. و البته باید در برنامه پیاده‌ساز الگوریتم امکان اینکه $f'(x)$ در جایی در طول محاسبات صفر یا نزدیک به صفر شود را در نظر داشت. اگر $f'(x_n) = 0$ یا نزدیک به صفر باشد، می‌توان آخرین مقدار تقریبی را که الگوریتم محاسبه کرده است، به عنوان ریشه تقریبی معادله استفاده کرد.

برای اطمینان از آنکه مقدار آخرین جواب تقریبی که الگوریتم محاسبه کرده است، به مقدار دقیق ریشه خیلی نزدیک است، لازم است معیاری برای اندازه‌گیری خطا در نظر بگیریم. در اینجا اندازه خطا را اختلاف دو جمله متوالی در دنباله تقریب‌ها در نظر می‌گیریم؛ یعنی به عنوان معیار اندازه خطا از نامساوی $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ استفاده می‌کنیم. البته از آنجا که ممکن است با وجود کوچک بودن مقدار خطا، باز آخرین مقدار x به ریشه نزدیک نباشد، باید با توجه به آخرین مقدار $f(x)$ ، نزدیک بودن یا نبودن x به ریشه را بررسی کرد.

پس اجرای الگوریتم تا وقتی ادامه می‌یابد که یا مقدار مشتق تابع از آستانه‌ای کوچک‌تر شود یا مقدار خطا از آستانه‌ای کمتر شود یا آنکه تعداد تکرارها از آستانه‌ای بیشتر شود. از آنجا که برنامه به گونه‌ای نوشته شده است که رایانه مقدار جواب‌های تقریبی را به محض محاسبه چاپ می‌کند، در صورت توقف اجرای الگوریتم قبل از به پایان رسیدن تکرارها، آخرین جوابی که چاپ شده است به عنوان مقدار تقریبی ریشه استفاده خواهد شد.

الگوریتم نیوتن را بیشتر در کتاب‌هایی می‌توان یافت که به الگوریتم‌های عددی اختصاص داده شده‌اند. یکی از کتاب‌های معتبر و خواندنی برای آشنایی با بسیاری از الگوریتم‌های عددی (از جمله الگوریتم نیوتن) و نحوه پیاده‌سازی آنها کتاب [۴] است.

۷.۲. الگوریتم هرر. توابع چندجمله‌ای دسته‌ای مهم از توابع هستند که در زمینه‌های مختلف علمی و مهندسی مکرراً پیش می‌آیند. دقیقاً معلوم نیست که مسائل درباره توابع چندجمله‌ای (مانند جمع و تفریق و ضرب و تقسیم توابع چندجمله‌ای) از چه زمانی مطرح شدند. اما حداقل این را می‌توان با اطمینان گفت که نیوتن و ریاضیدانان بعد از او، توجه‌ای ویژه به توابع چندجمله‌ای داشتند.

پایه‌ای‌ترین مسأله‌ای که می‌توان درباره توابع چندجمله‌ای مطرح کرد، نحوه محاسبه مقادیر چنین توابعی است. گرچه با الگوریتم‌های ساده‌ای می‌توان مقادیر توابع چندجمله‌ای را محاسبه کرد، زیباترین و بهترین الگوریتم برای این مسأله الگوریتمی قدیمی است که آن را ویلیام هرر^{۲۱} (۱۷۸۶-۱۸۳۷) ریاضیدان انگلیسی در اوایل قرن نوزدهم منتشر کرد و به همین دلیل آن الگوریتم به عنوان «قاعده هرر»^{۲۲} معروف شده است. با وجود اینکه الگوریتم، منتسب به هرر است،

²¹William George Horner

²²Horner's rule

اما طبق مستندات، ایزاک نیوتن از همین الگوریتم ۱۵۰ سال قبل از هرر استفاده می‌کرده است و حتی روشی معادل با این الگوریتم در قرن سیزدهم در چین استفاده می‌شده است.

۱.۷.۲. طراحی الگوریتم. شکل کلی و متعارف توابع چندجمله‌ای درجه n را در نظر بگیرید:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

می‌توان با محاسبه مستقیم تک تک جملات تابع و سپس محاسبه مجموع آن جملات، مقدار تابع را در کل با $\frac{n(n+1)}{2}$ ضرب و n جمع محاسبه کرد. طبق الگوریتم هرر، برای محاسبه مقدار تابع از «نمایش تودرتوی» چندجمله‌ای استفاده می‌کنیم. نکته این است که می‌توانیم شکل کلی تابع $P_n(x)$ را به این صورت نامتعارف بازنویسی کنیم:

$$P_n(x) = (\dots (a_n x + a_{n-1})x + \dots)x + a_0.$$

با الگوریتم برای ارزیابی ضرب‌های تودرتو، از ارزیابی عبارت درون داخلی‌ترین کمانک (که یک چندجمله‌ای درجه اول است) شروع می‌کنیم و گام به گام به سمت بیرون حرکت می‌کنیم، تا آنکه نهایتاً مقدار چندجمله‌ای درجه n را تعیین کنیم. در حالی که با الگوریتمی سراسری می‌توان هر تابع چندجمله‌ای درجه n را با $\frac{n(n+1)}{2}$ ضرب و n جمع محاسبه کرد، با الگوریتم هرر می‌توان هر تابع چندجمله‌ای درجه n را با n ضرب و n جمع ارزیابی کرد. (به ازای هر ضریب صفری، یکی از تعداد جمع‌ها کم خواهد شد.) در واقع، الگوریتم هرر، الگوریتمی بهینه برای محاسبه مقادیر توابع چندجمله‌ای است و طراحی الگوریتمی کاراتر از آن ممکن نیست.

الگوریتم هرر در بعضی از کتاب‌های الگوریتم مورد بحث قرار گرفته است. برای مثال، کتاب [۱۴] را ببینید.

۲.۷.۲. پیاده‌سازی الگوریتم. در عمل ساده‌ترین و سریع‌ترین الگوریتم برای ارزیابی توابع چندجمله‌ای الگوریتم هرر است. می‌توان برنامه پیاده‌ساز الگوریتم هرر را به این صورت نوشت:

Evaluates a polynomial at a given point by Horner's rule

```
def Horner(P, x):
    n = len(P) - 1
    p = P[n]
    for i in range(n-1, -1, -1):
        p = x * p + P[i]
    return p
```

همان‌طور که واضح است، برنامه پیاده‌ساز الگوریتم بسیار کوتاه است. توجه کنید که با این برنامه به طور ضمنی، طبق نمایش تودرتوی تابع چندجمله‌ای به ارزیابی آن می‌پردازیم. یعنی برای پیاده‌سازی الگوریتم لازم نیست تابع چندجمله‌ای را صریحاً به شکل تودرتو نمایش دهیم؛ تنها مشخص کردن ضرایب تابع چندجمله‌ای برای ارزیابی آن کافی است. به علاوه لازم نیست نتایج میانی را ذخیره کنیم، چون به محض محاسبه کمیت‌های میانی، از آنها سریعاً در گام بعدی استفاده خواهد شد.

۳. چند نکته و پیشنهاد

ما در این مقاله هفت الگوریتم قدیمی را بررسی کردیم. با بررسی همین الگوریتم‌ها می‌توان به نتایجی رسید. الگوریتم‌هایی که در اینجا بررسی شدند این پیام را همراه خود دارند که مفهوم الگوریتم، گرچه به طور ضمنی، از چند هزار سال قبل مورد توجه ریاضیدانان بوده است. حتی عامه مردم نیز با مسائل الگوریتمی مواجه می‌شدند. به عنوان مثال، معمای الگوریتمی معروف «کشاوری - گرگ - بز - کلم» و دو معمای الگوریتمی دیگر که با عنوان «معماهای عبور از رودخانه» شناخته می‌شوند و از جمله مسائلی هستند که عامه مردم را به خود جذب می‌کنند، در متنی بسیار قدیمی ذکر شده‌اند که بعضی از افراد آن را نوشته کشیش و شاعری انگلیسی به نام آلکونین یورکی^{۲۳} (۷۳۵-۸۰۴) می‌دانند. (سه معمای عبور از رودخانه در کتاب [۱۵] که به معرفی ۱۷۲ معمای الگوریتمی اختصاص داده شده است، آورده شده‌اند).

شاید تا قبل از اختراع رایانه، کسانی که الگوریتمی را کشف می‌کردند یا از آن استفاده می‌کردند، متوجه تفاوت ظریف اما اساسی آنها با بقیه روش‌های حل مسأله نبودند. اختراع رایانه بود که نه تنها این تفاوت ظریف را برجسته و نمایان کرد، بلکه بستر را برای کشف و استفاده از هزاران الگوریتم دیگر هموار کرد. تا قبل از اختراع رایانه، افرادی که الگوریتمی را کشف می‌کردند، چندان به کاربرد گسترده آن فکر نمی‌کردند چون ابزاری برای این کار در اختیار نداشتند. اما بعد از اختراع رایانه، الگوریتم‌ها عمدتاً از این جهت مد نظر بوده‌اند که در عمل و برای حل مسائل واقعی سودمند باشند.

در بررسی تاریخی الگوریتم‌ها، به این واقعیت توجه کردیم که بعضی از الگوریتم‌ها را ممکن است در طول دهه‌ها یا قرن‌ها افراد مختلفی کشف (مجدد) کرده و استفاده کرده باشند. نامگذاری یک الگوریتم به اسم فرد خاصی که از آن استفاده کرده است، لزوماً به این معنا نیست که کاشف الگوریتم آن فرد و مبدأ زمانی کشف الگوریتم، زمان زندگی آن فرد خاص بوده است. مثال‌هایی را دیدیم که الگوریتمی را شخصی کشف کرده است و بعدها به نام کسی دیگر معروف شده است.

نگاه جامع و دقیق به الگوریتم‌ها از چشم‌انداز تاریخی، مستلزم دسته‌بندی الگوریتم‌ها است. یک معیار، دسته‌بندی الگوریتم‌ها بر اساس مسأله‌ای است که حل می‌کنند؛ یعنی الگوریتم‌هایی که در طول تاریخ برای حل یک مسأله خاص (مثلاً مسأله یافتن ریشه‌های معادلات غیرخطی) یا حل دسته‌ای از مسائل که مبنای نظری آنها مشترک است (مانند مسائل نظریه اعداد) پیشنهاد شده‌اند، در یک دسته گذاشته شوند. معیار منطقی دیگر برای دسته‌بندی الگوریتم‌ها، این است که آیا آنها قبل از اختراع رایانه کشف شده‌اند یا بعد از اختراع رایانه. ما در این مقاله، اولاً خود را محدود به بررسی الگوریتم‌هایی کردیم که قبل از اختراع رایانه کشف شده‌اند و ثانیاً تنها به بررسی الگوریتم‌هایی پرداختیم که برای حل مسائل عددی پیشنهاد شده‌اند. در حقیقت تا قرن هفدهم میلادی، عمده دستاوردهای ریاضیدانان را می‌توان یا در زمینه حساب (نظریه اعداد) دانست یا در زمینه هندسه. از قرن هیجدهم که آن را زمان طلوع ریاضیات جدید می‌دانند، مسائلی (مانند حل معادلات غیرخطی و درونیابی و انتگرال‌گیری عددی) مطرح شدند که امروزه در شاخه «آنالیز عددی» مورد بررسی قرار می‌گیرند. آنقدر این موضوعات تا قرن بیستم بسط پیدا کرد و به موضوعات غالب در ریاضیات تبدیل شد که در دهه ۱۹۴۰، کاربران رایانه، آن را عمدتاً ابزاری برای حل سریع مسائل عددی می‌دانستند. چندین سال بعد از اختراع رایانه بود که به تدریج کاربرد رایانه برای حل مسائل الگوریتمی در دیگر حوزه‌های ریاضی، مانند مسائل گراف و مسائل ترکیبیاتی و مسائل هندسی روشن شد.

²³Alcuin of York

بررسی تاریخی حوزه‌های دیگری از الگوریتم‌ها، از جمله حوزه‌های الگوریتم‌های هندسی یا الگوریتم‌های گراف یا الگوریتم‌های ترکیبیاتی، موضوع تحقیقاتی و آموزشی مفید و جالبی است؛ به ویژه آنکه در این زمینه‌ها تاکنون تحقیقی جامع منتشر نشده است. در این زمینه‌ها نمونه‌هایی از مسائل و الگوریتم‌های برجسته را می‌توان ذکر کرد:

- **الگوریتم بند کفشی^{۲۴}**: محاسبه مساحت شکل‌های هندسی از مسائلی است که از زمان باستان مورد توجه هندسه‌دانان بوده است. ریاضیدانی به نام آلبرشت مایستر^{۲۵} (۱۷۸۸-۱۷۲۵) مبتنی بر کارهای ریاضیدانان دیگر، فرمولی را برای محاسبه مساحت چندضلعی‌های ساده، در سال ۱۷۶۹ پیشنهاد کرد. نحوه رسیدن به این فرمول که به نام فرمول «بند کفشی» معروف است، در کتاب [۱۷] توضیح داده شده است.
- **الگوریتم پیمایش عمقی**: با این الگوریتم، می‌توان گرافی را پیمایش و با اطلاعات حاصل از پیمایش، مسائل متعددی را درباره گراف حل کرد. طبق مستندات، این الگوریتم در قرن نوزدهم برای یافتن مسیر خروجی از مازها استفاده می‌شده است [۱۶]. البته این الگوریتم را می‌توان تعمیمی از «قاعده دست راست» دانست که بشر از زمان باستان برای خروج از ماز آن را می‌دانسته است. طبق این قاعده، به محض ورود به ماز، دست راست خود را روی دیوار می‌گذاریم و آن را از روی دیوار برنمی‌داریم تا زمانی که از ماز خارج شویم.
- **الگوریتم فلوری و الگوریتم هایرهولزر**: لئونارد اوایلر^{۲۶} (۱۷۰۷-۱۷۸۳)، ریاضیدان سوئیسی در سال ۱۷۳۶ ثابت کرد که مسأله «هفت پل کونیگسبرگ» جواب ندارد. (ترجمه‌ای از مقاله اصلی اوایلر و نکاتی تاریخی درباره مسأله در مقاله [۷] ذکر شده است). جواب این مسأله به بیان امروزی، دوری در یک گراف است که از هر یال آن دقیقاً یک بار بگذرد. به همین دلیل بعدها چنین دورهایی را «دورهای اوایلری» نامیدند. دو الگوریتم متفاوت برای مسأله یافتن دورهای اوایلری، از ریاضیدانی آلمانی به نام کارل هایرهولزر^{۲۷} در سال ۱۸۷۳ پس از مرگ او و از ریاضیدانی فرانسوی به نام میشل فلوری^{۲۸} در سال ۱۸۸۳، منتشر شده است. (این دو الگوریتم در کتاب [۲] و مقاله [۷] بحث شده‌اند.)
- **مسأله مربع جادویی**: یکی از مسائل ترکیبیاتی که نباید آن را از چشم‌انداز تاریخی نادیده گرفت، مسأله «مربع جادویی» است. مربع جادویی مرتبه n را به بیان ریاضی، می‌توان به شکل ماتریسی $n \times n$ تصور کرد که هر یک از اعداد ۱ تا n^2 به گونه‌ای در خانه‌های آن گذاشته شده باشند که مجموع اعداد در هر سطر و مجموع اعداد در هر ستون و مجموع اعداد در هر دو قطر اصلی ماتریس، برابر با هم و $(n^2 + 1)/2$ باشد. در تمدن‌های باستانی ایران و هند و چین، از چند هزار سال قبل چنین مربعاتی استفاده می‌شده است. دانشمندان مسلمان چنین مربعاتی را «مربع وفقی» می‌نامیدند و توجه‌ای ویژه به آنها داشتند. توجه آنان به این مسأله صرفاً از جنبه ریاضی نبوده است؛ از گذشته تاکنون افرادی معتقدند که چنین مربعاتی اگر با اعداد یا نمادهایی خاص پر شوند، برای رفع مشکلاتی (مثل درمان بیماری‌هایی خاص) مفید هستند. بعدها دانشمندان اروپایی با این

²⁴shoelace²⁵Albrecht Meister²⁶Leonhard Euler²⁷Carl Hierholzer²⁸Michel Fleury

نوع ساختارهای عددی آشنا می‌شوند و اسم «مربع جادویی» را روی آن می‌گذارند. در کتاب [۳] مربعات جادویی از چشم‌انداز تاریخی بررسی شده است.

- **مسئله n - وزیر:** یکی دیگر از مسائل ترکیبیاتی که از چشم‌انداز تاریخی جالب است، مسئله n - وزیر است. هدف از حل این مسئله، گذاشتن n وزیر روی یک صفحه شطرنجی $n \times n$ است، به گونه‌ای که هیچ دو وزیری در یک سطر یا در یک ستون یا در یک قطر نباشند. این مسئله را ظاهراً برای اولین بار یک بازیکن شطرنج آلمانی به نام مکس بزل (۱۸۲۴-۱۸۷۱) ^{۲۹} در سال ۱۸۴۸ مطرح کرد و کارل گاوس در سال ۱۸۵۰ راه‌حلی را برای مسئله ۸ وزیر منتشر کرد. نکاتی تاریخی درباره این مسئله و توضیحاتی درباره راه‌حل‌های آن و کاربردهای آن در مقاله [۱] ذکر شده است.

ما در این تحقیق، خود را محدود به الگوریتم‌هایی کردیم که قبل از اختراع رایانه کشف شده‌اند. یک موضوع تحقیقاتی جالب دیگر، بررسی الگوریتم‌های برجسته‌ای است که بعد از اختراع رایانه از دهه ۱۹۴۰ به بعد منتشر شده‌اند. تعداد چنین الگوریتم‌هایی بسیار زیاد است اما بعضی از آنها از این لحاظ که حل رایانه‌ای سریع مسائلی را ممکن کردند یا زمینه‌ساز کشف الگوریتم‌های دیگری شدند، الگوریتم‌های برجسته‌ای به حساب می‌آیند و سزاوار است که در وهله اول نقش این الگوریتم‌ها در پیشرفت‌های علمی و صنعتی مورد تحقیق قرار گیرد. چند مثال از نام (و تاریخ انتشار) الگوریتم‌های شاخصی که بعد از اختراع رایانه منتشر شده‌اند، عبارتند از: الگوریتم مرتب‌سازی ادغامی (۱۹۴۵)، الگوریتم سیمپلکس (۱۹۴۷)، الگوریتم دایکسترا (۱۹۵۹)، الگوریتم مرتب‌سازی سریع (۱۹۶۲)، الگوریتم کاراتسوبا (۱۹۶۲)، الگوریتم استراشن (۱۹۶۹) و الگوریتم کارمارکار (۱۹۸۴).

تحقیقات تاریخی در زمینه‌هایی مانند آنهایی که به آنها اشاره شد، وقتی جامع خواهد بود که ما بدانیم دستاوردهای الگوریتمی گذشتگان صرفاً راه‌حلی نیست که به شکل الگوریتم در متون آورده شده‌اند. در واقع، گذشتگان به چند طریق زمینه علمی الگوریتم‌ها را گسترش داده‌اند و راه را برای دستاوردهای الگوریتمی آیندگان هموار کرده‌اند. در مواردی، در یکی از متون قدیمی، راه‌حلی برای مسئله‌ای ذکر شده است که می‌توان آن را راه‌حل را امروزه الگوریتم نامید. در مواردی، فرمولی یا قضیه‌ای در یک متن قدیمی آورده شده است که نمی‌توان آن را الگوریتم نامید، اما می‌توان مبتنی بر آن فرمول یا قضیه، الگوریتمی طراحی کرد و اینکه در مواردی، مسئله‌ای در یکی از متون قدیمی مطرح شده است اما یا الگوریتمی برای آن مشخص نشده است یا آنکه فقط نمونه یا نمونه‌های خاصی از مسئله حل شده است و بعدها افراد دیگری الگوریتم‌هایی را برای حل آن مسئله پیشنهاد کرده‌اند. برای مثال، گرچه اوایل الگوریتمی برای حل مسئله «هفت پل کونیگسبرگ» ارائه نکرد، اما جواب او به همین مسئله، منجر به شکل‌گیری نظریه گراف شد. از این منظر باید کار اوایل را از نقاط اوج در تاریخ الگوریتم‌ها دانست.

به علاوه، نباید ربط الگوریتم‌هایی را که در چند دهه گذشته منتشر شده‌اند با دستاوردهای ریاضیدانان در زمان‌های قبل از انتشار آن الگوریتم‌ها نادیده گرفت. برای مثال، الگوریتم‌های هندسی که بعد از اختراع رایانه طراحی شده‌اند، مبتنی بر همان اصولی هستند که اقلیدس آنها را در کتاب اصول خود پایه‌ریزی کرد. یا آنکه ما امروزه از الگوریتم‌هایی استفاده می‌کنیم که مبتنی بر قضیه باقیمانده چینی (که طبق مستندات، اولین بار در نوشته‌های سون تزو ^{۳۰}) (در قرن سوم

²⁹Max Bezzel

³⁰Sun Tzu

میلادی)، ریاضیدان چین باستان، آورده شده است) و قضیه فرما که طبق مستندات، اولین بار در نوشته‌های پیر دو فرما^{۳۱} (۱۶۰۱-۱۶۶۵)، ریاضیدان فرانسوی، آورده شده است طراحی شده‌اند و با آنها می‌توان مسائلی کاربردی را بسیار سریع‌تر حل کرد.

در زمینه تاریخ الگوریتم‌ها تاکنون فقط یک کتاب اختصاصی به زبان فرانسوی با عنوان «تاریخ الگوریتم‌ها: از سنگ‌ریزه تا ریزتراشه» منتشر شده است. البته این کتاب به زبان انگلیسی نیز ترجمه شده است [۳]. این کتاب گرچه ارزشمند و خواندنی است، اما بعضی از حوزه‌های الگوریتمی مانند الگوریتم‌های گراف را نادیده گرفته است و عمدتاً به معرفی الگوریتم‌های عددی پرداخته است. ظاهراً کتاب خاص دیگری که مفصلاً به بحث‌های تاریخی درباره الگوریتم‌ها پرداخته باشد، منتشر نشده است و باید چنین نکات پراکنده‌ای را در کتاب‌ها و مقالات مختلف یافت. به عنوان مثال، چهار جلد کتاب معروف «هنر برنامه‌نویسی رایانه‌ای» [۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳] حاوی اطلاعات ارزشمندی درباره کشفیات الگوریتمی از زمان باستان تا عصر بعد از اختراع رایانه است. در میان کتاب‌های درسی الگوریتم، کتاب «راهنمای طراحی الگوریتم» [۲۰] بیشتر از بقیه کتاب‌ها به ذکر نکات تاریخی پرداخته است. یکی دیگر از کتاب‌های جذاب، کتاب [۱۹] است که در سال ۱۹۹۵ درباره زندگی و کشفیات ۱۵ رایانه‌دان برجسته منتشر شده است، و حاوی نکات تاریخی سودمندی درباره تعدادی از الگوریتم‌هایی است که در پنج دهه اول عصر بعد از اختراع رایانه کشف شده‌اند. به عنوان مثالی دیگر، می‌توان به کسانی که می‌خواهند با معماهای الگوریتمی، چه از جنبه آموزشی و چه از جنبه تاریخی، آشنا شوند، خواندن کتاب بی‌نظیر «معماهای الگوریتمی» [۱۵] را پیشنهاد کرد.

مراجع

1. J. Bell and B. Stevens, *A survey of known results and research areas for n-queens*. Discrete Mathematics, 309 (2009) no. 1, 1–31.
2. N.L. Biggs, E.K. Lloyd, and R.J. Wilson, *Graph theory 1736-1936*. Clarendon Press, 1976.
3. Jean-Luc Chabert, ed. *A History of Algorithms: From the Pebble to the Microchip*. Translated by Chris Weeks. Springer, 1998.
4. S. Chapra and R. Canale, *Numerical Methods for Engineers*, 7th ed. McGrawHill, 2016.
5. J.W. Cooley, and J.W. Tukey, *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*, Mathematics of Computation, 19 (1965) no. 90, 297–301.
6. T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, and C. Stein, *Introduction to Algorithms*, 4th ed. MIT Press, 2022.
7. J. Ebert, *Computing Eulerian trails*, Information Processing Letters, 28 (1988) 93–97.
8. G.E. Forsythe, *What to do till the computer scientist comes*, American Mathematical Monthly, 75 (1968) no. 5, 454–462.
9. M.T. Heideman, D.H. Johnson, and C.S. Burrus, *Gauss and the history of the fast Fourier transform*, IEEE ASSP Magazine, 1 (1984) no. 4, 14–21.

³¹Pierre de Fermat

10. D.E. Knuth, *The art of Computer Programming, Volume 1: Fundamental Algorithms*, 3rd ed. Addison-Wesley, 1997.
11. D.E. Knuth, *The Art of Computer Programming, Volume 2: Seminumerical Algorithms*, 3rd ed. Addison-Wesley, 1998.
12. D.E. Knuth, *The art of Computer Programming, Volume 3: Sorting and Searching*, 2nd ed. Addison-Wesley, 1998.
13. D.E. Knuth, *The art of Computer Programming, Volume 4A, Combinatorial Algorithms, Part 1*, Addison-Wesley, 2011.
14. A. Levitin, *Introduction to the Design & Analysis of Algorithms*, 3rd ed. Pearson, 2012.
15. A. Levitin and M. Levitin, *Algorithmic Puzzles*, Oxford University Press, 2011.
16. E. Lucas, *Recreations Mathematiques*, Gauthier-Villares, Paris, 1891.
17. J. O'Rourke, *Computational Geometry in C*, 2nd ed. Cambridge University Press, 1998.
18. K. Rosen, *Discrete Mathematics and its Applications*, 8th ed. McGraw-Hill, 2019.
19. D. Shasha and C. Lazere, *Out of Their Minds: The Lives and Discoveries of 15 Great Computer Scientists*, Copernicus, 1998.
20. S.S. Skiena, *Algorithm Design Manual*, 3rd ed. Springer, 2020.



ALGORITHMS: FROM ANCIENT TIMES TO COMPUTER ERA

JAAFAR ALMASIZADEH ^{1*}

¹Department of Mathematics and Statistics, University of Isfahan, Isfahan, Iran.
j.almazizadeh@sci.ui.ac.ir

Abstract. In this paper, we examine seven old and prominent algorithms that were discovered centuries before the invention of computers. The main purpose of selecting and introducing these algorithms is to show that algorithms have implicitly attracted the attention of mathematicians since ancient times, and that the concept of algorithm did not emerge only with the invention of computers. This manuscript enables readers to look at algorithms from a historical perspective and see part of the path algorithmists have traveled over the past 4000 years. Assuming that most readers of this paper are enthusiasts who have just started learning algorithms, in addition to mentioning historical notes, we also discuss the educational and practical aspects of these seven algorithms. From an educational perspective, the design process of the seven algorithms based on mathematical arguments is explained. From a practical perspective, the implementation of the seven algorithms in the Python programming language is explained. Finally, several comments and suggestions are provided for those who want to deal with algorithms more closely from a historical perspective.

2020 Mathematics Subject Classification. 01A99, 68W99, 97D50, 97P99

Keywords. Mathematics, Algorithm; Problem; Computer; History;

Date: Received 17-02-2026 Revised 30-04-2026 Accepted 21-06-2026 Available Online 21-06-2026

©Ferdowsi University of Mashhad.



Towards Mathematical Sciences

Volume 6, Issue 1, 2026



Publisher

Ferdowsi University of Mashhad

Director-in-Charge

Mohammad Sal Moslehian

Editor-in-Chief

Behrooz Mashayekhy Fard

Executive Manager

Mohammad Janfada

Editorial Board

Masoud Ariannejad, *University of Zanjan, Zanjan*

Mohammad Janfada, *Ferdowsi University of Mashhad*

Arezou Habibirad, *Ferdowsi University of Mashhad*

Shirin Hejazian, *Ferdowsi University of Mashhad*

Davod Khojasteh Salkuyeh, *University of Guilan*

Amir Daneshgar, *Sharif University of Technology*

Mahdi Doostparast, *Ferdowsi University of Mashhad*

Ali Dolati, *Yazd University*

Farzad Radmehr, *Ferdowsi University of Mashhad*

Habib Rajabi Mashhadi, *Ferdowsi University of Mashhad*

Bakhtiyar Shabani, *Ferdowsi University of Mashhad*

Ahmad Safapour, *Vali-E-Asr University of Refsanjan*

Massoumeh Fashandi, *Ferdowsi University of Mashhad*

Fatemeh Helen Ghane, *Ferdowsi University of Mashhad*

Gholam Reza Mohtashami Borzadaran, *Ferdowsi University of Mashhad*

Ehsan Momtahn, *Yasouj University*

Ali Asghar Molavi, *Hakim Sabzevari University*

Madjid Mirzavaziri, *Ferdowsi University of Mashhad*

Advisory Board

Faezeh Toutounian Mashhad, *Ferdowsi University of Mashhad*

Rahim Zare Nahandi, *University of Tehran*

Omid Ali Shehni Karamzadeh, *Shahid Chamran University of Ahvaz*

Mohammad Ghasem Vahidi Asl, *Shahid Beheshti University*

Bahman Honary, *Ferdowsi University of Mashhad*

Editor

Zohreh Vasagh, *Ferdowsi University of Mashhad*

All rights are reserved for Ferdowsi University of Mashhad.

Mailing Address: TMSJ Office, Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran. P. O. Box 91775-1159.

Website Address: <https://tmsj.um.ac.ir>

Email: tmsj@um.ac.ir

Phone: +98-51-38806234

Fax: +98-51-38807358



به سوی علوم ریاضی



دانشگاه فردوسی مشهد

فهرست مطالب

مشتق گیری خودکار به عنوان چارچوبی عمومی برای حل ردهای از مسائل بهینه سازی ۱

م. امین طوسی

تفسیرهای اقتصادی تحلیل پوششی داده ها ۱۵

ح. عزیزی

در سوگ نورما پرزمگ، ۲۰۲۶-۱۹۴۲: یک یادنامه ۳۲

س. رشید

نمونه ای متقدم از یک دستگاه عددنویسی ارزش مکانی غیردهی ۳۹

ا. امیری

به یادبود: جیم بنت (۲۰۲۳-۱۹۴۷) ۵۲

ح. عزیزی

الگوریتم ها: از دوران باستان تا عصر رایانه ۶۱

ج. الماسی زاده